УДК 519.8

И.В. Козин
Запорожский национальный университет

МЕРЫ СИММЕТРИИ И ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

Розглядається проблема оцінювання ступеня симетрії множини. Показано, що у простіших випадках задача відшукання множин з мінімальною або максимальною мірою симетрії зводиться до задачі цілочисельного лінійного програмування.Запропоновано найпростіші методи пошуку розв'язків задач о симетричних підмножинах.

Рассматривается проблема оценивания степени симметрии множества. Показано, что в простейших случаях задача отыскания множеств с минимальной или максимальной мерой симметрии сводится к задаче целочисленного линейного программирования. Предложены простейшие методы поиска решений задач о симметричных подмножествах.

The problem of estimation of set symmetry is considered. It was shown that in the simplest cases the problem of finding the sets with minimal or maximal measure of symmetry reduces to the integer linear programming problem. The simplest methods of finding solutions of symmetry subsets problems are proposed.

Ключевые слова: множество, симметрия, орбита, мера симметрии.

Введение. В ряде задач принятия решений приходится сталкиваться с неформальными критериями. Достаточно часто ЛПР, наряду с обычными числовыми критериями, накладывает на принимаемое решение еще неформальные ограничения, которые описываются словами «красивое», «симметричное», и т.д. С таким подходом часто приходится сталкиваться в прикладных задачах размещения, задачах покрытия. Иногда критерии симметрии очень тесно связаны с оптимальным решением задачи. Достаточно вспомнить такие классические оптимизационные задачи, как изопериметрическая задача, задача о теле максимального объема при заданной площади поверхности. В книге Саати [1] присутствует замечательное выражение «оптимизировать – значит симметризировать». То, что неформально принято считать «красивым» решением, означает инвариантность решения относительно той или иной группы симметрии. Таким образом, решение задачи по критерию «красоты» сводится к

© *И.В. Козин, 2011*

отысканию решения, инвариантного относительно действия той или иной группы преобразований.

Условие инвариантности относительно той или иной группы симметрии может значительно упростить поиск оптимального решения [2]. Однако, как правило, идет речь не о «строгой» симметрии, а об определенном приближении к симметричному решению, поиски своеобразного компромисса между оптимумом и симметричностью решения. В этом случае задача может значительно усложниться и потребовать разработки принципиально новых методик и алгоритмов.

Постановка проблемы. Рассмотрим конечное множество X. Преобразованием множества X называется любое взаимнооднозначное отображение $F: X \to X$ этого множества на себя. Группа S всех преобразований множества X изоморфна симметрической группе подстановок S_n, где n – число элементов множества X. Всякую подгруппу A группы S будем называть группой симметрий множества X.

Определение 1. Для любого элемента $x \in X$, орбитой этого элемента при действии группы симметрии S называется множество $O_A(x) = \{y : y = g(x), g \in A\}$. Орбитой подмножества $Y \subseteq X$ будем называть объединение орбит всех его элементов и обозначать $O_A(Y)$. Имеет место очевидное утверждение

Теорема 1. Орбиты любых двух элементов множества X либо не пересекаются, либо совпадают.

Кроме того, справедлива следующая

Теорема 2. Для любого подмножества $Y \subseteq X$ и для любой группы симметрии $A \subseteq S$ имеет место включение $Y \subseteq O_S(Y)$.

Доказательство. Тождественной отображение является элементом любой группы симметрии. Отсюда вытекает утверждение теоремы. ■ [1)]

Подмножество $Y \subseteq X$ называется инвариантным (или вполне симметричным) относительно действия группы $A \subseteq S$, если $\forall g \in A,\ g(Y) = Y$.

Отметим очевидное определяющее свойство инвариантных множеств. Множество $Y \subseteq X$ инвариантно относительно действия группы A в том и

только в том случае, когда оно совпадает со своей орбитой, то есть $Y = O_A(Y)$.

Если подмножество не является вполне симметричным, то возникает вопрос: каким образом можно оценить его отклонение от симметрии. Другими словами, какова мера симметрии произвольного подмножества множества *X*.

Меры симметрии подмножеств. *Определение 2*. Внешней *мерой симметрии* $\mu_A(Y)$ непустого подмножества $Y \subseteq X$, будем называать отношение числа элементов этого множества к числу элементов его орбиты, то есть $\mu_A(Y) = \dfrac{|Y|}{|O_A(Y)|}$. Для пустого подмножества будем полагать по определению $\mu_A(\varnothing) = 1$.

Очевидно, что для любого подмножества $Y \subseteq X$ справедливо неравенство $\dfrac{|Y|}{|X|} \le \mu_A(Y) \le 1$. Инвариантные относительно действия группы симметрии *A* множества – это множества с максимальной мерой симметрии, то есть множества, для которых $\mu_A(Y) = 1$.

)Здесь и далее знаком ■ будет обозначаться конец доказательства

Определение 3. Вполне асимметричным по отношению к группе симметрии *A* будем называть такое подмножество $Y \subseteq X$, каждый элемент $y \in Y$ которого обладает следующим свойством: $Y \cap O_A(y) = \{y\}$. То есть для любого элемента $y \in Y$ и любого преобразования $g \in A$, отличного от тождественного, $g(y) \notin Y$.

Определение 4. Будем называть *ядром симметрии* или S_A-ядром множества *Y* любое его максимальное по включению вполне асимметричное подмножество.

Теорема 3. Пусть *Y* – произвольное подмножество множества *X*, *A*– подгруппа *S*. Мощности всех S_A-ядер множества *Y* одинаковы.

Доказательство. Так как орбиты любых двух элементов множества *X* или не пересекаются, или совпадают, то множество *X* оказывается разбитым на классы эквивалентности. Два элемента эквивалентны (принадлежат одному классу) в том и только в том случае, когда один из них может быть получен из другого с помощью преобразования из группы *A*. Ядро симметрии содержит ровно по одному элементу из каждого класса эквивалентности. Следовательно, его мощность равна количеству классов эквивалентности. ■

Возможны и другие способы описания меры симметрии. Естественное требование к мере симметрии – следующее. Для инвариантных относительно действия группы *S* подмножеств мера симметрии должна быть максимальной.

Пусть на конечном множестве *X* действует группа преобразований *A*. Для каждого подмножества $Y \subseteq X$ определим множество инвариантных элементов следующим образом:

$$I_A(Y) = \{x \in Y \mid \forall g \in A \;\; g \cdot x \in Y\}$$

Определение 5. *В*нутренней мерой симметрии непустого подмножества $Y \subseteq X$ относительно действия группы *A* будем называть число

$$\nu_A(Y) = \frac{|I_A(Y)|}{|Y|}$$

Для пустого множества по определению будем полагать $\nu_A(\varnothing) = 1$.

Для любого подмножества $Y \subseteq X$ очевидны следующие неравенства:

$$0 \le \nu_A(Y) \le 1,$$

Причем, для инвариантных относительно действия группы *A* подмножеств мера симметрии равна 1. Очевидна следующая

Теорема 4. Непустое подмножество $Y \subseteq X$ является вполне антисимметричным относительно нетривиальной группы преобразований в том и только в том случае, когда его внутренняя мера симметрии равна 0.

Простейшие экстремальные задачи о симметричных подмножествах

Простейшая оптимизационная задача с критерием симметрии формулируется следующим образом: для заданного множества X и его группы симметрии A найти множество заданной мощности m с максимальной внешней мерой симметрии.

Как уже отмечалось ранее, множество X разбивается на попарно непересекающиеся классы, каждый из которых представляет собой орбиту некоторого элемента из X. Перенумеруем эти классы и далее будем полагать $X=O_1 \cup O_2 \cup \ldots \cup O_s$. Для каждого класса определим величину $k_i = |O_i|, \ i = 1,2,\ldots,s$ - мощность этого класса. С каждым множеством $Y \subseteq X$ свяжем бинарный вектор $y=(y_1,y_2,\ldots,y_s)$, где

$$y_i = \begin{cases} 1, \text{ если } O_i \subseteq O_A(Y) \\ 0, \text{ если } O_i \not\subset O_A(Y) \end{cases}.$$

При заданном значении m задача отыскания множества Y мощности m с максимальной внешней мерой симметрии сводится к решению следующей оптимизационной задачи:

$$\begin{aligned} & k_1 \cdot y_1 + k_2 \cdot y_2 + \ldots + k_s \cdot y_s \to \min \\ & k_1 \cdot y_1 + k_2 \cdot y_2 + \ldots + k_s \cdot y_s \geq m, \\ & y_i \in \{0,1\}, i = 1,2,\ldots,s \end{aligned} \qquad (1)$$

Задача (1) является частным случаем классической задачи о ранце [3,4]. Как следствие получаем, что задача о максимальном симметричном подмножестве *NP*-полна.

Быстрый эвристический алгоритм решения этой задачи выглядит следующим образом. Упорядочиваем и перенумеровываем числа k_i, $i=1,2,\ldots,s$ по возрастанию и выбираем минимальный номер t, для которого $k_1+k_2+\ldots+k_t \geq m$. В качестве решения берем множество

$Y = O_1 \cup O_2 \cup ... \cup O_{t-1} \cup B$, где множество $B \subseteq O_t$ и содержит произвольные $m-(k_1+k_2+...+k_{t-1})$ элементов множества O_t.

Следующая задача – задача отыскания подмножества заданной мощности m с минимальной внешней мерой симметрии имеет полиномиальную трудоемкость. Алгоритм поиска оптимального решения задачи следующий:

Если $m \geq s$, то выбираем по одному элементу из каждого из s классов эквивалентности, а остальные $m-s$ выбираются произвольно. Мера симметрии полученного множества из m элементов будет равна $\frac{m}{n}$. Если $m<s$, то упорядочим классы $O_1,O_2,...,O_s$ по убыванию их мощности. Выберем по одному элементу из первых m классов. Это и будет требуемое решение с минимальной мерой симметрии.

Для внутренней меры симметрии рассмотрим простейшую оптимизационную задачу с критерием симметрии: для заданного множества X и его группы симметрии A найти подмножество $Y \subseteq X$ заданной мощности m с максимальной мерой симметрии $\nu_A(Y)$.

Как и прежде разобьем множество X на классы $\{O_i\}_{i=1}^{s}$, каждый из которых представляет собой орбиту некоторого элемента из X. Перенумеруем эти классы и будем полагать $X=O_1 \cup O_2 \cup ... \cup O_s$. Для каждого класса определим величину $k_i = |O_i|$ - мощность этого класса. С каждым множеством $Y \subseteq X$ свяжем бинарный вектор $y=(y_1,y_2,...,y_s)$, где

$$y_i = \begin{cases} 1, \text{ если } O_i \subseteq O_A(Y) \\ 0, \text{ если } O_i \not\subset O_A(Y) \end{cases}.$$

При заданном значении m задача отыскания множества Y мощности m с максимальной внутренней мерой симметрии сводится к решению следующей оптимизационной задачи:

$$\begin{aligned} &k_1 \cdot y_1 + k_2 \cdot y_2 + \ldots + k_s \cdot y_s \to \max \\ &k_1 \cdot y_1 + k_2 \cdot y_2 + \ldots + k_s \cdot y_s \le m, \\ &y_i \in \{0,1\}, i = 1,2,\ldots,s \end{aligned} \qquad (2)$$

Эта задача относится к числу *NP* – полных задач.

Заключение. В работе показано, что задачи, связанные с определением меры симметрии в простейших случаях могут быть сведены к известным оптимизационным задачам. Даже в простейших случаях задачи такого вида могут иметь достаточно высокую трудоемкость. Более сложные задачи появляются, когда на множестве *X* задана структура, определенная некоторым отношением [5]. Задача поиска симметричных подмножеств в этом случае состоит в отыскании максимально симметричных (или асимметричных) подмножеств, на которых сохранена заданная структура.

Библиографические ссылки

1. **Саати Т.** Принятие решений. Метод анализа иерархий / Т. Саати. - М. : Радио и связь, 1993. - 278 с.
2. **Миллер У.** Симметрия и разделение переменных / У. Миллер. - М. : Мир, 1981. - 342 с.
3. **Сачков В. Н.** Введение в комбинаторные методы дискретной математики / В. Н. Сачков. - М. : Наука, 1982. - 384 с.
4. **Сигал И. Ч.** Введение в прикладное дискретное программирование / И. Ч. Сигал, А. П. Иванова. - М. : Физматлит, 2002. - 240 с.
5. **И. В. Козин.** Фрагментарный алгоритм для задачи симметричного размещения. // Радиоэлектроника, информатика, управление, №1, 2005. С.76-83.

Надійшла до редколегії 15.06.11