УДК 519.6

Л. Л. Гарт
Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

О ЧИСЛЕННЫХ АЛГОРИТМАХ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Досліджується питання про наближене знаходження стійких розв'язків некоректних інтегральних рівнянь із постійними границями інтегрування за допомогою проекційних і проекційно-ітераційних регуляризуючих схем, основаних на методі А.Н. Тихонова. Здійснюється порівняльний аналіз відповід-них алгоритмів із використанням різних способів вибору параметра регуляризації, демонструється їхня практична збіжність на прикладі розв'язання конкретних задач.

Исследуется вопрос о приближенном нахождении устойчивых решений некорректных интегральных уравнений с постоянными пределами интегрирования при помощи проекционных и проекционно-итерационных регуляризирующих схем, основанных на методе А.Н. Тихонова. Проводится сравнительный анализ соответствующих алгоритмов с использованием различных способов выбора параметра регуляризации, демонстрируется их практическая сходимость на примере решения конкретных задач.

The problem of approximate finding stable solutions of ill-posed integral equations with constant integration bounds is investigated with applying the projection and projection-iteration regularizing schemes based on Tikhonov's method. A comparative analysis of the corresponding algorithms using various ways of the regularization parameter choice is carried out, the practical convergence of these algorithms for solving concrete problems is demonstrated.

Ключевые слова: некорректное интегральное уравнение, оператор, параметр регуляризации, метод Тихонова, метод квадратур, проекционно-итерационный алгоритм, приближенное решение, последовательность, сходимость, погрешность.

Введение. В настоящее время интегральные уравнения стали широко применяться для решения многих задач моделирования динамических объектов и систем [1]-[4]. Интегральные уравнения позволяют понижать размерность некоторых задач исследования сплошных сред более компактно, чем дифференциальные уравнения, формулировать краевые задачи, приводят к устойчивым вычислительным процедурам.

Рассмотрение произвольной непрерывной динамической системы как взаимосвязанной совокупности элементов, входы и выходы которых связаны причинными отношениями, приводит к описанию их в общем случае системой интегральных уравнений Вольтерра – Урысона [4]. Объединение объектов, охваченных обратными связями, в систему свидетельствует о том, что задачи их анализа описываются интегральными уравнениями второго рода

$$y(x)-\lambda\int_{\Omega}K(x,s)\,y(s)ds=f(x),\qquad x\in Q, \tag{1}$$

где $K(x,s)$ – ядро интегрального уравнения, $f(x)$ – правая часть уравнения с областью определения Q, λ – числовой параметр, $y(s)$ – искомая функция с областью определения Ω, переменной в случае уравнения Вольтерра или постоянной в случае уравнения Фредгольма, одномерной или многомерной в случае одномерного или многомерного уравнения (1) соответственно. При этом реакция системы на произвольные воздействия представляется искомой функцией $y(s)$ уравнения вида (1) с переменной областью интегрирования, а периодические процессы описываются уравнениями с постоянными пределами интегрирования, равными периоду. Задача отыскания решения уравнения второго рода является в принципе корректной: решение такой задачи существует, единственно и непрерывно зависит от исходных данных.

Задачи восстановления внешних воздействий, определения весовых функций, более общие задачи идентификации, интерпретация результатов наблюдений и экспериментов и другие практически важные задачи приводят к уравнениям первого рода

$$\int_{\Omega}K(x,s)\,y(s)ds=f(x),\qquad x\in Q, \tag{2}$$

которые обладают свойствами некорректности (нарушается хотя бы одно из условий корректности по Адамару) и, строго говоря, не могут быть решены классическими методами в их традиционной форме. Это сделало актуальной разработку эффективных методов их решения.

© *Л.Л. Гарт, 2013*

Базовые понятия и методы решения некорректных задач были введены, как известно, московской школой академика А.М. Тихонова [5] и новосибирской школой академика М.М. Лаврентьева [6]. В частности, было введено понятие регуляризирующего оператора и сформулирован один из самых эффективных методов решения некорректных задач – метод α-регуляризации Тихонова, дано понятие условной корректности (или корректности по Тихонову), предложен ряд регуляризирующих схем решения, в том числе на компакте, разработаны устойчивые (регулярные, робастные) методы для решения задач в различных областях математики (оптимальное планирование, оптимальное управление, суммирование рядов Фурье, интегральные уравнения первого рода типа свертки, системы линейных алгебраических уравнений, операторные уравнения).

Интегральные уравнения в неразрывной связи с функциональным анализом представлены в богатых по содержанию трудах Л.В. Канторовича и Г.П. Акилова, А.Н. Колмогорова и С.В. Фомина, Л.А. Люстерника и В.И. Соболева, В.А. Треногина, С.Г. Михлина и других авторов. Существенный вклад в разработку различных аспектов решения некорректных задач внесли В.М. Фридман, В.А. Морозов, Ф.П. Васильев, В.Ю. Кудринский, В.В. Васин, В.К. Иванов и другие авторы, которые применили к решению некорректных задач проекционные (аппроксимационные) методы совместно с методами регуляризации, квазирешений и невязки. В работах этих ученых нашел свое строгое обоснование способ невязки решения некорректных задач, идея которого до этого была высказана без доказательства Д.Л. Филлипсом, а также Л.В. Канторовичем.

Устойчивые методы решения некорректных задач изложены во многих монографиях и публикациях, однако их наличие не исключает возможности разработки новых, более эффективных методов, а также усовершенствования уже существующих методов с доведением их до практических алгоритмов, и особенно до машинных программ.

Постановка задачи. Целью данной работы является сравнительный анализ вычислительных схем, основанных на методе регуляризации Тихонова, для приближенного решения линейных и нелинейных некорректных интегральных уравнений с постоянными пределами интегрирования, а именно одномерного линейного интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$A\,y \equiv \int_a^b K(x,s)\,y(s)ds = f(x), \quad a \le x \le b, \tag{3}$$

и нелинейного интегрального уравнения Урысона первого рода

$$A\,y \equiv \int_a^b K(x,s,y(s))ds = f(x), \quad a \le x \le b. \tag{4}$$

Предполагается, что ядро $K(x,s)$ интегрального уравнения (3) – вещественная непрерывная функция в области $G = \{a \le x \le b,\ a \le s \le b\}$, а функция $K(x,s,y(s))$ в уравнении (4) непрерывна в G вместе с производными $K'_y(x,s,y(s)),\ K''_{yy}(x,s,y(s))$ по совокупности переменных $x,s \in [a,b]$, $f(x) \in L_2[a,b]$, $y(s) \in L_2[a,b]$.

В качестве упомянутых регуляризирующих схем приближенного решения уравнений (3) и (4) рассматриваются проекционные и проекционно-итерационные вычислительные схемы, основанные на методе Тихонова в сочетании с методом квадратур для решения регуляризованных уравнений с использованием различных способов выбора параметра регуляризации (способа невязки, квазиоптимального способа, способа относительной поправки).

В данной работе впервые исследуется возможность применения проекционно-итерационного подхода к решению некорректных интегральных уравнений с постоянными пределами интегрирования, который заключается в модификации классического метода α-регуляризации Тихонова и позволяет заменить регуляризованное интегральное уравнение некоторой последовательностью более простых аппроксимирующих его конечномерных задач на совокупности измельчающихся сеток. При этом для каждой из «приближенных» задач с помощью некоторой итерационной процедуры строится лишь несколько приближений к решению, последнее из которых с использованием кусочно-линейной интерполяции принимается за начальное приближение в итерационном процессе для следующей «приближенной» задачи. Последовательность линейных интерполянтов построенных приближенных решений объявляется последовательностью приближений к решению исходного интегрального уравнения.

Следует отметить, что общая идея проекционно-итерационных методов для решения операторных уравнений и задач минимизации в функциональных пространствах принадлежит С.Д. Балашовой [7], в работах которой эти методы нашли свое строгое теоретическое обоснование и применение к решению различных конкретных классов математических задач, а в настоящее время продолжает развиваться в Днепропетровском университете в работах ее учеников.

Задачей данного исследования является анализ вычислительной эффективности проекционных и проекционно-итерационных регуляризирующих схем, основанных на методе А.Н. Тихонова, на примере

решения конкретных линейных и нелинейных некорректных задач с точки зрения трудоемкости вычислений и точности получаемых приближенных решений.

Метод решения. Идея метода регуляризации Тихонова для решения некорректных интегральных уравнений (3) и (4) состоит в том [5], что для обеспечения устойчивости решения каждого из этих уравнений вводится условие минимума так называемого сглаживающего функционала

$$\Phi_\alpha(y) = \|Ay - f\|^2_{L_2} + \alpha\|y\|^2_{L_2} \to \min_{y \in L_2[a,b]}, \qquad (5)$$

где $\alpha > 0$ – параметр регуляризации, для определения которого существуют различные способы [4]. Раскрытие условия (5) с учетом представления интегрального оператора A в уравнениях (3) и (4) приводит соответственно к регуляризованным интегральным уравнениям (уравнениям Эйлера экстремальной задачи (5)) типа Фредгольма второго рода

$$\alpha\, y_\alpha(t) + \int_a^b B(t,s)\, y_\alpha(s)\, ds = F(t), \qquad a \le t \le b, \qquad (6)$$

и Урысона второго рода

$$\alpha\, y_\alpha(t) + \int_a^b B(s,t,y_\alpha(s),y_\alpha(t))\, ds = F(t,y_\alpha(t)), \qquad a \le t \le b, \qquad (7)$$

задача решения которых уже является корректной [5]. В этих уравнениях

$$B(t,s) = \int_a^b K(x,t)\, K(x,s)\, dx, \quad F(t) = \int_a^b K(x,t)\, f(x)\, dx; \qquad (8)$$

$$B(s,t,y(s),y(t)) = \int_a^b K(x,s,y(s)) K'_y(x,t,y(t))\, dx, \qquad (9)$$

$$F(t,y(t)) = \int_a^b K'_y(x,t,y(t))\, f(x)\, dx.$$

Наиболее употребляемым способом определения параметра регуляризации α в том случае, когда вместо точной правой части $f(x)$ исходного уравнения (3) (или (4)) задана функция $\tilde{f}(x) \in L_2[a,b]$ такая, что $\|f - \tilde{f}\|_{L_2[a,b]} \le \delta$, является способ невязки, согласно которому в качестве искомого значения выбирается такое α, при котором

$$\|A\, y_\alpha - \tilde{f}\|_{L_2[a,b]} = \delta,$$

где $y_\alpha(t)$ – решение уравнения (6) (или (7)) при соответствующем значении α. Последнее соотношение можно трактовать как уравнение относительно α, которое при определенных условиях [5] имеет единственное решение. На практике во избежание решения этого уравнения часто выбирают ряд значений $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, связанных соотношением

$$\alpha_i = \theta\, \alpha_{i-1}, \quad 0 < \theta < 1, \qquad (10)$$

для каждого из которых вычисляют решение $y_{\alpha_i}(t)$ уравнения (6) (или (7)) и невязку $\|A\, y_{\alpha_i} - \tilde{f}\|_{L_2[a,b]}$. В качестве оптимального значения α_{opt} выбирают то α_i, для которого с наибольшей степенью точности выполняется приближенное равенство $\|A\, y_{\alpha_i} - \tilde{f}\|_{L_2[a,b]} \approx \delta$.

Квазиоптимальный способ определения параметра регуляризации α не требует знания погрешности δ правой части $f(x)$. Согласно этому способу в качестве искомого значения выбирают то α_i из ряда значений (10), для которого $\|y_{\alpha_i} - y_{\alpha_{i-1}}\|_{L_2[a,b]}$ принимает наименьшее значение.

Согласно способу относительной поправки в качестве искомого значения параметра регуляризации α выбирают то α_i из ряда значений (10), для которого наименьшее значение в смысле нормы пространства $L_2[a,b]$ принимает величина $\|y_{\alpha_i} - y_{\alpha_{i-1}}\| / \|y_{\alpha_i}\|$.

Одним из наиболее эффективных методов решения интегральных уравнений второго рода вида (6), (7) является метод квадратур (замены интеграла конечной суммой).

Предположим, что правая часть $f(x)$ исходного уравнения (3) (или (4)) задана таблицей своих значений на равномерной x-сетке узлов

$$\overline{\omega}_h = \left\{x_l \in [a,b]: \ x_l = a + lh, \ l = \overline{0,M}; \ h = (b-a)/M\right\}, \qquad (11)$$

а решение $y_\alpha(s)$ соответствующего регуляризованного уравнения ищется на другой равномерной s-сетке узлов

$$\overline{\omega}_\tau = \left\{s_j \in [a,b]: \ s_j = a + j\tau, \ j = \overline{0,N}; \ \tau = (b-a)/N\right\}, \qquad (12)$$

причем t-сетка в уравнении (6) (или (7)) совпадает с s-сеткой.

Если интегралы в (6), (8) расписать, например, с помощью квадратурной формулы Симпсона (в предположении о достаточной гладкости ядра, решения и правой части, а также о чётности чисел $N > 0, \ M > 0$), то, отбросив погрешность $O(h^4 + \tau^4)$ численного интегрирования и перейдя к обозначениям $y_i \approx y_\alpha(t_i), \ B_{ij} \approx B(t_i, s_j), \ F_i \approx F(t_i), \ i, j = \overline{0,N}$, получим дискретный аналог уравнения (6) (опуская временно индекс α у y):

$$\alpha y_i + \sum_{j=0}^{N} A_j B_{ij} y_j = F_i, \qquad i = \overline{0,N}. \qquad (13)$$

При этом

$$B(t_i, s_j) = \sum_{l=0}^{M} A_l K(x_l, t_i) K(x_l, s_j) + O(h^4),$$

$$F(t_i) = \sum_{l=0}^{M} A_l K(x_l, t_i) f(x_l) + O(h^4), \quad i, j = \overline{0,N},$$

A_j и A_l – коэффициенты квадратурной формулы Симпсона. Соотношения (13) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), решив которую, найдем приближенные значения $y_0, y_1, \ldots, y_N$ решения $y_\alpha(t)$ уравнения (6) в точках t-сетки. Аналитическое выражение для $y_\alpha(t)$ может быть получено, например, интерполированием. Приближенное решение $\tilde{y}_\alpha(t)$ уравнения (6) на всем отрезке $[a,b]$ может быть также записано по формуле

$$\tilde{y}_\alpha(t) = \frac{1}{\alpha}\left(\sum_{j=0}^{N} A_j B(t, s_j) y_j + F(t)\right), \qquad a \le t \le b,$$

которая получается путем замены интеграла конечной суммой в уравнении (6).

Применительно к нелинейному интегральному уравнению Урысона второго рода (7), (9) метод квадратур приводит к системе нелинейных относительно $y_0, y_1, \ldots, y_N$ уравнений

$$\alpha y_i + \sum_{j=0}^{N} A_j B(s_j, t_i, y_j, y_i) = F(t_i, y_i), \qquad i = \overline{0,N},$$

решить которую можно любым известным методом [8].

Если же рассмотреть нелинейное интегральное уравнение (7) в операторном виде

$$P y_\alpha = 0, \qquad (14)$$

где

$$P y_\alpha \equiv \alpha y_\alpha(t) + \int_a^b B(s, t, y_\alpha(s), y_\alpha(t)) ds - F(t, y_\alpha(t)),$$

и применить к уравнению (14) итерационную формулу Ньютона [9]

$$P'(y_\alpha^{(k)}) \Delta y_\alpha^{(k)} = -P(y_\alpha^{(k)}), \quad k = 0,1,\ldots, \qquad (15)$$

где $\Delta y_\alpha^{(k)} = y_\alpha^{(k+1)} - y_\alpha^{(k)}$, $y_\alpha^{(0)}$ – некоторое начальное приближение, то, пользуясь определением производной нелинейного оператора [9]

$$P'(y_\alpha^{(k)}) \Delta y_\alpha^{(k)} = \lim_{\nu \to 0} \frac{P(y_\alpha^{(k)} + \nu \Delta y_\alpha^{(k)}) - P(y_\alpha^{(k)})}{\nu} =$$

$$= \alpha \Delta y_\alpha^{(k)} + \lim_{\nu \to 0} \frac{1}{\nu}\left[\int_a^b \left(B(t, s, y_\alpha^{(k)}(t) + \nu \Delta y_\alpha^{(k)}(t), y_\alpha^{(k)}(s) + \nu \Delta y_\alpha^{(k)}(s)) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - B(t, s, y_\alpha^{(k)}(t), y_\alpha^{(k)}(s))\right) dt - F(t, y_\alpha^{(k)}(t) + \nu \Delta y_\alpha^{(k)}(t)) + F(t, y_\alpha^{(k)}(t))\right],$$

можно свести уравнение (7) к линейному интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно $\Delta y_\alpha^{(k)}$ и решить его одним из известных методов [4], в частности уже упомянутым методом квадратур.

Можно показать так же, как в работах [10, 11], что метод квадратур сведения регуляризованных уравнений (6) и (7) к соответствующим конечным системам алгебраических уравнений укладывается в общую схему проекционных (аппроксимационных) методов, предложенных в [7] для решения операторных уравнений в банаховых пространствах.

Рассмотрим вопрос о применении проекционно-итерационного подхода к решению нелинейного интегрального уравнения Урысона первого рода (4), основанного на применении итерационного метода Ньютона –Канторовича к решению регуляризованного интегрального уравнения (7) в сочетании с методом квадратур сеточной аппроксимации линеаризованного уравнения на совокупности измельчающихся сеток.

Будем для каждой из аппроксимирующих конечномерных задач, начиная с задачи невысокой размерности, строить при помощи метода Ньютона – Канторовича с подключением процедуры выбора параметра регуляризации лишь несколько приближений $\tilde{y}_\alpha^{(k)}$ ($k = 1,2,...,k_n$, n – номер конечномерной задачи), последнее из которых будем принимать с использованием кусочно-линейной интерполяции в качестве начального приближения в итерационном процессе для следующей, $(n+1)$-й, конечномерной задачи. Критериями остановки описанного процесса могут служить либо заданная точность вычислений, либо конечный порядок дискретизации в аппроксимирующей задаче.

Приведем проекционно-итерационный алгоритм решения некорректного интегрального уравнения Урысона (4), основанный на методе регуляризации Тихонова с квазиоптимальным способом определения параметра регуляризации в сочетании с методом квадратур и итерационным методом Ньютона – Канторовича.

Проекционно-итерационный алгоритм

Подготовительный этап. Задаем точность $\varepsilon > 0$ вычислений в проекционно-итерационном алгоритме, начальный порядок $N = N_1$, $M = M_1$ дискретизации регуляризованного уравнения (7) на сетках (11), (12) на первом шаге алгоритма и рекурсивные формулы

$$N_n = \lambda_1 N_{n-1} + \mu_1, \quad M_n = \lambda_2 M_{n-1} + \mu_2, \quad n > 1, \qquad (16)$$
$$\lambda_i, \mu_i \in N \cup \{0\}, \; i = 1,2$$

изменения с ростом n порядка дискретизации. (Под номером шага в проекционно-итерационном алгоритме здесь и в дальнейшем следует понимать номер n конечномерной задачи в последовательности аппроксимирующих интегральное уравнение задач на совокупности измельчающихся сеток.) Кроме того, задаем целое число $m > 1$ как количество значений $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, ..., \alpha_m^{(n)}$ параметра регуляризации α, которые будут использоваться на каждом n-м шаге алгоритма ($n \ge 1$), начальное значение α_0 и ограничительное малое значение α_{lim} для параметра регуляризации.

1. Полагаем шаг алгоритма $n = 1$.

2. Задаем убывающую последовательность значений параметра регуляризации в соответствии с формулами

$$\alpha_i^{(n)} = \theta \, \alpha_{i-1}^{(n)}, \; i = \overline{2,m}, \quad 0 < \theta < 1; \quad \alpha_1^{(n)} = \alpha_{opt}^{(n-1)}, \; \alpha_1^{(1)} = \alpha_0 \qquad (17)$$

так, что $\alpha_i^{(n)} \ge \alpha_{lim}$, $i = \overline{1,m}$. (Если окажется при некотором $i = i_0 = \overline{2,m}$, что $\alpha_{i_o}^{(n)} < \alpha_{lim}$, то полагаем на данном шаге алгоритма $m := i_0 - 1$, и построение ряда значений α завершаем.)

3. Проводим дискретизацию формулы (15) с помощью метода квадратур на t- и s-сетках (12) узлов $s_j = t_j$, $j = \overline{1,N_n}$ и x-сетке узлов x_i, $i = \overline{1,M_n}$, где значения $N_n \ge N_{n-1}$, $M_n \ge M_{n-1}$ определяются формулами (16) и хотя бы одно из последних двух неравенств выполняется строго.

4. Определяем точность $\varepsilon_n > 0$ окончания итерационного процесса на данном шаге по правилу $\varepsilon_n = C(h_n^4 + \tau_n^4)$, где $C = const > 0$, $h_n = (b-a)/M_n$, $\tau_n = (b-a)/N_n$.

5. При $n = 1$ задаем на t-сетке $\overline{\omega}_{\tau_1}$ некоторое начальное приближение $\tilde{y}_\alpha^{(0)} = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, ..., y_{N_1}^{(0)})$, $y_j^{(0)} \approx y_\alpha(t_j)$, $j = \overline{1,N_1}$ в адаптированном к сеточному виду итерационном процессе (15) приближенного решения регуляризованного уравнения (7). При $n > 1$ выполняем кусочно-линейную интерполяцию приближенного решения $\tilde{y}_{\alpha_{opt}}^{(k_{n-1})} = (y_1^{(k_{n-1})}, y_2^{(k_{n-1})}, ..., y_{N_{n-1}}^{(k_{n-1})})$, полученного на предыдущем шаге на сетке $\overline{\omega}_{\tau_{n-1}}$, по формуле

$$y_{\alpha_{opt}}^{(k_{n-1})}(t) = y_i^{(k_{n-1})} - \frac{t-t_i}{2\tau_{n-1}}(3y_i^{(k_{n-1})} - 4y_{i+1}^{(k_{n-1})} + y_{i+2}^{(k_{n-1})}) +$$

$$+\frac{(t-t_i)^2}{2\tau_{n-1}^2}(y_i^{(k_{n-1})} - 2y_{i+1}^{(k_{n-1})} + y_{i+2}^{(k_{n-1})}),\ \ t_i \le t \le t_{i+2},\ \ i = \overline{0, N_{n-1}-2}$$

и задаем на t-сетке $\overline{\omega}_{\tau_n}$ с помощью этой формулы начальное приближение $\tilde{y}_\alpha^{(0)} = (y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, ..., y_{N_n}^{(0)})$, $y_j^{(0)} = y_{\alpha_{opt}}^{(k_{n-1})}(t_j),\ \ j = \overline{1, N_n}$ в соответствующем (15) дискретном итерационном процессе.

6. Далее, для каждого значения $\alpha = \alpha_i^{(n)},\ \ i = \overline{1,m}$, исходя из начального приближения $\tilde{y}_\alpha^{(0)}$, определенного в п. 5, строим адаптированным итерационным методом (15) несколько ($k_n \equiv k_n(\alpha)$) приближений $\tilde{y}_\alpha^{(k)},\ \ k = 1,2,...,k_n$, решая методом Гаусса при каждом фиксированном k СЛАУ вида (13) относительно $\Delta\tilde{y}_\alpha^{(k)} = \tilde{y}_\alpha^{(k+1)} - \tilde{y}_\alpha^{(k)}$ до достижения в некоторой сеточной норме точности вычислений $\left\|\Delta\tilde{y}_\alpha^{(k)}\right\|_{\tau_n} < \varepsilon_n$.

7. Вычисляем поправки $\left\|\tilde{y}_{\alpha_i^{(n)}}^{(k_n)} - \tilde{y}_{\alpha_{i-1}^{(n)}}^{(k_n)}\right\|_{\tau_n},\ \ i = \overline{2,m}$. Приближенное решение $\tilde{y}_{\alpha_l^{(n)}}^{(k_n)}$ $(l = \overline{2,m})$ с наименьшей поправкой (или $\tilde{y}_{\alpha_1^{(n)}}^{(k_n)}$, если $m = 1$) и соответствующее значение параметра $\alpha = \alpha_{opt}^{(n)} = \alpha_l^{(n)}$ полагаем оптимальными на данном шаге.

8. Если $\varepsilon_n \le \varepsilon$, то переходим на п. 9. В противном случае увеличиваем номер шага $n := n+1$ и переходим на п.2.

9. Конец алгоритма.

Анализ полученных результатов и выводы. Практическая сходимость проекционно-итерационного алгоритма решения некорректных интегральных уравнений вида (4) исследовалась на нескольких модельных задачах, в частности на уравнении Гаммерштейна

$$\int_a^b (x+s)(3y(s) + 5y^2(s))ds = q + cx,\quad a \le x \le b, \qquad (18)$$

точное решение которого $y^*(s) = e^s$ при $c = 3(e^b - e^a) + 2{,}5(e^{2b} - e^{2a})$, $q = 3(e^b(b-1) + e^a(1-a)) + 1{,}25(e^{2b}(2b-1) + e^{2a}(1-2a))$.

Для решения задачи (18) были рассмотрены различные вычислительные схемы проекционно-итерационного алгоритма, основанного на методе квадратур и методе Ньютона – Канторовича приближенного решения регуляризованного интегрального уравнения (7):

– с использованием трех стратегий выбора параметра регуляризации (способа невязки, квазиоптимального способа, способа относительной поправки);

– с вариацией количества m значений $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, ..., \alpha_m^{(n)}$ параметра регуляризации, начального значения α_0 и величины θ;

– с различными правилами (16) формирования порядка дискретизации интегрального уравнения на очередном шаге алгоритма;

– с различными критериями остановки проекционно-итерационного процесса (по заданной точности вычислений и по конечному порядку дискретизации в аппроксимирующей задаче).

Результаты реализации проекционно-итерационных вычислительных схем на ЭВМ сравнивались с результатами применения к той же задаче проекционной схемы метода Тихонова, предполагающей решение регуляризованного интегрального уравнения с помощью метода Ньютона –Канторовича и метода квадратур при однократной дискретизации.

Приведем результаты вычислительных экспериментов на примере решения модельной задачи (18) с входными параметрами: $[a,b] = [0,2]$, $\alpha_0 = 0{,}5$, $\theta = 0{,}5$, $m = 40$. В качестве начального приближения в итерационном процессе на первом шаге проекционно-итерационного алгоритма выступала сеточная функция, принимающая в каждом узле t-сетки $\overline{\omega}_{\tau_1}$ значение $0{,}5(e^a + e^b)$. Критерием остановки алгоритма было выбрано достижение конечного порядка $N_p = M_p$ дискретизации задачи, а именно: вычисления проводились на трех сетках – грубой ($N_1 = 4$), средней (со средним арифметическим значением

размерностей N_1 и N_p) и на сетке указанной размерности N_p. Поскольку погрешность полученного приближенного решения в проекционно-итерационном алгоритме определяется точностью $\varepsilon = \varepsilon_p = C\tau_p^4$ вычислений на последней сетке, то для сравнения с проекционным методом было рассмотрено применение его на сетке размерности N_p с точностью вычислений $\varepsilon = \varepsilon_p$, теми же значениями входных параметров и тем же начальным приближением, что и на первом шаге проекционно-итерационного алгоритма. В таблице, содержащей результаты вычислительных экспериментов, использованы, помимо известных, следующие обозначения: $\tilde{K} = \sum_{n=1}^{p} k_n$ и K – количество итераций, $\tilde{r} = \left\| y^* - y_{\alpha_{opt}^{(p)}}^{(k_p)} \right\|_{\tau_p} \Big/ \|y^*\|_{\tau_p}$ и $r = \left\| y^* - y_{\alpha_{opt}}^{(K)} \right\|_{\tau_p} \Big/ \|y^*\|_{\tau_p}$ – относительные погрешности приближенных решений в проекционно-итерационном и проекционном алгоритмах соответственно.

Таблица

Результаты вычислительных экспериментов

N_p	ε	Проекционно-итерационный алгоритм			Проекционный алгоритм		
		$\alpha_{opt}^{(p)}$	$\tilde{K}$	$\tilde{r}$	α_{opt}	K	r
Квазиоптимальный выбор параметра регуляризации							
16	0,002	5,82E-11	7+6+3	0,0487	9,09E-13	11	0,0526
22	0,0008	5,82E-11	7+15+6	0,0484	9,09E-13	13	0,0509
28	0,0004	2,91E-11	7+10+5	0,0482	4,66E-10	13	0,0500
34	0,0002	1,46E-11	7+11+7	0,0481	9,09E-13	14	0,0492
Способ невязки выбора параметра регуляризации							
16	0,002	0,000977	7+6+3	0,0487	0,000122	11	0,0510
22	0,0008	7,45E-09	7+15+6	0,0484	1,16E-10	13	0,0506
28	0,0004	5,96E-08	7+10+5	0,0482	4,66E-10	13	0,0492
34	0,0002	9,31E-10	7+11+7	0,0478	9,09E-13	14	0,0481

Анализ результатов свидетельствует о том, что проекционно-итераци-онный подход применительно к решению некорректных интегральных уравнений с постоянными пределами интегрирования приводит к уменьшению вычислительных затрат на построение приближений, поскольку значительная их часть строится для аппроксимирующих задач невысокой размерности, а также обеспечивает большую точность получаемых приближенных решений. Для автора в дальнейшем представляет интерес вопрос применения проекционно-итерационных регуляризирующих алгоритмов к решению некоторых практически важных некорректных задач.

Библиографические ссылки

1. **Глушков В.М.** О новом классе динамических моделей и его приложении в биологии / В.М. Глушков, В.В. Иванов, В.М. Яненко // Кибернетика. – 1979. – № 4. – С. 133-141.
2. **Самарский А.А.** Численные методы решения обратных задач математической физики / А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич. – М.: Изд-во ЛКИ, 2009. – 480 с.
3. **Гончарский А.В.** Численные методы решения обратных задач астрофизики / А.В. Гончарский, А.М. Черепащук, А.Г. Ягола. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
4. **Верлань А.Ф.** Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – К.: Наук. думка, 1986. – 544 с.
5. **Тихонов А.Н.** Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
6. **Лаврентьев М.М.** Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. – М.: Наука, 1980. – 288 с.
7. **Балашова С.Д.** Проекционно-итерационные методы решения уравнений в нормированных пространствах: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. – Днепропетровск: ДГУ, 1974. – 20 с.
8. **Ортега Дж.** Итерационные методы решения нелинейных систем / Дж. Ортега, В. Рейнболдт. – М.: Мир, 1975. – 558 с.
9. **Канторович Л.В.** Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов – СПб.: Невский Диалект, 2004. – 816 с.
10. **Гарт Л.Л.** Проекционно-итерационная реализация метода Ньютона –Канторовича для решения нелинейных интегральных уравнений / Л.Л. Гарт, Н.В. Поляков // Проблемы управления и информатики. – 2012. – № 1. – С. 70–78.
11. **Гарт Л.Л.** Проекційно-ітераційний алгоритм розв’язання некоректних інтег-ральних рівнянь Вольтера / Л.Л. Гарт // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2012. – № 1. – С. 101–112.

Надійшла до редколегії 01.05.2013 р.