УДК 519.85: 519.816

С.А. Ус
Национальный горный университет

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВ С МНОЖЕСТВЕННОЗНАЧНЫМ ЦЕЛЕВЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ

Сформульвано нову постановку задачі оптимального розбиття множин (ОРМ) із множиннозначним цільовим функціоналом та запропонований підхід до її розв'язання, на основі зведення до звичайної задачі ОРМ із застосуванням критеріїв прийняття рішень в умовах невизначеності.

Сформулирована новая постановка задачи оптимального разбиения множеств (ОРМ) с множественнозначным целевым функционалом и предложен подход к ее решению, основаный на сведении к обычной задаче ОРМ, используя критерии принятия решений в условиях неопределенности.

The new statement of set patitioning problem with multivalue objective functionalis formulated, and the approach solving that is proposed. It is based on a reduction mentioned problem to the usual set patitioning problem using the criteria of decision making under uncertainty.

Ключевые слова: оптимальное разбиение множеств, неполная информация, критерий принятия решений, неопределенность.

Введение. Многие известные и практически важные задачи, возникающие в производственной и научной деятельности человека, могут быть представлены как задача разбиения некоторого множества на его непересекающиеся подмножества. К числу таких задач относятся, например, задачи классификации и идентификации объектов, задачи размещения производства и определения зон обслуживания каждым предприятием, задачи орошения и др. Методы решения задач разбиения множеств в дискретной постановке широко исследуются уже на протяжении столетия. Задачи оптимального разбиения континуального множества (ОРМ) гораздо менее исследованы ввиду их сложности. В [1] представлены результаты исследования этой проблемы в детерминированной постановке, а также в условиях неопределенности. В частности, исследованы стохастические задачи ОРМ и некоторые задачи оптимального нечеткого разбиения. Задачи оптимального разбиения в условиях неопределенности исследовались также в [2;3;5].

© *С.А. Ус, 2011*

Постановка задачи. Рассмотрим линейную задачу ОРМ с размещением центров подмножестви ограничениями в следующей постановке [1].

Пусть потребитель некоторой однородной продукции распределен в области Ω. Конечное число N производителей, расположенных в изолированных точках τ_i, $i=\overline{1,N}$ области Ω, образуют систему точек $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$, причем координаты некоторых из них, или даже всех могут быть заранее неизвестны. Известен спрос $\rho(x)$ на продукцию в каждой точке области Ω, а также стоимость доставки продукции $c_i(x, \tau_i)$, $i=\overline{1,N}$ - из пункта производства τ_i в пункт потребления x. Предполагается, что прибыль производителя зависит только от транспортных расходов. Мощность i-го производителя определяется суммарным спросом обслуживаемых потребителей и не должна превышать заданных объемов b_i, $i=\overline{1,N}$. Необходимо разбить область Ω на зоны обслуживания каждым из производителей, т. е. на подмножества $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N$, так, чтобы суммарные затраты на доставку продукции были минимальны.

Однако, при решении реальных задач, точно определить стоимость доставки невозможно, поскольку она зависит от множества факторов, многие из которых имеют вероятностный или нечеткий характер и не могут быть точно определены. Примерами таких факторов являются: погодные условия, качество дорог, техническое состояние транспорта, квалификация персонала, экономические условия и др. Кроме того, сложным представляется описание функциональной зависимости стоимости доставки от этих факторов, а выбор одного фиксированного значения огрубляет модель. Но, в большинстве случаев, можно указать некоторое множество возможных функций стоимости, соответствующие определенным состояниям внешней среды. В результате будет получена задача такого вида:

Пусть потребитель некоторой однородной продукции распределен в области Ω. Конечное число N производителей, расположенных в изолированных точках τ_i, $i=\overline{1,N}$ области Ω, образуют систему точек

$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$, причем координаты некоторых из них, или даже всех могут быть заранее неизвестны. Известен спрос $\rho(x)$ на продукцию в каждой точке области Ω, а также множество возможных значений стоимости доставки продукции $c_i(x,\tau_i) = \{c_i^1(x,\tau_i); c_i^2(x,\tau_i); \ldots c_i^{M_i}(x,\tau_i)\}$, $i = \overline{1,N}$ – из пункта производства τ_i в пункт потребления *x*. Предполагается, что прибыль производителя зависит только от транспортных расходов. Мощность *i*-го производителя определяется суммарным спросом обслуживаемых потребителей и не должна превышать заданных объемов b_i, $i = \overline{1,N}$. Необходимо разбить область Ω на зоны обслуживания каждым из производителей, т. е. на подмножества Ω_1, Ω_2, …, Ω_N, так, чтобы суммарные затраты на доставку продукции были минимальны.

Поставленной задаче соответствует следующая математическая модель.

Пусть Ω – замкнутое ограниченное измеримое по Лебегу множество евклидова пространства E^n. Необходимо разбить его на N измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N$, и разместить центры подмножеств $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N$ в области Ω так, чтобы функционал

$$F(\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c_i(x,\tau_i)\rho(x)dx \qquad (1)$$

достигал минимального значения при ограничениях:

$$\int_{\Omega_i} \rho(x)dx \le b_i, \quad i = \overline{1,N} \qquad (2)$$

$$\text{mes}\,(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \ i \ne j, \ i, j = \overline{1,N}, \qquad (3)$$

$$\bigcup_{i=1}^{N}\Omega_i = \Omega \cdot \qquad (4)$$

Здесь $c_i(x,\tau_i) = \left\{c_i^1(x,\tau_i); c_i^2(x,\tau_i); \ldots c_i^{M_i}(x,\tau_i)\right\}$, $i = \overline{1,N}$ – множество возможных функций стоимости; $\rho(x)$ действительная неотрицательная интегрируемая функция, заданная на Ω; b_i, $i = \overline{1,N}$ –заданные действительные положительные числа, удовлетворяющие условию разрешимости задачи

$$\sum_{i=1}^{N} b_i \geq S \ , S = \int_{\Omega} \rho(x)\mathrm{dx} \cdot$$

Метод решения. Полученная задача является задачей бесконечномерного программирования с множественнозначной функцией стоимости и к ее решению возможно несколько подходов.

Очевидно, что говорить о минимизации в обычном понимании, в этой задаче не имеет смысла, поскольку значением функционала также будет не число, а некоторое множество чисел, поэтому нужно оговорить, что будем понимать под решением задачи.

Обозначим, согласно [1], $P(\Omega, N)$ – множество всех возможных разбиений задачи (1) – (4):

$$P(\Omega, N) = \{(\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_N, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N): \ mes(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0, \ i \neq j, \ i, j = \overline{1,N};$$

$$\bigcup_{i=1}^{N}\Omega_i = \Omega; \ \int_{\Omega_i} \rho(x)dx \leq b_i, \ i = \overline{1,N}\},$$

$R = (\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_N, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_N)$ – некоторое возможное разбиение множества Ω.

Учитывая ситуацию, решением задачи можно считать:

– совокупность $P^*(\Omega)$ возможных разбиений множества Ω, удовлетворяющих условиям:

$$P^*(\Omega)=\{R(\Omega)\mid \exists R',\ F(R(\Omega))\le F(R'(\Omega)) \text{ для всех } c_i^j(x,\tau_i)\in C$$
$$\text{и } F(R(\Omega))< F(R'(\Omega)) \text{ для } c_i^l(x,\tau_i)\in C\}.$$

Такое определение решения исходит из интерпретации задачи (1) – (4), как задачи многокритериальной оптимизации, и соответствует множеству Парето-оптимальных решений.

– разбиение множества Ω на подмножества, доставляющее оптимальное в некотором смысле значение функционалу (1).

Оптимальность будем понимать как достижение одного из эффективных решений многокритериальной задачи и (или) достижение функционалом некоторого значения, удовлетворяющего определенным требованиям и которое будет не хуже других решений с точки зрения предпочтений, индуцированных условиями задачи и требованиями ЛПР.

– некоторое нечеткое разбиение множества Ω на подмножества (определение нечеткого разбиения дано в [3]).

В данной работе будут рассмотрены подходы к решению задачи, обеспечивающие решение типа 2. А именно, под решением задачи оптимального разбиения с множественнозначной функцией стоимости будем понимать разбиение, которое доставляет оптимальное (в указанном выше смысле) значение целевому функционалу (1).

Учитывая, что функция стоимости $c_i(x,\tau_i)$, $i=\overline{1,N}$, для каждого фиксированного x и τ_i представляет собой некоторый набор значений, полученная задача может быть интерпретирована как задача многокритериальной оптимизации, множество критериев которой формируется как совокупность функционалов, полученных при подстановке в исходный функционал одного из возможных наборов функций стоимости либо как задача выбора (если предполагать, что среди всего множества функций стоимости актуальным будет лишь один представитель этого множества).

Один из подходов, применяемых к решению таких задач, состоит в сведении исходной задачи с множественнозначной целевой функцией к

обычной задаче математического программирования, путем преобразования исходного множества целевых функций в единственную компромиссную целевую функцию. Наиболее простым способом такого преобразования является выбор одного представителя из всего множества целевых функций. Очевидно, что методы выбора этого представителя различны, в зависимости от имеющейся исходной информации.

Прежде всего, заметим, что в условиях полной неопределенности, т. е. когда ЛПР ничего не известно о возможных предпочтениях на множестве стоимостей, то можно выбирать любое из этих значений, например:

– минимальное значение

$$c_i(x,\tau_i)=\min_{\theta_j} c_i^j(x,\tau_i), \qquad i=\overline{1,N},\ x\in\Omega\cdot \tag{5}$$

Такой выбор соответствует «оптимистической позиции», т.к. для расчета принимается минимальная цена;

– максимальное значение

$$c_i(x,\tau_i)=\max_{\theta_j} c_i^j(x,\tau_i), \qquad i=\overline{1,N},\ x\in\Omega\cdot \tag{6}$$

Такой выбор соответствует «пессимистической позиции», поскольку ожидаемой считается максимальная цена для всех пунктов производства;

– любое (случайное) из возможных значений стоимости.

Однако такой подход имеет существенный недостаток. Выбирая одно из возможных значений функции стоимости, мы, тем самым отказываемся от всех других значений, т. е. не учитывается множественность исходных данных.

Предположим, что ЛПР обладает некоторой информацией о возможных состояниях среды и соответствующих им функциях стоимости:

состояние среды	функциястоимости			
θ_1	$c_1^1(x,\tau_i)$	$c_2^1(x,\tau_i)$	…	$c_N^1(x,\tau_i)$
θ_2	$c_1^2(x,\tau_i)$	$c_2^2(x,\tau_i)$	…	$c_N^2(x,\tau_i)$
…	…	…	…	…
θ_M	$c_1^M(x,\tau_i)$	$c_2^M(x,\tau_i)$	⋯	$c_N^M(x,\tau_i)$

Тогда, в какой-то мере учесть все множество функций стоимости позволяет выбор компромиссной функции на основе принципа недостаточного основания, который состоит в том, что если нет основания считать какое-либо состояние среды более вероятным, чем любое другое состояние среды, то их априорные вероятности нужно считать равными. Т. е. в качестве компромиссной функции выбирается среднее арифметическое всех возможных функций

$$c_i(x,\tau_i)=\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}c_i^j(x,\tau_i),\qquad i=\overline{1,N},x\in\Omega\ . \tag{7}$$

Другой вариант выбора в этой ситуации – выбор компромиссной функции в соответствии с критерием Гурвица:

$$c_i(x,\tau_i)=\alpha_i \min_{\theta j} c_i^j(x,\tau_i)+(1-\alpha_i)\max_{\theta j} c_i^j(x,\tau_i),\quad 0\le\alpha_i\le 1,\ \ i=\overline{1,N},x\in\Omega\cdot \tag{8}$$

Коэффициенты $\alpha_i,\ i=\overline{1,N}$ позволяют учитывать уровень оптимизма-пессимизма, в соответствии с убежденностью ЛПР.

Если ЛПР обладает информацией относительно вероятностей ситуаций принятия решений, то возможно использовать подход, основанный на критериях первой информационной ситуации. А именно:

– выбор в качестве возможной функции стоимости ее математического ожидания

$$c_i(x,\tau_i)=\sum_{j=1}^{M}p_j c_i^j(x,\tau_i),\qquad i=\overline{1,N},\ x\in\Omega, \tag{9}$$

– выбор значения, соответствующего наиболее вероятному состоянию среды

$$c_i(x,\tau_i)=c_i^{j^*}(x,\tau_i),\ \text{где}\ p_{j^*}=\max_{\theta_j} p_j\quad i=\overline{1,N},\ x\in\Omega\cdot \qquad (10)$$

Возможно использования и других критериев [4].

В частности, если ЛПР не известны априорные вероятности состояний среды, но известно отношение порядка, заданное на этих состояниях, возможно использование критериев третьей информационной ситуации [4], в частности, оценок Фишборна.

После того, как выбраны компромиссные функции стоимости, исходная задача бесконечномерного математического программирования с множественнозначной функцией стоимости преобразуется в стандартную задачу ОРМ, для которой имеются хорошо разработанные методы и алгоритмы решения [1].

Сформулируем алгоритм решения задачи (1) – (4).

1. Учитывая имеющуюся информацию относительно ситуации принятия решения выбираем один из критериев (5) – (10).
2. Используя выбранный критерий преобразуем исходное множество целевых функций в единственную компромиссную функцию. Тем самым исходная множественнозначная задача сводится к обычной задаче ОРМ.
3. Решаем полученную задачу оптимального разбиения множеств, используя метод ОРМ, описаный в [1].

Модельная задача и анализ полученых результатов. Потребитель некоторой однородной продукции, производимой тремя предприятиями, непрерывно распределен в области $\Omega=\{(x,y)\in R^2 \mid 0\le x\le 10,\ 0\le y\le 10\}$. Заданы начальные координаты расположения предприятий $\tau_i=(\tau_i^x,\tau_i^y)=(0,0),\ i=1,2,3$. Известен спрос $\rho(x,y)$ на продукцию в каждой точке (x,y) области Ω, для простоты полагаем $\rho(x,y)=1$ для всех $(x,y)\in\Omega$; а также множество возможных значений стоимости доставки продукции $c_i(x,\tau_i)=\{c_i^1(x,\tau_i); c_i^2(x,\tau_i);\dots c_i^{M_i}(x,\tau_i)\}$,

$i=\overline{1,3}$– из пункта производства τ_i в пункт потребления x, в зависимости от состояния среды θ_j, $j=1,5$:

$$c_i^j(x,\tau_i)=\gamma_i^j\sqrt{\alpha_i^j\left(x-\tau_i^x\right)^2+\beta_i^j\left(y-\tau_i^y\right)^2}\ .$$

Состояние среды	функция стоимости доставки								
	предприятие 1			предприятие 2			предприятие 3		
	α_1^j	β_1^j	γ_1^j	α_2^j	β_2^j	γ_2^j	α_3^j	β_3^j	γ_3^j
θ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
θ_2	0,5	1	1	1	1	2	1	1	2
θ_3	1	1,5	2	0,5	0,5	0,5	1	1	1
θ_4	0,5	1	2	1,5	3	2	2	3	1
θ_5	1	1	1	2	2	1	1	1	4

Предполагается, что прибыль производителя зависит только от транспортных расходов.

Мощность i-го производителя определяется суммарным спросом обслуживаемых потребителей и не должна превышать заданных объемов b_i, $i=\overline{1,3}$: $b_1=25$, $b_2=60$, $b_3=50$. Необходимо разбить область Ω на зоны обслуживания каждым из производителей, т. е. на подмножества $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, так, чтобы суммарные затраты на доставку продукции были минимальны.

При использовании критерия Байеса (9) был получен следующий результат:

Координаты центров:

τ_1: (7.16, 2.03);

τ_2: (2.56, 5.16);

τ_3: (7.42, 7.52).

Оптимальные значения мощности производителей: 25.00; 47.50; 27.50.

Значение компромиссного целевого функционала: 485.99.

Оптимальное разбиение представлено на рис. 1.

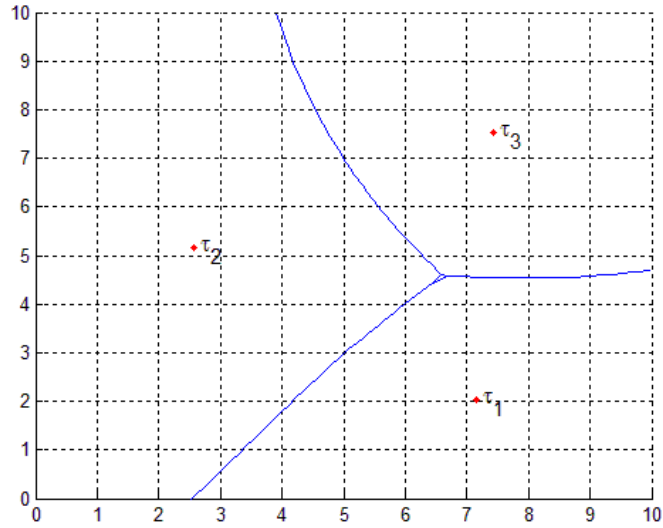


Рис.1. Оптимальное разбиение, полученное с использованием критерия Байеса

Используя критерий Гурвица с константой 0,7 были получены следующие результаты:

Координаты центров:

τ_1: (2.76, 2.15);

τ_2: (5.02, 7.14);

τ_3: (7.99, 2.22).

Оптимальные значения мощности производителей: 24.97; 56.67; 18.36.

Значение компромиссного целевого функционала: 402.90.

Оптимальное разбиение представлено на рис. 2.

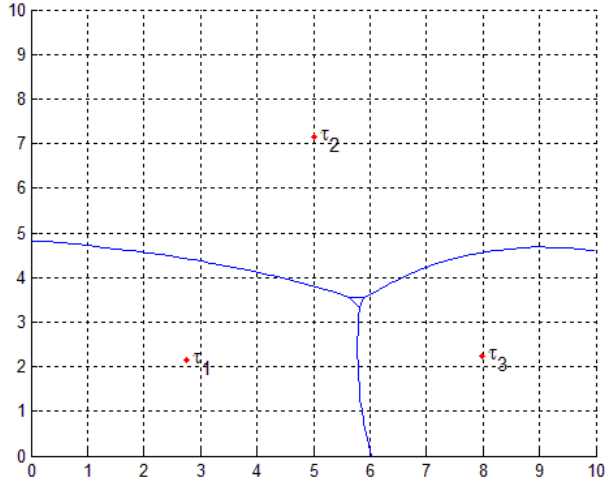


Рис. 2. Оптимальное разбиение, полученное при использовании критерия Гурвица с константой 0.7

Выводы. Использование различных критериев для перехода от множественнозначной задачи к скалярной, дает различные компромиссные функции стоимости и, соответственно, различные решения исходной задачи. Поэтому, следующей задачей является проверка эффективности полученных решений.

Обобщением рассмотренной задачи будут бесконечномерные задачи размещения в нечетких условиях. Некоторые математические модели таких задач были сформулированы в [5].

Библиографические ссылки

1. **Киселева Е.М.** Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: Монография / Е.М. Киселева, Н.З. Шор – К., 2005. – 564 с.

2. **Кісельова О.М.** Метод розв'язання задачі нечіткого розбиття множин / О.М. Кісельова, О.Ю.Лебідь// Питання прикладної математики і математичного моделювання: збірник наукових праць. – 2010. – С.139–145

3. **Кісельова О.М.** Методи розв'язання задач нечіткого розбиття множин із нечіткими параметрами у функціоналі / О.М. Кісельова, О.Ю.Лебідь// Питання прикладної математики і математичного моделювання: збірник наукових праць.– 2007. – С.115–123.

4. **Трухаев Р.И.** Модели принятия решений в условиях неопределенности / Р.И. Трухаев – М., 1981.

5. **Ус С.А.** О моделях оптимального разбиения множеств в условиях неопределенности / С.А. Ус // Питання прикладної математики і математичного моделювання: збірник наукових праць.– 2010, – С. 320–326.

Надійшла до редколегії 15.05.11