УДК 517.9 doi: 10.15421/321707

В.Г. Городецкий, Н.П.Осадчук
Национальный технический университет Украины "КПИ им. Игоря Сикорского"

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ СИСТЕМ ОДНОГО КЛАССА

В качестве объекта исследования рассматривалась система обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальными правыми частями. Рассмотрен частный случай обратной задачи, а именно – реконструкция системы по временному ряду одной из ее переменных. Предложен метод поиска систем, альтернативных известной модели.

В якості об'єкту дослідження розглядалася система звичайних диференціальних рівнянь з поліноміальними правими частинами. Розглянуто окремий випадок оберненої задачі, а саме - реконструкція системи за відомим часовим рядом однієї з її змінних. Запропоновано метод пошуку систем, альтернативних до відомої моделі.

A system of ordinary differential equations with polynomial right-hand sides was considered as the object of the study. The method of solving a special case of the inverse problem was developed. Namely, the reconstruction of the system by use of time series of one of its variables was considered. A method of searching systems that are different from known model is also proposed.

Ключевые слова: временной ряд, дифференциальные уравнения, реконструкция, оригинальная система, стандартная система.

Введение. Построение математической модели – одна из основных задач любого научного исследования. Ее решение зависит от полноты информации об исследуемом объекте или процессе. Если такой информации недостаточно, выбранная модель может неадекватно отражать физику процесса. Одним из методов моделирования, которые применяются в таких случаях, является решение обратной задачи [1]. Если прямой метод предполагает построение уравнений модели на основании информации об объекте исследования с последующим сравнением решений этих уравнений с экспериментальными данными о функционировании объекта, то решение обратной задачи предполагает получение характеристик модели на основе экспериментальных данных. Часто эффективным является сочетание этих двух методов, когда модель, полученная прямым методом, может быть улучшена с помощью решения обратной задачи. Примером такого подхода может служить данное исследование.

Постановка задачи. В качестве объекта исследования использовалась система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) вида

© Городецкий В.Г., Осадчук Н.П., 2017

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = P_1(x_1, x_2, ..., x_n), \\ \dot{x}_2 = P_2(x_1, x_2, ..., x_n), \\ ... \\ \dot{x}_n = P_n(x_1, x_2, ..., x_n), \end{cases} \quad (1)$$

где $P_1, P_2, ..., P_n$ - полиномы. Решением системы (1) являются функции времени $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$. Систему (1) будем называть оригинальной системой (ОС).

Рассмотрим типовую задачу реконструкции модели, особенно актуальную для систем с детерминированным хаосом [2]. Требуется, имея в качестве известных данных об ОС только, например, функцию $x_1(t)$, реконструировать исходную ОС, то есть получить ее математическую модель вида (1). Переменную x_1 будем называть наблюдаемой.

Если первоначально известна некоторая ОС вида (1), то можно дополнить задачу, предложив найти некоторые альтернативные модели такого же вида, но, например, более простые, чем известная ОС. Более простыми будем считать системы с меньшим суммарным числом ненулевых коэффициентов в правых частях уравнений (1).

Метод решения. Предлагаемый для решения этой задачи подход базируется на понятии стандартной системы (СС), предложенном в [3]. СС – это система вида

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \dots \\ \dot{y}_n = F\left(y_1, y_2, \dots, y_n\right), \end{cases} \quad (2)$$

где $y_1(t) \equiv x_1(t)$, функция F - полином или дробно-рациональная функция. Будем называть ее стандартной функцией (СФ).

Для решения задачи реконструкции на первом этапе из временного ряда наблюдаемой известным численным методом [3] определяется вид функции СФ. Затем, используя аналитические соотношения, связывающие коэффициенты ОС и СС, получаются системы-кандидаты [4] вида (1), имеющие решение $x_1(t)$. Такой подход базируется на очевидном утверждении, сформулированном в [5], согласно которому ОС, имеющие одинаковые наблюдаемые, должны иметь одинаковые СС. Это утверждение, в сочетании с аналитическими соотношениями, позволяет менять структуру ОС (общий вид уравнений) и значения коэффициентов ОС так, чтобы коэффициенты СС оставались неизменными. Так как единственными данными о неизвестной ОС есть только скалярный временной ряд и число возможных систем-кандидатов может быть большим, то предлагается, согласно рекомендациям [6], ограничиться поиском минимальных систем-кандидатов, то есть систем с наименьшим

числом коэффициентов полиномов в правых частях уравнений, но обеспечивающие при этом воспроизведение наблюдаемой $x_1(t)$.

Реконструкция модели нейрона. Рассмотрим предлагаемый подход для реконструкции модели активности нейрона Hindmarsh-Rose [7], которая имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_0 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_1^{\,2} + a_{10} x_1^{\,3}, \\ \dot{x}_2 = b_0 + b_2 x_2 + b_4 x_1^{\,2}, \\ \dot{x}_3 = c_0 + c_1 x_1 + c_3 x_3, \end{cases} \tag{3}$$

где $a_0 = 3.0$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$, $a_4 = 3.0$, $a_{10} = -1$, $b_0 = 1$, $b_2 = -1$, $b_4 = -5$, $c_0 = 0.096$, $c_1 = 0.06$, $c_3 = -0.015$.

В качестве наблюдаемой переменной в (3) была принята x_1. Было выполнено интегрирование (3) методом Рунге-Кутта 4 порядка в течении 500 с с шагом дискретизации 0.025 с. Временные зависимости и фазовые портреты системы (3) представлены на рис. 1. В качестве исходных данных для дальнейшей реконструкции был использован временной ряд $x_1(t)$.

Рассмотрим вначале упрощенную задачу реконструкции. Будем считать, что общий вид уравнений (3) известен, а неизвестны только значения коэффициентов. Необходимо, используя только временной ряд $x_1(t)$, определить числовые значения коэффициентов системы (3). Используя предложенный в [3] аналитический метод перехода от ОС к СС, можно получить СС, которая соответствует ОС (3):

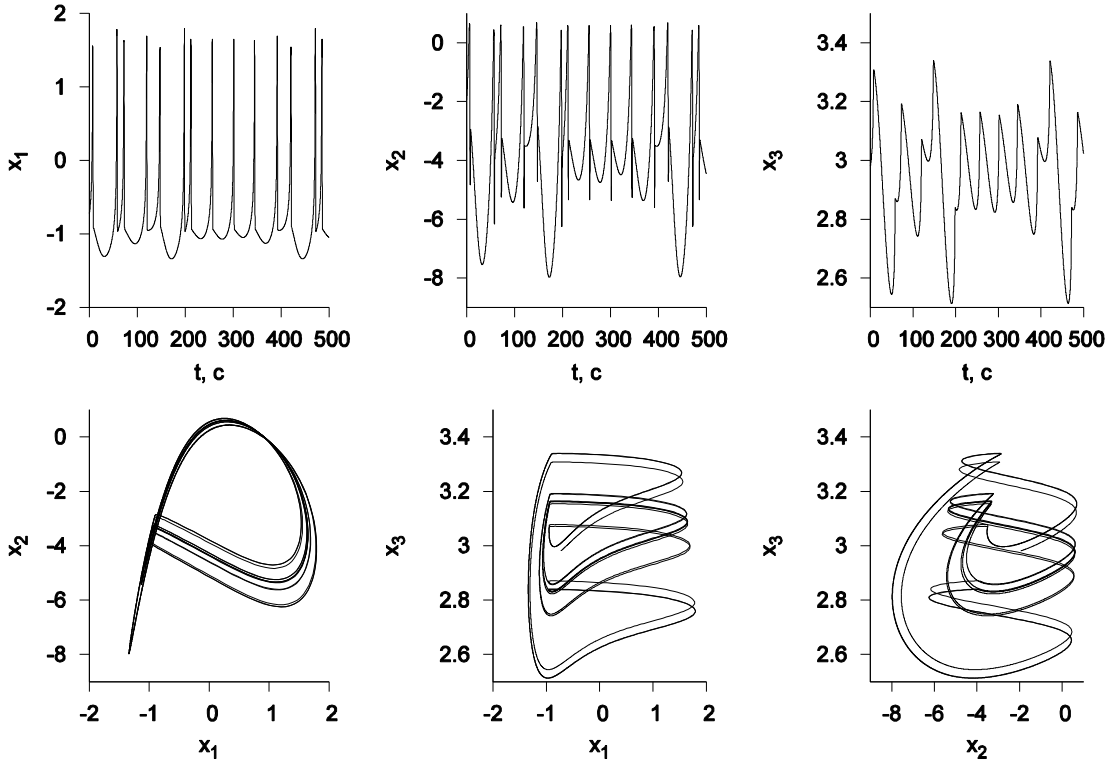


Рис. 1. Временные зависимости и фазовые портреты системы (3).

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \dot{y}_3 = N_0 + N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_1^2 + N_5 y_1 y_2 + \\ + N_6 y_1 y_3 + N_7 y_2^2 + N_{10} y_1^3 + N_{11} y_1^2 y_2 + N_{12} y_1^2 y_3 + N_{13} y_1 y_2^2, \end{cases} \tag{4}$$

Соотношения между коэффициентами ОС (3) и СС (4) имеют вид

$$\begin{cases} N_0 = \left(a_0 b_2 - a_2 b_0\right) c_3 - a_3 b_2 c_0, \\ N_1 = -a_3 b_2 c_1, \\ N_2 = a_3 c_1 - b_2 c_3, \\ N_3 = c_3 + b_2, \\ N_4 = \left(a_4 b_2 - a_2 b_4\right) c_3, \\ N_5 = -2\left(a_4 c_3 - a_2 b_4 + a_4 b_2\right), \\ N_6 = 2a_4, \\ N_7 = 2a_4, \\ N_{10} = a_{10} b_2 c_3, \\ N_{11} = -3a_{10}\left(c_3 + b_2\right), \\ N_{12} = 3a_{10}, \\ N_{13} = 6a_{10}. \end{cases}$$

Используя численный метод, предложенный в [3], были получены числовые значения коэффициентов СС (4). Для сравнения были вычислены аналитические значения коэффициентов СС (4) с помощью (5) и числовых значений коэффициентов (3). Результаты приведены в табл. 1.

Таблица 1.

Значения коэффициентов СС (4)

Коэффициент	Численное значение	Аналитическое значение
1	2	3
N_0	-0.036417288	-0.036
N_1	-0.060969966	-0.06
N_2	-0.070909394	-0.075
N_3	-1.0230695	-1.015
N_4	-0.030750357	-0.03
N_5	-3.9162872	-3.91

Закінчення таблиці

1	2	3
N_6	6.02668	6
N_7	6.0323026	6
N_{10}	-0.015229789	-0.015
N_{11}	-3.0525425	-3.045
N_{12}	-3.0015992	-3
N_{13}	-6.0117959	-6

Можно видеть, что значения коэффициентов СС, полученные аналитическим и численным методами, близки. Поэтому в дальнейшем будем использовать аналитические значения. Далее, из (5) можно выразить коэффициенты ОС через коэффициенты СС:

$$\begin{aligned} a_{10} &= \frac{N_{12}}{3}, \\ a_4 &= \frac{N_6}{2}, \\ b_2 &= -\frac{a_{10}N_1}{a_{10}N_2 + N_{10}}, \\ c_3 &= N_3 - b_2, \\ a_2 b_4 &= \frac{N_5 + N_3 N_6}{2}, \\ a_3 c_1 &= -\frac{N_1}{b_2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Коэффициенты ОС a_0, b_0, c_0 входят только в выражение для коэффициента СС N_0, и для выполнения условия $N_0 \neq 0$ достаточно, чтобы только один из трех коэффициентов ОС был не равен нулю, а остальные два были равны нулю. То есть, возможны три варианта:

$$\begin{aligned} b_0 = c_0 = 0, \quad a_0 &= \frac{N_0}{b_2 c_3}, \\ a_0 = c_0 = 0, \quad b_0 &= \frac{N_0}{a_2 c_3}, \\ a_0 = b_0 = 0, \quad c_0 &= \frac{N_0}{a_3 b_2}. \end{aligned} \tag{7}$$

Таким образом, в результате реконструкции были получены три ОС, содержащие по 9 ненулевых коэффициентов в правых частях уравнений. Все ОС содержат коэффициенты a_2, a_3, a_4, a_{10}, b_2, b_4, c_1, c_3 и один из коэффициентов a_0, b_0, c_0. Поскольку всем трем системам соответствует одна и та же СС (4) со значениями коэффициентов из табл. 1, то все три ОС способны воспроизвести исследуемый временной ряд. При этом удалось однозначно определить числовые значения коэффициентов ОС a_0, a_4, a_{10}, b_0, b_2, c_0, c_3. Также были определены произведения коэффициентов ОС a_2b_4, a_3c_1. Если принять известным один из коэффициентов пары, то можно определить значение второго. При этом невозможно однозначно определить все значения коэффициентов ОС, используя только один временной ряд [8].

Альтернативные модели активности нейрона. С практической точки зрения, поиск альтернативных систем, которые отличаются по структуре от исследуемой системы, интересен тем, что разным структурам ОС могут соответствовать разные механизмы протекания исследуемого процесса. То есть, альтернативные системы способны не только воспроизвести временной ряд, но и могут быть полезны для понимания физики процессов в системе. Поэтому целесообразно выполнить поиск систем ОДУ, которые способны воспроизвести исследуемый временной ряд, но не ограничиваться частными случаями системы (3), полученными выше. Поскольку для исследования доступен только один временной ряд и дополнительная информация об объекте отсутствует, то целесообразно искать наиболее простые модели, содержащие наименьшее количество ненулевых коэффициентов в правых частях уравнений.

Будем искать возможные ОС среди частных случаев системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_1^2 + a_5x_1x_2 + a_6x_1x_3 + a_{10}x_1^3 + a_{11}x_1^2x_2 + a_{12}x_1^2x_3, \\ \dot{x}_2 = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_1^2 + b_5x_1x_2 + b_6x_1x_3 + b_{10}x_1^3 + b_{11}x_1^2x_2 + b_{12}x_1^2x_3, \\ \dot{x}_3 = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_1^2 + c_5x_1x_2 + c_6x_1x_3 + c_{10}x_1^3 + c_{11}x_1^2x_2 + c_{12}x_1^2x_3. \end{cases} \quad (8)$$

Как видно, система (8) содержит полиномы 3 степени в каждом уравнении, но не содержит произведений ненаблюдаемых переменных. Такое ограничение общего вида уравнений (8) является достаточным условием отсутствия радикалов в выражениях, связывающих коэффициенты ОС и СС. Системе (8) соответствует СС

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, \\ \dot{y}_2 = y_3, \\ \dot{y}_3 = \Big(N_0 + N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_1^2 + N_5 y_1 y_2 + N_6 y_1 y_3 + N_7 y_2^2 + N_8 y_2 y_3 + \\ + N_9 y_3^2 + N_{10} y_1^3 + N_{11} y_1^2 y_2 + N_{12} y_1^2 y_3 + N_{13} y_1 y_2^2 + N_{14} y_1 y_2 y_3 + N_{15} y_1 y_3^2 + N_{16} y_2^3 + \\ + N_{17} y_2^2 y_3 + N_{20} y_1^4 + N_{21} y_1^3 y_2 + N_{22} y_1^2 y_3 + N_{23} y_1^2 y_2^2 + N_{24} y_1^2 y_2 y_3 + N_{25} y_1^2 y_3^2 + \\ + N_{26} y_1 y_2^3 + N_{27} y_1 y_2^2 y_3 + N_{30} y_2^4 + N_{31} y_1^5 + N_{32} y_1^4 y_2 + N_{33} y_1^4 y_3 + N_{34} y_1^6 + \\ + N_{35} y_1^3 y_2^2 + N_{36} y_1^5 y_2 + N_{37} y_1^2 y_2^3 + N_{38} y_1^7 + N_{39} y_1^5 y_3 + N_{40} y_1^3 y_2 y_3 + N_{41} y_1^4 y_2^2 + \\ + N_{42} y_1^6 y_2 + N_{43} y_1^8 + N_{44} y_1^9 + N_{45} y_1^{10} + N_{46} y_1^{11} + N_{47} y_1^{12} + N_{48} y_1^{13} + N_{49} y_1^4 y_2 y_3 + \\ + N_{50} y_1^5 y_2 y_3 + N_{51} y_1^7 y_2 + N_{52} y_1^7 y_3 + N_{53} y_1^8 y_2 + N_{54} y_1^8 y_3 + N_{55} y_1^9 y_2 + N_{56} y_1^{10} y_2 + \\ + N_{57} y_1^6 y_3 + N_{58} y_1^6 y_2^2 + N_{59} y_1^5 y_2^2 + N_{60} y_1^3 y_2^3 + N_{61} y_1^4 y_2^3 + N_{62} y_1^7 y_2^2 \Big) : \\ : \Big(D_0 + D_1 y_1 + D_2 y_2 + D_4 y_1^2 + D_5 y_1 y_2 + D_{10} y_1^3 + D_{11} y_1^2 y_2 + D_{20} y_1^4 + D_{31} y_1^5 + D_{34} y_1^6 \Big). \end{cases} \quad (9)$$

СФ в (9) имеет вид дробно-рациональной функции со сложными выражениями в числителе и знаменателе. Также сложными и объемными являются соотношения типа (5) между коэффициентами ОС (8) и СС (9). Поэтому вывод этих соотношений и их дальнейший анализ в данной статье выполнялся с использованием программы Maxima.

Для того, чтобы привести (9) к виду (4), необходимо в (8) обнулить часть коэффициентов. При выводе соотношений между коэффициентами ОС и СС оказалось, что выражения для коэффициентов знаменателя СФ в (9) гораздо проще, чем выражения для коэффициентов числителя. Поэтому целесообразно начинать анализ выражений с последующим обнулением коэффициентов ОС именно с коэффициентов знаменателя СФ. Например, выражения для некоторых коэффициентов приведены ниже:

$$D_0 = -a_2 a_3 c_3 + a_3^2 c_2 - a_2^2 b_3 + a_2 a_3 b_2, \quad (10)$$

$$D_2 = a_3 a_5 - a_2 a_6. \quad (11)$$

Согласно табл. 1, выражение СФ представляет собой полином. Следовательно, знаменатель дроби в СФ (9) есть величина постоянная, а значит, все коэффициенты знаменателя в СФ (9), кроме D_0, равны нулю. Так как $D_0 \neq 0$, то, согласно (10), необходимо, чтобы $a_2 \neq 0$ и/или $a_3 \neq 0$. Для полноты анализа необходимо рассмотреть эти три гипотезы.

Пусть вначале $a_2 \neq 0$, $a_3 = 0$. Тогда $D_0 = a_2^2 b_3$, следовательно, $b_3 \neq 0$. Согласно (11), если $a_3 = 0$, то $D_2 = -a_2 a_6$. Но, так как $D_2 = 0$ и $a_2 \neq 0$, то $a_6 = 0$. Далее анализ проводится аналогично. При этом каждый раз нулевые значения коэффициентов ОС подставляются в выражения для коэффициентов СС (9), и эти выражения заметно упрощаются.

Поскольку соотношения между коэффициентами ОС (8) и СС (9) слишком объемные, то в данной статье все аналитические выкладки опущены, а вме-

сто них приведены основные этапы анализа, показанные в виде диаграммы (рис. 2). На рис. 2 в прямоугольниках приведены коэффициенты СФ, выражения которых подвергались анализу, а рядом со стрелками – результаты этого анализа. На первых шагах анализа, когда невозможно сделать однозначный вывод из всех имеющихся соотношений, рассматриваются две взаимно исключающие гипотезы, что обозначено на диаграмме кругами. Ситуация, когда результаты анализа приводят к невозможности перехода между ОС и СС, обозначена символом «X». Как видно из рисунка, в результате анализа и упрощения первоначальной структуры ОС (8) с использованием гипотезы $a_2 \neq 0$, $a_3 = 0$, были получены системы (12) и (13). Гипотеза $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$ привела к системе (14), а гипотеза $a_2 = 0$ оказалась ошибочной, как показано на диаграмме.

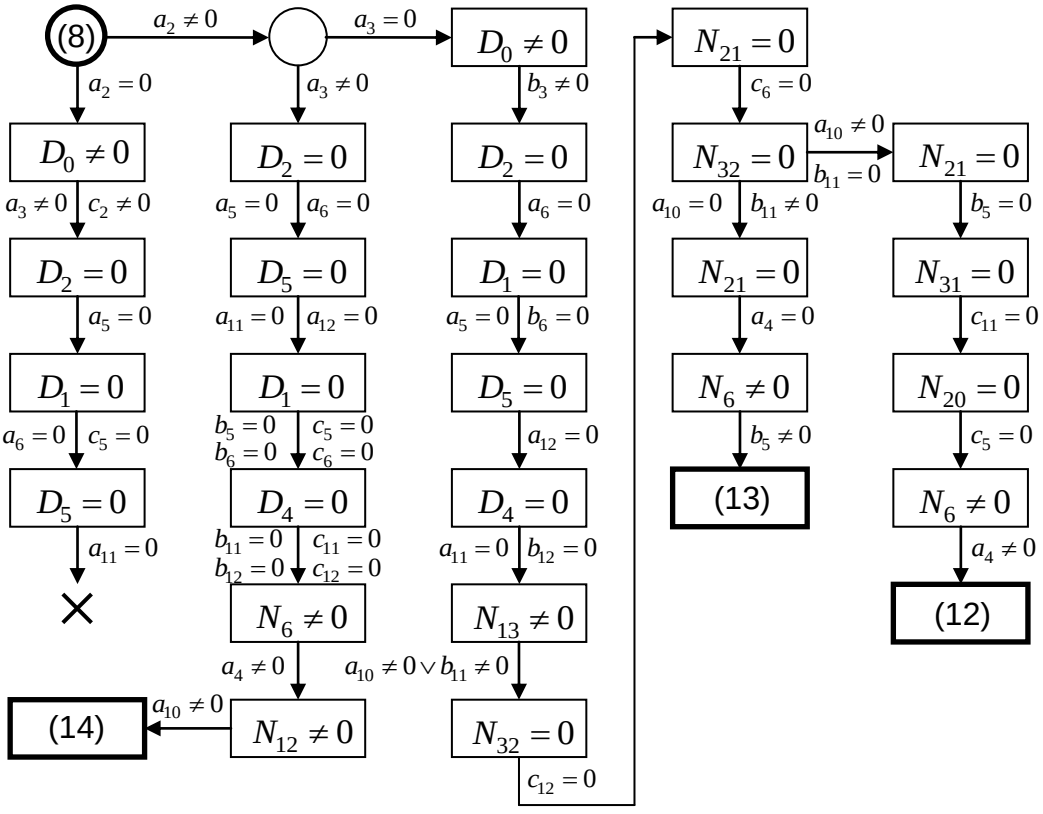


Рис. 2. Поиск частных случаев ОС (8), которым соответствует СС (4).

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_4 x_1^2 + a_{10} x_1^3, \\ \dot{x}_2 = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_1^2 + b_{10} x_1^3, \\ \dot{x}_3 = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_1^2 + c_{10} x_1^3, \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2, \\ \dot{x}_2 = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_1^2 + b_5 x_1 x_2 + b_{10} x_1^3 + b_{11} x_1^2 x_2, \\ \dot{x}_3 = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_1^2 + c_5 x_1 x_2 + c_{10} x_1^3 + c_{11} x_1^2 x_2, \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_1^2 + a_{10} x_1^3, \\ \dot{x}_2 = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_1^2 + b_{10} x_1^3, \\ \dot{x}_3 = c_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_1^2 + c_{10} x_1^3. \end{cases} \tag{14}$$

Как видно, все приведенные системы более сложные, чем исходная система (3). Поэтому они нуждаются в дальнейшем упрощении. Например, для ОС (12) СС имеет вид, совпадающий с (4), но при этом выражения, связывающие коэффициенты ОС и СС, более сложные:

$$\begin{cases} N_0 = \left(c_0 a_2 - a_0 c_2\right) b_3 - b_0 c_3 a_2 + a_0 b_2 c_3, \\ N_1 = \left(c_1 a_2 - a_1 c_2\right) b_3 - b_1 c_3 a_2 + a_1 b_2 c_3, \\ N_2 = c_2 b_3 + b_1 a_2 - \left(b_1 + a_1\right) c_3 - a_1 b_2, \\ N_3 = c_3 + b_2 + a_1, \\ N_4 = \left(c_4 a_2 - a_4 c_2\right) b_3 + b_2 c_3 a_4 - a_2 b_4 c_3, \\ N_5 = -2 a_4 \left(c_3 + b_2\right) + 2 b_4 a_2, \\ N_6 = 2 a_4, \\ N_7 = 2 a_4, \\ N_{10} = \left(c_{10} a_2 - a_{10} c_2\right) b_3 - b_{10} c_3 a_2 + a_{10} b_2 c_3, \\ N_{11} = 3 b_{10} a_2 - 3 a_{10} \left(c_3 + b_2\right), \\ N_{12} = 3 a_{10}, \\ N_{13} = 6 a_{10}. \end{cases} \tag{15}$$

Как видно, на данном этапе можно найти значения некоторых коэффициентов ОС. Например, из (15) и табл. 1 следует:

$$a_4 = \frac{N_6}{2} = 3, \tag{16}$$

$$a_{10} = \frac{N_{12}}{3} = -1. \tag{17}$$

Кроме того, в табл. 1 замечаем, что

$$N_{11} = 3 N_3. \tag{18}$$

Подставим в (18) выражения N_{11} и N_3 из (15) и $a_{10} = -1$ (согласно (17)), откуда после преобразований получим $a_2 b_{10} - a_1 = 0$. Так как мы ищем только системы с наименьшим числом ненулевых коэффициентов, то для выполнения указанного соотношения с учетом $a_2 \neq 0$ из рис. 2. следует принять $a_1 = b_{10} = 0$.

Приведенный выше прием анализа показывает, что на данном этапе упрощение уравнений требует более сложных преобразований и учета большего количества факторов. Тем не менее, проведенный по такой методике анализ системы общего вида (12) показал, что существует 21 система-кандидат, из которых 18 систем содержат 11 ненулевых коэффициентов в правых частях уравнений, а 3 системы – 10 коэффициентов. Одной из ОС с 10 коэффициентами является, например, система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_0 + a_2 x_2 + a_4 x_1^2 + a_{10} x_1^3, \\ \dot{x}_2 = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_1^2, \\ \dot{x}_3 = c_3 x_3 + c_4 x_1^2. \end{cases} \tag{19}$$

Часть значений коэффициентов ОС (19) удалось определить однозначно, остальные представлены в виде соотношений: $a_0 = -2.4$, $a_4 = 3$, $a_{10} = -1$, $b_2 = -0.015$, $c_3 = -1$, $a_2 b_1 = -0.06$, $a_2 b_4 = -5$, $a_2 b_3 c_4 = 4.925$. Временные зависимости и фазовые портреты системы (19) показаны на рис. 3. При построении графиков были приняты значения коэффициентов $a_2 = b_3 = 1$.

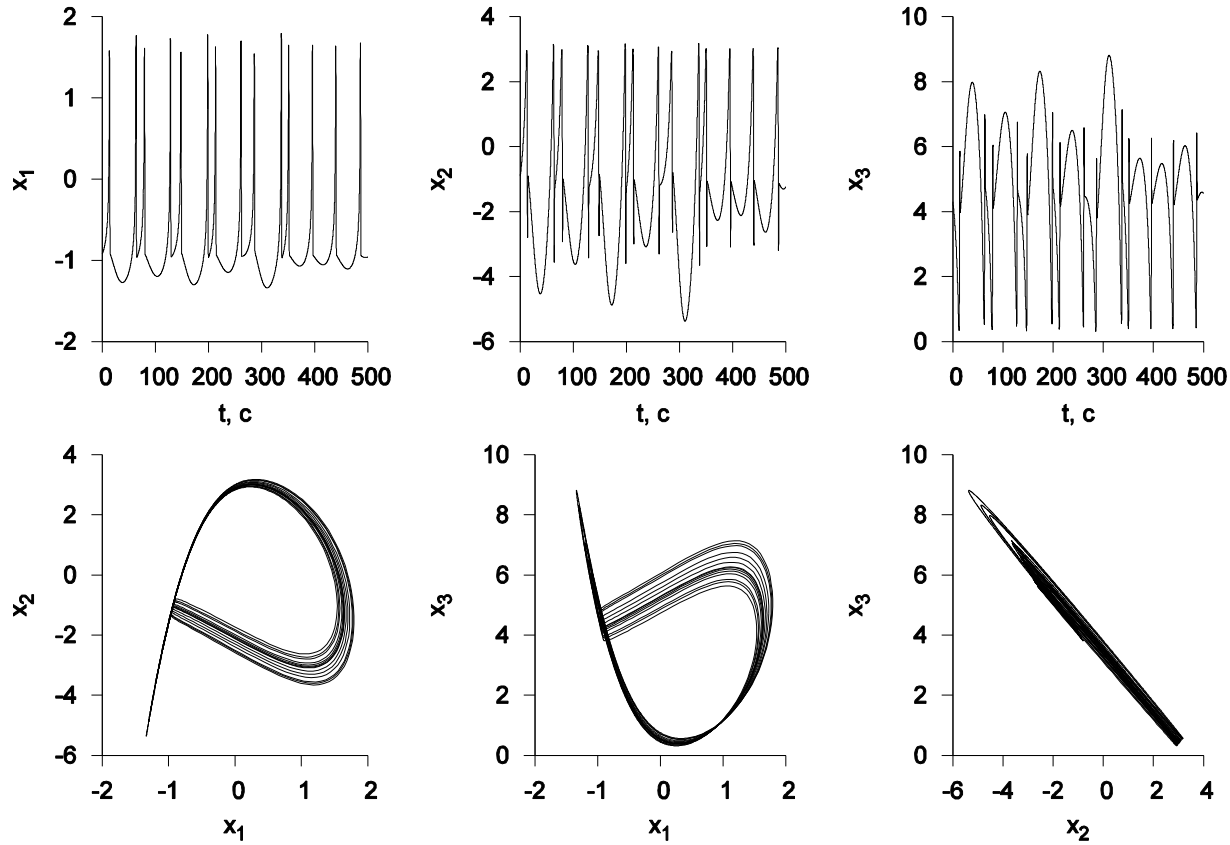


Рис. 3. Временные зависимости и фазовые портреты системы (19).

Аналогичный анализ, проведенный для системы (14), показал, что она позволяет получить 12 систем-кандидатов с 9 коэффициентами. Три из этих ОС повторяют упрощенные системы Hindmarsh-Rose с коэффициентами a_0, b_0,

c_0, которые подчиняются соотношениям (6), (7). Кроме того, частным случаем системы (14) является и система Hindmarsh-Rose (3), имеющая 11 коэффициентов. Частные случаи системы (13), способные воспроизводить исследуемый временной ряд, содержат не менее 11 коэффициентов. Число систем с 11 коэффициентами равно 18. В каждой из этих систем присутствуют коэффициенты a_2, b_3, b_5, b_{11}, c_3, c_{10}, а также один из двух коэффициентов b_0, c_0 два из трех коэффициентов b_1, c_1, c_2 и два из трех коэффициентов b_4, c_4, c_5.

Выводы. В данной статье предложена методика идентификации модели по скалярному временному ряду. Так как данная задача в общем случае имеет множество решений, то предлагается поиск наиболее простых систем-кандидатов, способных воспроизвести наблюдаемую переменную. Преимущество данного подхода по сравнению с известными методами заключается в максимальном использовании аналитического аппарата в противовес численным процедурам. То есть, появляется возможность подходить к поиску моделей более осмысленно, что проблематично при использовании традиционных вычислительных процедур, основанных на оптимизационных принципах. Наличие разнообразия систем-кандидатов дает исследователю возможность выбора структуры модели, наиболее адекватно отражающей физику процесса.

Библиографические ссылки

1. **Tarantola, A.** Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation [Text] / A. Tarantola. – Society for Industrial and Applied Mathematics.: Philadelphia, 2005. – 344 p.
2. **Lainscsek, C.** Ansatz library for global modeling with a structure selection [Text] / C. Lainscsek, C. Letellier, F. Schurrer // Phys. Rev. E. – 2001. – vol. 64. – P. 016206.
3. **Gouesbet, G.** Reconstruction of standard and inverse vector fields equivalent to the Rössler system [Text] / G. Gouesbet, // Phys. Rev. A. – 1991. – vol. 44. – P. 6264-6280.
4. **Льюнг, Л.** Идентификация систем. Теория для пользователя [Текст] / Л. Льюнг. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 432 с. – Перевод с английского.
5. **Gorodetskyi, V.** Analytic reconstruction of some dynamical systems [Text] / V. Gorodetskyi, M. Osadchuk // Physics Letters A. – 2013. – vol. 377. – P. 703-713.
6. **Gorodetskyi, V.** Reconstruction of chaotic systems of a certain class [Text] / V. Gorodetskyi, M. Osadchuk // International Journal of Dynamics and Control. – 2015. – vol. 3. – № 4. – P. 341-353.
7. **Hindmarsh, J. L.** A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations [Text] / J. L. Hindmarsh, R. M. Rose // Proc. R. Soc. Lond. B. – 1984. – vol. 221. – P. 87-102.
8. **Lainscsek, C.** Nonuniqness of global modeling and time scaling [Text] / C. Lainscsek // Physical review E. – 2011. – vol. 84. – P. 046205.

Надійшла до редколегії 16. 03. 2017.