УДК 519.6 **doi:10.15421/321601**

Л.Л. Гарт
Днепропетровский национальный университет имени Олеся Гончара

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ И ОБУСЛОВЛЕННОСТИ ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

Исследован вопрос об устойчивости и обусловленности общего проекционного метода решения линейного операторного уравнения первого рода в банаховом пространстве. Доказаны соответствующие теоремы, получены оценки погрешности проекционного метода при проектировании в произвольные подпространства исходного пространства.

Досліджено питання про стійкість і обумовленість загального проекційного методу розв'язання лінійного операторного рівняння першого роду в банаховому просторі. Доведено відповідні теореми, отримано оцінки похибки проекційного методу у випадку проектування в довільні підпростори вихідного простору.

The problem of stability and conditionality of general projection method is investigated for solving a linear operator equation of the in Banach space. The corresponding theorems are proved, the projection method error estimates are obtained by projecting in any subspaces of the initial space.

Ключевые слова: операторное уравнение, линейный оператор, аппроксимация, проекционный метод, приближение, последовательность, устойчивость, обусловленность, сходимость, погрешность.

Введение. Многие теоретические и прикладные задачи науки, техники и производства приводят к необходимости решения различных классов операторных уравнений в функциональных пространствах. Частными случаями таких уравнений являются хорошо известные интегральные, дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения, которые, как правило, точно не решаются. Поэтому для их решения разработаны и применяются различные приближенные методы (прямые, проекционные, итеративные, смешанные и др.). Однако, несмотря на полученные в этой области многочисленные результаты [1]–[5], проблема поиска эффектив-

© Гарт Л.Л., 2016

ных устойчивых методов приближенного решения операторных уравнений все еще далека от своего завершения.

В данной работе под проекционным методом будем понимать метод, согласно которому исходное (точное) уравнение, рассматриваемое в каком-то сложном пространстве, заменяется приближенным уравнением, заданным в более простом пространстве. Приближенное уравнение решается точно, и его точное решение объявляется приближением к решению исходного уравнения. Разработке критериев сходимости, исследованию скорости сходимости, получению оценок погрешности, изучению свойств вычислительных схем и различным приложениям проекционных методов посвящены фундаментальные труды С. Г. Михлина [4; 6], Л. В. Канторовича [3], Н. И. Польского [7], М. А. Красносельского, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко, Я. Б. Рутицкого [8], В. В. Иванова [9], В. В. Петришина [10], а также работы Ю. И. Грибанова [11], Б. Г. Габдулхаева [2], А. Ю. Лучки [12], С. Д. Балашовой [5; 13] и других авторов. При этом широко используется аппарат функционального анализа, который дает возможность выработать единый подход к решению самых разнообразных задач, поскольку различные конкретные виды уравнений представляют собой частные случаи некоторого операторного уравнения, а также теоретически обосновать исследуемые методы.

Общая теория проекционных методов для решения операторных уравнений второго рода вида $u = Au + f$ и приводимых к ним уравнений в банаховых пространствах впервые была построена академиком Л. В. Канторовичем (1948 г.). В рамках этой теории исследования по проекционным, а также проекционно-итерационным методам решения уравнения первого рода $Au = f$ с линейным ограниченным оператором A, действующим из X в Y (X, Y – банаховы пространства), проводились С. Д. Балашовой [5]. Проекционный метод решения уравнения первого рода с линейным, вообще говоря, неограниченным оператором A, действующим в банаховом пространстве X, рассмотрен в работе [13], где доказаны теоремы о сходимости метода, получены оценки погрешности. Там же дано обобщение полученных результатов на случай, когда приближенные уравнения заданы не в подпространствах $X_n \subset X$, $n = 1,2,\ldots$ исходного пространства, а в некоторых пространствах $\tilde{X}_n$, изоморфных им.

В данной работе рассматривается вопрос об устойчивости и обусловленности общего проекционного метода [13] для решения линейного операторного уравнения первого рода в банаховом пространстве.

Постановка задачи. Пусть задано уравнение

$$Au = f\ , \tag{1}$$

где A – линейный (аддитивный и однородный) оператор, действующий в банаховом пространстве X. Предположим, что это уравнение имеет в X единственное решение $u*$.

Аппроксимируем уравнение (1) последовательностью приближенных уравнений

$$A_n u_n = f_n\ , \quad n = 1,2,\ldots, \tag{2}$$

где A_n – линейный ограниченный оператор, действующий в подпространстве X_n исходного пространства ($X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots \subset X$, $X_1 \neq \varnothing$); $f_n = P_n f$; P_n – линейный проектирующий оператор, переводящий X в X_n ($P_n(X) = X_n$, $P_n u_n = u_n$ для $u_n \in X_n$).

Предположим, что при любом $n = 1,2,\ldots$ выполнены условия

$$\left\| P_n A u* - A_n P_n u* \right\| \le \alpha_n\ , \tag{3}$$

где $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$;

$$\left\| P_n u* - u* \right\| \le \beta_n\ , \tag{4}$$

где $\beta_n \to 0$ при $n \to \infty$;

$$\left\| A_n^{-1} \right\| \le M\ , \tag{5}$$

где $M > 0$ – константа.

Условие (5) ограниченности по норме в совокупности обратных операторов A_n^{-1}, в частности, обеспечивает существование и единственность решения $u_n^* \in X_n$ каждого из приближенных уравнений (2), а также его непрерывную зависимость от правой части f_n, при этом

$$\left\| u_n^* \right\| \le M \left\| f_n \right\|\ , \quad n = 1,2,\ldots.$$

Сходимость последовательности $\left\{ u_n^* \right\}_{n=1}^{\infty}$ к $u*$ в X устанавливает следующая теорема.

Теорема 1 *(о сходимости проекционного метода) [13]. Пусть выполнены условия (3)–(5). Тогда последовательность* $\left\{ u_n^* \right\}_{n=1}^{\infty}$ *решений приближенных уравнений (2) сходится к решению* $u*$ *исходного уравнения (1) и справедлива оценка погрешности*

$$\left\| u_n^* - u* \right\| \le \gamma_n\ , \quad n = 1,2,\ldots, \tag{6}$$

где $\gamma_n = M\,\alpha_n + \beta_n$.

Приближенные уравнения (2) в силу неточности задания их элементов на практике часто решаются только приближенно. Например, уравнение (2) заменяется уравнением вида

$$L_n u_n = g_n, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{7}$$

где L_n – линейный оператор, действующий в подпространстве $X_n \subset X$, причем f_n и g_n близки в определенном смысле. Возможна также ситуация несколько обратная [2], когда уравнение (7) является приближенным для точного уравнения (1), а уравнение (2) можно считать приближенным по отношению к (1) в том смысле, что его элементы являются приближенными значениями соответствующих элементов уравнения (7).

В связи с этим возникает необходимость исследования проекционного метода решения уравнения (1) на устойчивость.

Метод решения. Имеет место следующая

Теорема 2 *(об устойчивости проекционного метода). Пусть выполнены условия (3)–(5). Если уравнения (2) и (7) близки в том смысле, что*

$$\eta_n \equiv \|A_n - L_n\| \to 0, \quad \mu_n \equiv \|f_n - g_n\| \to 0, \quad n \to \infty, \tag{8}$$

то, начиная с некоторого номера $n = N \geq 1$, *уравнения (7) однозначно разрешимы в* X_n *и решения* u_n^* *и* y_n^* *приближенных уравнений (2) и (7) соответственно близки в том смысле, что*

$$\|u_n^* - y_n^*\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

причем справедлива двусторонняя оценка

$$\delta_n \|A_n\|^{-1} \leq \|u_n^* - y_n^*\| \leq \delta_n \|A_n^{-1}\|, \quad n \geq N, \tag{9}$$

где $\delta_n = \|f_n - g_n + (L_n - A_n)y_n^*\|$. *При этом последовательность* $\{y_n^*\}_{n=N}^{\infty}$ *точных решений уравнений (7) сходится к* u^* *с оценкой погрешности*

$$\|y_n^* - u^*\| \leq M\,(\alpha_n + \delta_n) + \beta_n, \quad n \geq N.$$

Доказательство. Рассмотрим тождественное равенство при любом $n = 1,2,\ldots$:

$$L_n = A_n - (A_n - L_n) = A_n(E - B_n),$$

где $B_n = A_n^{-1}(A_n - L_n)$ – линейный непрерывный оператор, действующий в подпространстве $X_n \subset X$; E – единичный оператор в X.

В силу первого из соотношений (8) и условия (5) найдется такой номер $n = N \geq 1$, что будет справедливо неравенство

$$\|B_n\| \le \|A_n^{-1}\| \|A_n - L_n\| \le M\eta_n < 1 .$$

Тогда на основании теоремы Банаха об обратном операторе [3] существует линейный непрерывный оператор $(E - B_n)^{-1}$, а следовательно, и оператор $L_n^{-1} = (E - B_n)^{-1} A_n^{-1}$ при каждом $n \ge N$, причем

$$\|L_n^{-1}\| \le \frac{M}{1 - M\eta_n}, \quad n \ge N .$$

Это означает, что каждое из приближенных уравнений (7) имеет в X_n (хотя бы при достаточно больших n) единственное решение $y_n^* = L_n^{-1} g_n$, непрерывно зависящее от правой части g_n:

$$\| y_n^* \| \le \frac{M}{1 - M\eta_n} \|g_n\|, \quad n \ge N .$$

Так как уравнения (2) и (7) разрешимы при любых правых частях $f_n \in X_n$ и $g_n \in X_n$ ($n \ge N$) соответственно, то справедливо тождество

$$f_n - A_n y_n^* = A_n(u_n^* - y_n^*) = f_n - g_n + (L_n - A_n) y_n^*, \quad n \ge N . \qquad (10)$$

Далее из очевидных неравенств

$$\|u_n^* - y_n^*\| = \|A_n^{-1} A_n (u_n^* - y_n^*)\| \le \|A_n^{-1}\| \|A_n (u_n^* - y_n^*)\|,$$

$$\|A_n (u_n^* - y_n^*)\| \le \|A_n\| \|u_n^* - y_n^*\|$$

и тождества (10) легко выводятся оценки (9), откуда при $n \to \infty$ с учетом (8) получаем

$$\|u_n^* - y_n^*\| = O(\| f_n - g_n\| + \|L_n - A_n\|) = O(\mu_n + \eta_n) \to 0 .$$

Справедливость последнего утверждения теоремы устанавливается с использованием оценок (6), (9) и условия (5):

$$\|y_n^* - u^*\| \le \|y_n^* - u_n^*\| + \| u_n^* - u^*\| \le M (\alpha_n + \delta_n) + \beta_n, \quad n = 1,2,....$$

Отсюда следует, что $\|y_n^* - u^*\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема доказана.

В ряде литературных источников (напр., [3]) определено понятие числа обусловленности матрицы и исследована его роль при решении (в том числе при рассмотрении устойчивости) систем линейных алгебраических уравнений. Результаты, полученные в этом направлении, могут быть перенесены также на операторные уравнения [2]. Напомним соответствующие сведения из этой области и выясним связь между числами обусловленности операторных уравнений (1) и (2).

Рассмотрим уравнение (1), где линейный оператор A действует в банаховом пространстве X, причем существует (ограниченный или неограниченный) обратный оператор A^{-1} в X. Величину

$$C(A) = \|A\| \left\|A^{-1}\right\|$$

называют числом обусловленности оператора A и уравнения (1). Уравнение (1) называют хорошо обусловленным, если $C(A)$ невелико, и плохо обусловленным – в противном случае.

Заметим, что для некорректных уравнений (1) число обусловленности $C(A) = \infty$ и поэтому они являются плохо обусловленными, что очевидным образом согласуется со свойствами таких уравнений.

Число обусловленности оператора A служит той количественной характеристикой, которая позволяет судить о связи погрешности $r = u^* - \tilde{u}^*$ приближенного решения и соответствующей невязки $\delta = f - A\tilde{u}^* = A(u^* - \tilde{u}^*)$. Действительно, как показано в [3], справедливо соотношение

$$C(A) = \sup_{u^*} \left\{ \sup_{\delta} \left(\frac{\|r\|}{\|u^*\|} : \frac{\|\delta\|}{\|f\|} \right) \right\} = \|A\| \left\|A^{-1}\right\|.$$

Кроме того, число обусловленности $C(A)$ позволяет судить также об устойчивости решений соответствующего уравнения. Так, влияние неточности в задании оператора A на решение u^* уравнения (1) в определенном смысле меньше для хорошо обусловленных операторов и больше – для плохо обусловленных.

Как упоминалось выше, в качестве приближенного решения $\tilde{u}^*$ уравнения (1) в X выступает точное решение $u_n^* \in X_n$ приближенного уравнения (2). Однако на практике, как уже отмечалось перед теоремой 2, решение u_n^* может быть найдено, вообще говоря, только приближенно. Определенное представление о допускаемой при этом погрешности дает число обусловленности

$$C(A_n) = \|A_n\| \left\|A_n^{-1}\right\|$$

приближенного оператора A_n и приближенного уравнения (2), которое существует в силу ограниченности оператора A_n и выполнимости условия (5). Представляет интерес исследовать связь между числами обусловленности точного и приближенного уравнений (1) и (2).

Имеет место следующая

Теорема 3 *(об обусловленности проекционного метода). Пусть существует число обусловленности* $C(A)$ *для уравнения (1) и линейный оператор* $A - A_n : X_n \to X$ *ограничен при каждом* $n = 1,2,\ldots$, *причем*

$$\|A - A_n\|_{X_n \to X} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{11}$$

Тогда хотя бы при достаточно больших n *для чисел обусловленности* $C(A_n)$ *приближенных уравнений (2) справедлива оценка*

$$C(A_n) \le \theta\, C(A), \quad n \ge N_0 \ge 1, \tag{12}$$

где $1 \le \theta \le 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $N_0 \equiv N_0(\varepsilon)$, *и имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} C(A_n) = C(A). \tag{13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проводилось с использованием методологии работы [2], где подобный результат был получен для случая проектирования в конечномерные подпространства $X_n \subset X$ основного пространства. Из непрерывной обратимости в X оператора A и следствия из неравенства треугольника ($\big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \le \|x - y\|$) будем иметь для любого $u_n \in X_n$:

$$\|A_n u_n\| \ge \|A u_n\| - \|A u_n - A_n u_n\| \ge \left\|A^{-1}\right\|^{-1} \|u_n\| - \|A - A_n\|_{X_n \to X} \|u_n\| =$$

$$= \left\|A^{-1}\right\|^{-1} \left(1 - \left\|A^{-1}\right\| \|A - A_n\|_{X_n \to X}\right) \|u_n\|.$$

Так как в силу (11)

$$p_n \equiv \left\|A^{-1}\right\| \|A - A_n\|_{X_n \to X} \to 0, \quad n \to \infty, \tag{14}$$

то найдется такой номер $n = N \ge 1$, начиная с которого

$$p_n \equiv \left\|A^{-1}\right\| \|A - A_n\| < 1, \quad A - A_n : X_n \to X. \tag{15}$$

Тогда для указанных номеров n на основании теоремы Банаха об обратном операторе [3] будет иметь место оценка

$$\left\|A_n^{-1}\right\| \le \left\|A^{-1}\right\| (1 - p_n)^{-1}, \quad n \ge N. \tag{16}$$

Отсюда становится ясной ограниченность в совокупности чисел обусловленности $C(A_n) = \|A_n\| \left\|A_n^{-1}\right\|$ приближенных операторов A_n, начиная с некоторого номера $n = N_0 \ge N$. В самом деле, так как

$$\|A_n\|_{X_n \to X_n} \le \|A_n\|_{X_n \to X} \le \|A_n - A\|_{X_n \to X} + \|A\|_{X_n \to X} \le \left\|A^{-1}\right\|^{-1} \left(p_n + C(A)\right),$$

то с учетом (16), (15) и свойства $C(A)\geq 1$ [14] справедлива оценка

$$C(A_n)=\|A_n\|\left\|A_n^{-1}\right\|\leq\left(p_n+C(A)\right)(1-p_n)^{-1}=C(A)\left(1+\frac{p_n}{C(A)}\right)(1-p_n)^{-1}\leq$$

$$\leq C(A)(1+p_n)(1-p_n)^{-1},\quad n\geq N. \qquad (17)$$

Далее, в силу (14) для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ найдутся номер $N_0(\varepsilon)\geq N$ и число $1\leq\theta\leq 1+\varepsilon$ такие, что для всех $n\geq N_0$ $(1+p_n)(1-p_n)^{-1}\leq\theta$. Поэтому для указанных $n\geq N_0$ из (17) вытекает выполнимость соотношения (12), то есть ограниченность чисел $C(A_n)$ в совокупности. Из (17) также следует в силу (14), что $\lim\limits_{n\to\infty}C(A_n)=C(A)$.

Теорема доказана.

Таким образом, если точное уравнение (1) хорошо обусловлено, то в условиях теоремы 3 хорошо обусловленным также является (хотя бы при достаточно больших n) каждое из приближенных уравнений (2).

Выводы. В данной работе впервые рассмотрен вопрос об устойчивости и обусловленности общего проекционного метода решения линейного операторного уравнения первого рода в банаховом пространстве при проектировании в произвольные подпространства исходного пространства. Сформулированы и доказаны соответствующие теоремы, получены условия, при которых метод обладает устойчивым алгоритмом.

Библиографические ссылки

1. **Вайникко, Г. М.** Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение уравнений [Текст] / Г. М. Вайникко. – Тарту: Изд-во Тартуского ун-та, 1970. – 192 с.
2. **Габдулхаев, Б. Г.** Теория приближенных методов решения операторных уравнений [Текст] / Б. Г. Габдулхаев. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2006. – 112 с.
3. **Канторович, Л. В.** Функциональный анализ [Текст] / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. – СПб.: Невский Диалект, 2004. – 816 с.
4. **Михлин, С. Г.** Прямые методы в математической физике [Текст] / С. Г. Михлин. – М.: Гостехиздат, 1950. – 428 с.
5. **Балашова, С. Д.** Приближенные методы решения операторных уравнений [Текст] / С. Д. Балашова. – Д.: ДГУ, 1980. – 112 с.
6. **Михлин, С. Г.** Некоторые вопросы теории погрешностей [Текст] / С. Г. Михлин. – Ленинград: Изд-во Ленинградского ун-та, 1988. – 334 с.
7. **Польский, Н. И.** О сходимости некоторых приближенных методов анализа [Текст] / Н. И. Польский // УМЖ. – 1955. – Т. 7, № 1. – С. 56-70.

8. Приближённое решение операторных уравнений [Текст] / М. А. Красносельский [и др.] – М.: Наука, 1969. – 456 с.
9. **Иванов, В. В.** Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений [Текст] / В. В. Иванов. – К.: Наук. думка, 1968. – 287 с.
10. **Petryshyn, W. V.** Approximation-solvability of nonlinear functional and differential equations [Text] / W. V. Petryshyn. – N.-Y.: Marcel Dekker, 1992. – 395 p.
11. **Грибанов, Ю. И.** О проекционном методе решения линейных уравнений в банаховых пространствах [Текст] / Ю. И. Грибанов // Изв. вузов. матем. – 1965. – № 1. – С. 48–55.
12. **Лучка, А. Ю.** Проекционно-итеративные методы [Текст] / А. Ю. Лучка. – К.: Наук. думка, 1993. – 288 с.
13. **Балашова, С. Д.** Применение проекционно-итерационных методов к решению задачи Дирихле для уравнения Пуассона [Текст] / С. Д. Балашова, Л. Л. Тавадзе, Э. Л. Тавадзе. – Д., 1991. – 28 с. – Деп. в ВИНИТИ 13.06.91, № 2486 – В 91.
14. **Крылов, В. И.** Вычислительные методы [Текст] / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – М.: Наука, 1976. – Т. 1. – 1976. – 304 с.; 1977. – Т. 2. – 400 с.

Поступила в редколлегию 05.03.2016