УДК 517.9

С.О. Горбонос
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ПРО РОЗВ'ЯЗКИ ОДНОГО КЛАСУ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ІЗ НЕОБМЕЖЕНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Досліджено початково-крайову задачу для параболічної системи з необмеженими коефіцієнтами. Показано, що розв'язок поставленої задачі можна отримати, застосовуючи L^{∞} - апроксимацію матриці потоку.

Исследована начально-краевая задача для параболической системы с неограниченными коэффициентами. Показано, что решение поставленной задачи можно получить, применяя L^{∞} - аппроксимацию матрицы потока.

The article is devoted to the initial-boundary value problem of parabolical system with unbounded coefficients. It is shown that solutions of considered problem can be attained through L^{∞} - approximation of the stream matrix.

Ключові слова: початково-крайова задача, L^{∞} - апроксимація, кососиметрична матриця.

Вступ. Досліджується початково-крайова задача для параболічної системи. Характерна особливість даного класу задач полягає в тому, що коефіцієнти матриці потоку є елементами простору $L^2(\Omega)$, як результат наведена задача не є коректною. Таким чином, основною метою роботи було встановити підхід, який дозволив би отримати наближення слабкого розв'язку поставленої задачі.

Постановка задачі. Основним об'єктом дослідження виступає задача

$$\begin{cases} y_t - div\left(\nabla y + A(x)\nabla y\right) = f \text{ на } \Omega \times [0,T], \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu_A} = u \text{ на } \Gamma \times [0,T], \\ y(t_0,x) = y_0 \in L^2(\Omega) \text{ на } \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

© *С.О. Горбонос, 2014*

де Ω – обмежена множина простору R^N, а Γ – її межа, $f \in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$ і $u \in L^2\left(0,T;L^2(\Gamma)\right)$ – задані функції, а $A(x)$ – кососиметрична матриця і $A(x) \in L^2\left(\Omega,\mathrm{S}^{\mathrm{N}}\right)$. Тут $L^p(0,T;V)$ – це простір, який наділений нормою

$$\|u\|_{L^p(0,T;V)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_V^p \, dt\right)^{1/p},$$

де V – простір Соболєва, а u – вимірна функція така, що $u:[0,T]\to V$ і $1 \le p < \infty$. Надалі через $C\left([0,T];V\right)$ будемо позначати банахів простір, який складається з усіх неперервних функцій $u:[0,T]\to V$ таких, що

$$\|u\|_{C([0,T];V)} = \max_{0\le t\le T} \|u(t)\|_V .$$

Далі введемо до розгляду таку форму:

$$[y,\varphi] = \int_0^T \int_\Omega \left(\nabla\varphi, A\nabla y\right)_{\mathrm{R}^N} dxdt \qquad (2)$$

для будь-якого $y \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$ і $\varphi \in C^\infty\left(0,T;C_0^\infty(\Omega)\right)$. У зв'язку з тим, що форма (2) необмежена, введемо множину D, яка складається з елементів $y \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$, для яких має місце нерівність

$$\left|\int_0^T \int_\Omega \left(\nabla\varphi, A\nabla y\right)_{\mathrm{R}^N} dxdt\right| \le c(y)\left(\int_0^T \int_\Omega |\nabla\varphi|^2 \, dxdt\right)^{\frac{1}{2}},$$

де $c(\mathrm{y})$ – стала, яка залежить від y. Тепер уведемо поняття слабкого розв'язку задачі (1).

Означення 1. Слабким розв'язком задачі (1) для $A(x) \in L^2\left(\Omega;\mathrm{S}^N\right)$, заданих $u \in L^2\left(0,T;L^2(\Gamma)\right)$ і $f \in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$ будемо називати функцію $y = y(x,t) \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$ таку, що $y_t \in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$, має місце інтегральна тотожність

$$\int_0^T\int_\Omega y_t\varphi dxdt+\int_0^T\int_\Omega\left(\nabla\varphi,\nabla y+A\nabla y\right)_{\mathrm{R}^N}dxdt=$$
$$=\int_0^T\int_\Omega f\varphi dxdt+\int_0^T\int_\Gamma u\varphi d\mathrm{H}^{N-1}dt \tag{3}$$

для будь-якого $\varphi\in C^\infty\left(0,T;C_0^\infty(\Omega)\right)$ і виконується умова

$$y(x,t_0)=y_0\in L^2(\Omega)\ \text{ на }\ \Omega.$$

Метод розв'язування. Спочатку введемо до розгляду L^∞ - апроксимацію матриці $A(x)$, тобто послідовність кососиметричних матриць $\{A_k\}_{k\in\mathrm{N}}\in L^\infty\left(\Omega;\mathrm{S}^N\right)$ таку, що

$$A_k\to A\text{сильно в }L^2\left(\Omega;\mathrm{S}^N\right).$$

Для будь-якого $k\in\mathrm{N}$ з кожною матрицею A_k пов'яжемо таку початково-крайову задачу:

$$\begin{cases} y_t-div\left(\nabla y+A_k(x)\nabla y\right)=f\ на\ \Omega\times[0,T], \\ \dfrac{\partial y}{\partial\nu_A}=u\ на\ \Gamma\times[0,T], \\ y(t_0,x)=y_0\in L^2(\Omega)на\ \Omega. \end{cases} \tag{4}$$

Тепер розглянемо послідовність початково-крайових задач (4) щодо розв'язності, для цього застосуємо метод Гальоркіна. Отже, нехай $\{w_k\}_{k=1}^\infty$ – послідовність гладких функцій таких, що в просторі $H_0^1(\Omega)$ вони утворюють ортогональний базис, а в просторі $L^2(\Omega)$ – ортонормований. Нехай $V_m=span\{w_1,\cdots,w_m\}$ – це послідовність скінченно-вимірних підпросторів таких, що

$$V_m\subset V_{m+1}\ \text{ і }\ \overline{\bigcup V_m}=H_0^1(\Omega).$$

Далі для фіксованого m покладемо

$$y_m(t)=\sum_{k=1}^{m}c_k(t)w_k,\ G_m=\sum_{k=1}^{m}y_{0k}w_k$$

і розглянемо для будь-якого $s=\overline{1,m}$ і $y_m\in H^1\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$ наближену задачу:

$$\begin{cases}\int\limits_0^T(\dot{y}_m,w_s)_{H_0^1(\Omega)}dt+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega(\nabla w_s,\nabla y_m+\mathrm{A}_k\,\nabla y_m)_{\square^N}dxdt=\\ \qquad=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega fw_s dxdt+\int\limits_0^T\int\limits_\Gamma uw_s d\mathrm{H}^{N-1}dt,\\ \qquad y_m(0)=G_m.\end{cases}\tag{5}$$

Слід відмітити, що задача (5) є розв'язною, про що говорить такий результат:

Лема 1. [3] Для будь-якого m існує єдиний розв'язок $y_m\in H^1\left(0,T;V_m\right)$ задачі (5) і $y_m\in C\left(\left[0,T\right];V_m\right)$.

Разом з цим послідовності $\{y_m\}$ і $\{\dot{y}_m\}$ будуть обмежені в $L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$ і $L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$ відповідно:

Теорема 1. Нехай y_m – єдиний розв'язок задачі (5) тоді для будь-якого $t\in\left[0,T\right]$ мають місце такі оцінки:

$$\|y_m\|^2_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)}+\frac{1}{2}\|y_m(T)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\le\left(C\|f\|_{L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)}+C_1\|u\|_{L^2\left(0,T;L^2(\Gamma)\right)}\right)\times$$

$$\times\left\{C\|f\|_{L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)}+C_1\|u\|_{L^2\left(0,T;L^2(\Gamma)\right)}+\frac{1}{\sqrt{2}}\|y_0\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right\}+\frac{1}{2}\|y_0\|^2_{H_0^1(\Omega)},$$

$$\left\|(y_m)'_t\right\|^2_{L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)}\le 2\|y_m\|^2_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)}+2C_p^2\|f\|_{L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)}+$$

$$+4C_pC\|f\|_{L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)}\|u\|_{L^2\left(0,T;L^2(\Gamma)\right)}+C_2\|u\|_{L^2\left(0,T;L^2(\Gamma)\right)}.$$

Зауваження 1. Враховуючи теорему 1 і теорему 6.22 [3] про компактність, отримаємо, що

$$y_m \rightarrow y^k \text{ в } L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right),$$
$$\dot{y}_m \rightarrow \dot{y}^k \text{ в } L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right),$$

де $m \to \infty$ і y^k – єдиний розв'язок задачі (3).

Беручи до уваги вищесказане, наведемо один із основних результатів:

Теорема 2. Нехай $u \in L^2\left(0,T;L^2(\Gamma)\right)$ і $f \in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$. Тоді для будь-якого $k \in \mathrm{N}$ задача (4) має єдиний розв'язок $y^k \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$, для якого мають місце оцінки:

$$\left\|y^k\right\|^2_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)} + \frac{1}{2}\left\|y^k(T)\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} \le \left(C\|f\|_{L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)} + C_1\|u\|_{L^2\left(0,T;L^2(\Gamma)\right)}\right)\times$$
$$\times\left\{C\|f\|_{L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)} + C_1\|u\|_{L^2\left(0,T;L^2(\Gamma)\right)} + \frac{1}{\sqrt{2}}\|y_0\|^2_{H_0^1(\Omega)}\right\} + \frac{1}{2}\|y_0\|^2_{H_0^1(\Omega)},$$

$$\left\|\left(y^k\right)_t'\right\|^2_{L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)} \le 2\left\|y^k\right\|^2_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)} + 2C_p^2\|f\|_{L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)} +$$
$$+4C_pC\|f\|_{L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)}\|u\|_{L^2\left(0,T;L^2(\Gamma)\right)} + C_2\|u\|_{L^2\left(0,T;L^2(\Gamma)\right)}.$$

Доведення. Спочатку покажемо, що для будь-якого $k \in \mathrm{N}$ існує елемент $y^k \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$, який є розв'язком задачі (4). Слід відмітити, що в задачі (5) можна перейти до границі, коли $m \to \infty$ за умови, що тестова функція належить простору V_m.

Нехай v – це елемент простору $L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$, який має вигляд

$$v(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t)\, w_k$$

і збігається в просторі $H_0^1(\Omega)$ для будь-якого $t \in [0,T]$. Далі для фіксованого N, $m \ge N$, покладемо

$$v_N(t) = \sum_{k=1}^{N} b_k(t)\, w_k, \qquad (6)$$

очевидно, що $v_N \in L^2\left(0,T;V_m\right)$.

Тепер помножимо (5) на $b_k\left(t\right)$ і просумуємо для $k=1\ldots N$. У результаті отримаємо:

$$\left(\dot{y}_m, v_N\left(t\right)\right)_{H_0^1(\Omega)} + \int\limits_{\Omega}\left(\nabla v_N\left(t\right), \nabla y_m + A_k \nabla y_m\right)_{\mathrm{R}^N} dx = \\ = \int\limits_{\Omega} f v_N\left(t\right) dx + \int\limits_{\Gamma} u v_N\left(t\right) d\mathrm{H}^{N-1}. \tag{7}$$

Далі проінтегруємо по $\left(0,T\right)$

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} \dot{y}_m v_N\, dx dt + \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}\left(\nabla v_N, \nabla y_m + A_k \nabla y_m\right)_{\mathrm{R}^N} dx dt = \\ = \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} f v_N\, dx dt + \int\limits_0^T\int\limits_{\Gamma} u v_N\, d\mathrm{H}^{N-1} dt.$$

Беручи до уваги зауваження 1 і перейшовши до границі, коли $m \to \infty$, отримаємо

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} \dot{y}^k v_N\, dx dt + \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}\left(\nabla v_N, \nabla y^k + A_k \nabla y^k\right)_{\mathrm{R}^N} dx dt = \\ = \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} f v_N\, dx dt + \int\limits_0^T\int\limits_{\Gamma} u v_N\, d\mathrm{H}^{N-1} dt.$$

Відмітимо, що коли $N \to \infty$, то $v_N \to v$ в $L^2\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right)\right)$. Звідси випливає, що

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} \dot{y}^k v\, dx dt + \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}\left(\nabla v, \nabla y^k + A_k \nabla y^k\right)_{\mathrm{R}^N} dx dt = \\ = \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} f v\, dx dt + \int\limits_0^T\int\limits_{\Gamma} u v\, d\mathrm{H}^{N-1} dt. \tag{8}$$

Таким чином (8) має місце для всіх $v \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$, а значить y^k задовольняє (3). Крім того, з теореми 7.22 [3] випливає, що $y^k \in C\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)$.

Залишилось перевірити початкову умову означення 1. Отже, нехай $v \in C^1\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)$ і $v(T)=0$. Враховуючи те, що

$$\int_0^T\int_\Omega \dot{y}_m v_N\,dxdt = \int_\Omega G_m v_N(0)\,dx - \int_0^T\int_\Omega y_m \dot{v}_N\,dxdt$$

і застосувавши теорему 7.22 [3] до (7) і (8) при $m\to\infty$, отримаємо

$$\int_\Omega y^k(0)v(0)\,dx = \int_\Omega y_0 v(0)\,dx,$$

а значить

$$y^k(0)=y_0.$$

Єдиність розв'язку y^k випливає із зауваження 7.10 [3]. У свою чергу, враховуючи твердження 7.16 [3] і перейшовши до границі $m\to\infty$, бачимо, що апріорні оцінки є наслідком теореми 1. *Теорему доведено.*

Тепер розглянемо задачу (1). Враховуючи означення L^∞ - апроксимації матриці $A(x)$, означення 1 і теорему 2, встановлено такий результат:

Теорема 4. Нехай $u \in L^2\left(0,T;L^2(\Gamma)\right)$ і $f \in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$ – задані функції, а $A(x) \in L^2\left(\Omega;\mathrm{S}^N\right)$. Нехай для будь-якого $k \in \mathrm{N}$ $y^k \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$ – відповідні розв'язки задач (3). Тоді

$$y^k \rightrightarrows y^* \text{ в } L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right),$$
$$\left(y^k\right)_t' \rightrightarrows \left(y^*\right)_t' \text{ в } L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right),$$
$$[y^*,y^*]\ge 0.$$

де y^* – слабкий розв'язок задачі (1).

Висновки. Таким чином, встановлено, що розв'язки вихідної задачі можна наблизити розв'язками відповідних апроксимаційних задач (4), застосовуючи метод Гальоркіна і наближення матриці потоку A матрицями $\{A_k\}_{k\in\mathrm{N}} \in L^{\infty}\left(\Omega;\mathrm{S}^N\right)$.

Бібліографічні посилання

1. **Cioranescu D.** An Introduction to Homogenization / D. Cioranescu, P. Donato – New York : Oxford university press, 1999. – 262 p.
2. **Kogut P.I.** On attainability of optimal solutions for linear elliptic equations with unbounded coefficients / P.I. Kogut, O.P. Kupenko // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Моделювання – 2012. – Вип. 4. – С. 63–82.
3. **Salsa S.** Partial Differential Equations in Action: From Modelling to Theory / S. Salsa. – Milan : Springer-Verlag, 2008. – 556 p.
4. **Zhikov V. V.** Remarks on the uniqueness of a solution of the Dirichlet problem for second-order elliptic equations with lower-order terms / V.V. Zhikov // Functional Analysis and Its Applications – 2004 , – No. 3 . – P. 173–183.

Надійшла до редколегії 22.01.2014