УДК 517.9

Т. А. Божанова
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ПРО ІСНУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ ЗАДАЧ ВЕКТОРНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ КЕРУВАННЯ НА МЕРЕЖІ

Наведено гідродинамічну модель для транспортного потоку на мережі. У припущенні, що транспортний потік на ребрах мережі є об'єктом керування, ставиться задача його оптимізації у векторній формі. Оскільки множина ефективних розв'язків такої задачі не є порожньою, доведено існування її узагальнених розв'язків.

Приведена гидродинамическая модель для транспортного потока на сети. В предположении, что транспортный поток на ребрах сети является объектом управления, ставится задача его оптимизации в векторной форме. Так как множество эффективных решений такой задачи не пусто, доказано существование ее обобщенных решений.

We consider the traffic flow models on networks in vector-valued optimization statement, where the flow is controlled on the edges of network. As the set of the efficient solutions of this problem is not empty, we prove the existence of its generalized solutions.

Ключові слова: транспортний потік на мережі, гідродинамічна модель, векторна оптимізація, узагальнені розв'язки.

Вступ. На сьогодні існує ціла низка робіт як вітчизняних, так і зарубіжних, присвячених проблемі моделювання руху транспортних потоків [2; 3], розробці необхідних умов оптимальності та оптимальних законів керування такими процесами у припущенні, що якість керування на мережі оцінюється за усередненими параметрами [4; 5]. Проте більш ефективними є дослідження проблеми оптимізації транспортних потоків з точки зору задач векторної оптимізації, які є більш точними моделями реальних процесів. Разом з тим, проблема розв'язності задач векторної оптимізації в нормованих просторах не є тривіальною, оскільки існування розв'язків таких задач та їх властивості суттєво залежать від багатьох чинників, наприклад, від властивостей цільового відображення, від властивостей множини допустимих розв'язків, від порядкового конуса, від вибору топологій у цільовому просторі тощо.

© *Т. А. Божанова, 2014*

У даній роботі головним об'єктом дослідження виступає гідродинамічна модель транспортного потоку на мережі, що складається зі скінченної сукупності доріг, які з'єднані певними вузлами. Припускається, що якість керування транспортним потоком на ребрах мережі визначається нескалярним відображенням у простір $L^2(\Omega_T)$, який упорядкований за конусом Λ додатних елементів. За цих припущень встановлено, що поставлена задача векторної оптимізації з розподіленими параметрами на мережі допускає існування так званих ефективних розв'язків [1]. Використовуючи загальновідомий метод побудови розв'язків задач векторної оптимізації, а саме застосовуючи процедуру скаляризації, доведемо існування узагальнених розв'язків такої задачі.

Постановка задачі. Нехай $\Omega = (\tilde{I}, \tilde{J})$ − транспортна мережа, котра налічує строго N доріг. Для $i \in \{1,...,N\}$ дорога I_i відповідає відрізку $[a_i, b_i]$, $\rho_i = \rho_i(t,x)$ − щільність машин на дорозі I_i в точці $x \in [a_i, b_i]$, $t \in [0,T]$, $\rho_{\max,i}$ − максимально можлива щільність на дорозі, котра відповідає появі затору на даній ділянці мережі. Припустимо, що дороги даної мережі відповідають ребрам графу Φ, обмеженому областю Ω, а вузли, які з'єднують дороги, − вершинам цього графу. Припускається, що на кожному ребрі мережі динаміка руху описується таким нелінійним диференціальним рівнянням у частинних похідних І-го порядку [6]:

$$\partial_t \rho_i(t,x) + \partial_x f_i(\rho_i(t,x)) = u_i,\ (t,x) \in (0,T) \times (a_i, b_i) \equiv \Omega_{i,T}$$

з початковими умовами

$$\rho_i(0,x) = \bar{\rho}_i(x),\ \forall x \in (a_i, b_i) \qquad (2)$$

та функцією потоку

$$f(\rho) = \rho \upsilon(\rho), \qquad (3)$$

де $\upsilon(\rho)$ − швидкість машин, при цьому $\upsilon(\rho)$ є спадною функцією щільності ρ, а функції потоку $f_i(\rho)$ мають задовольняти умовам: 1) $f_i(\rho)$ неперервно диференційовні на $[0, \rho_{\max,i}]$; 2) $f_i(0) = f_i(\rho_{\max,i}) = 0$; 3) f_i – строго увігнуті; $\exists \sigma \in (0, \rho_{\max,i}) : f_i'(\sigma_i) = 0$ та $(\rho - \sigma_i) f_i'(\rho) < 0$, $\forall \rho \neq \sigma_i$. Вважається, що у кожному вузлі J з n вхідними ребрами

$I_1,...,I_n$ та m вихідними ребрами $I_{n+1},...,I_{n+m}$ виконується умова балансу

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(\rho_i(t,b_i)) = \sum_{i=n+1}^{n+m} f_i(\rho_i(t,a_i)),\ \forall t \in [0,T],\ \forall J \in \tilde{J};$$

задана матриця розподілу руху $A(J) \in R^{n+m}$ з властивостями

$$A(J) = [\alpha_{ji}(J)],\ j \in \{n+1,...,n+m\}, i \in \{1,...,n\},$$

$$\begin{cases} \alpha_{ji}(J) \neq \alpha_{ji'}(J),\ \forall i \neq i',\ 0 < \alpha_{ji}(J) < 1, \\ \sum_{j=n+1}^{n+m} \alpha_{ji}(J) = 1,\ \forall i \in \{1,...,N\} \end{cases}$$

та $\forall k \in R$ виконується ентропійна умова Кружкова на мережі

$$\int_0^T \int_{a_i}^{b_i} \left(|\rho_i - k| \partial_t \tilde{\varphi} + \operatorname{sgn}(\rho_i - k)(f_i(\rho_i) - f_i(k)) \partial_x \tilde{\varphi} \right) dx\, dt \geq 0,$$

для довільних гладких функцій φ та $\tilde{\varphi}: [0,T] \times I_i \to R$ з компактними носіями на множині $(0,T) \times (a_i, b_i)$. За цих припущень можна гарантувати існування та єдиність слабкого розв'язку задачі Коші в класі функцій з обмеженою повною варіацією.

Пов'яжемо із задачею (1) – (3) таку задачу векторної оптимізації:

$$\begin{cases} \textit{знайти } u^* \in U_{ad} \ \textit{такі, що} \\ F(u^*, \rho(u^*)) \in Sup_{u \in U_{ad}}^{\Lambda, \omega} F(u, \rho) \end{cases}, \tag{4}$$

де $u = (u_1,...,u_N)$ – функції керування транспортним потоком, які задані на ребрах мережі; $F: U_{ad} \times C(0,T; L^\infty(\Omega) \cap BV(\Omega)) \to L^2(\Omega)$ – цільове відображення; Λ – упорядкований конус додатних елементів у просторі $X = L^2(\Omega_{1,T}) \times ... \times L^2(\Omega_{N,T})$; ω – слабка топологія простору X; функція щільності $\rho = (\rho_1,...,\rho_N): \Omega_T \to R^N$, $\rho_i \in L^\infty(0,T; BV(I_i))$, $i = \overline{1,N}$, задовольняє таким умовам:

$$\begin{cases} \int_0^T \int_{a_i}^{b_i} (\rho_t\, \partial_t \phi + f_i(\rho_i)\, \partial_x \phi)\, dx dt = \int_0^T \int_{a_i}^{b_i} u_i\, dx dt, \\ \forall \phi \in C_0^\infty((0,T) \times (a_i, b_i)),\ \forall I_i \in \tilde{I},\ i = \overline{1,N}; \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \int_0^T \int_{a_i}^{b_i} \left(|\rho_i - k| \partial_t \tilde{\phi} + \operatorname{sgn}(\rho_i - k)(f_i(\rho_i) - f_i(k)) \partial_x \tilde{\phi} \right) dx dt \geq 0, \\ \forall k \in R,\ \forall \tilde{\phi} \in C_0^\infty((0,T) \times (a_i, b_i)),\ \tilde{\phi} \geq 0,\ \forall i = \overline{1,N}; \end{cases} \tag{6}$$

$$\rho_i(0,\cdot) = \overline{\rho}_i \quad \text{на } I_i, \quad \forall i = \overline{1,N}; \tag{7}$$

$$\begin{cases} f_j(\rho_j(\cdot, a_j^+)) = \sum_{i=1}^n \alpha_{ji} f_i(\rho_i(\cdot, b_i^-)), \\ \forall J \in \tilde{J},\ \forall j = n+1, \ldots, n+m; \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} L(J, u^k, \rho) := \sum_{i=1}^n f_i(\rho_i(\cdot, b_i^-)) \text{ досягає максимального} \\ \text{значення на парі } (u^k, \rho) \text{ при обмеженнях } (5) - (8). \end{cases} \tag{9}$$

Припускається, що функції керування u_i, $i \in \{1, \ldots, N\}$ належать множині $U = \prod_{i=1}^N L^\infty(\Omega_{i,T})$ і виконуються такі умови:

1) $f = (f_1, \ldots, f_N) : R \to R^N$ – локально Ліпшицева функція;

2) множиною допустимих керувань U_{ad} виступає обмежена підмножина в U, яка є замкненою в $L^1(\Omega_{1,T}) \times \ldots \times L^1(\Omega_{N,T})$.

У якості такої множини допустимих керувань візьмемо множину функцій, які є обмеженими майже скрізь та мають обмежену повну варіацію, тобто

$$\tilde{U}_{ad} = \left\{ u \in \prod_{i=1}^N \left(L^\infty(\Omega_{i,T}) \cap BV(\Omega_{i,T}) \right), \|u_i\|_{L^\infty(\Omega_{i,T})} \leq c_i, \|u_i\|_{BV(\Omega_{i,T})} \leq d_i \right\}.$$

У роботі [1] показано, що будь-яка послідовність $\left\{ u^k = \left(u_1^k, \ldots, u_n^k \right) \right\}_{k=1}^\infty \subset \tilde{U}_{ad}$ містить підпослідовність, яка збігається сильно до деякого $u^* \in \tilde{U}_{ad}$ у просторі $L^1(\Omega_{1,T}) \times \ldots \times L^1(\Omega_{N,T})$.

Означення 1. Будемо казати, що задача (4) є регулярною, якщо для заданої сукупності функцій потоку $f = (f_1, \ldots, f_N)$ існує пара $(u, \rho) \in \tilde{U}_{ad} \times L^\infty(0, T; BV(\Omega))$, де $\rho = \rho(u)$ – це відповідний розв'язок задачі (4) – (9) і такий, що $F(u, \rho) >_\Lambda z$ для деякого елемента $z \in L^2(\Omega_T)$.

Позначемо через Ξ множину всіх допустимих пар задачі (4) – (9). Очевидно, що $\Xi \subset \widetilde{U}_{ad} \times L^{\infty}(0,T;BV(\Omega))$. У роботі [1] було доведено, що Ξ є секвенційно компактною відносно τ-збіжності, де τ – це топологія на $Y = \widetilde{U}_{ad} \times L^2(0,T;BV(\Omega))$, яка задана як добуток сильної збіжності в $L^1(\Omega_T)$ та слабкої топології в просторі $L^2(0,T;BV(\Omega))$.

Означення 2. Пару $(u^{eff}, \rho^{eff}) \in \Xi$ будемо називати (Λ, ω)-ефективним розв'язком задачі (4) − (9), якщо пара (u^{eff}, ρ^{eff}) реалізує (Λ, ω)-супремум відображення $F : \Xi \to L^2(\Omega_T)$, тобто

$$F(u^{eff}, \rho^{eff}) \in Sup^{\Lambda,\omega}_{(u,\rho)\in\Xi} F(u,\rho) = Sup^{\Lambda,\omega}\{F(u,\rho) : \forall (u,\rho) \in \Xi\}.$$

Позначимо через $Eff_{\omega}(\Xi; F; \Lambda)$ множину всіх (Λ, ω)-ефективних розв'язків задачі (4)-(9) та нехай $\hat{F} : \left[\widetilde{U}_{ad} \times L^{\infty}(0,T;BV(\Omega))\right] \to Y^{\bullet}$ – деяке розширення відображення $F : \Xi \to L^2(\Omega_T)$ на весь простір $\widetilde{U}_{ad} \times L^2(0,T;BV(\Omega))$. Тут через $Y^{\bullet}$ позначено частково розширений простір Банаха $L^2(\Omega_T) \cup \{-\infty_{\Lambda}\}$.

Означення 3. Будемо казати, що відображення $F : \Xi \to L^2(\Omega_T)$ є $(\Lambda, \tau \times \omega)$-напівнеперервним зверху ($(\Lambda, \tau \times \omega)$-нн. зв.) у точці $(u^0, \rho^0) \in \Xi$, якщо $F(u^0, \rho^0) \in \limsup^{\Lambda,\omega}_{\substack{\tau \\ (u,\rho)\to(u^0,\rho^0)}} \hat{F}(u,\rho)$. Відображення F є $(\Lambda, \tau \times \omega)$-нн. зв. на множині Ξ, якщо F є $(\Lambda, \tau \times \omega)$-нн. зв. на кожній парі з Ξ.

Оскільки множина Ξ допустимих пар є секвенційно компактною в заданій топології τ, то це дає підстави гарантувати розв'язність широкого класу оптимізаційних задач для транспортних потоків на мережах. Отже, наведемо теорему, яка торкається існування ефективних розв'язків задачі векторної оптимізації (4) – (9) (доведення див. у [1]).

Теорема 1. Припустимо, що задача векторної оптимізації (4) – (9) є регулярною. Нехай задано $(\Lambda, \tau \times \omega)$-нн. зв. відображення

$F:\Xi\to L^2(\Omega_T)$. Тоді задача (4) – (9) має непорожню множину (Λ,ω)-ефективних розв'язків.

Як відомо, загальним методом побудови розв'язків задач векторної оптимізації є залучення процедури їх скаляризації. Тож пов'яжемо із задачею векторної оптимізації (4) – (9) скалярну задачу

$$F_\lambda(u,\rho)=\int_\Omega F(u,\rho)\,\lambda(x)\,dx\to\sup,$$
$$(u,\rho)\in\tilde{U}_{ad}\times L^\infty(0,T;BV(\Omega)), \tag{10}$$

де λ – це елемент конуса

$$\Lambda=\left\{f=(f_1,...,f_N)\in L^2(\Omega): f_i(x)\ge 0\ м.с.на\ \Omega=\prod_{i=1}^N(a_i,b_i)\right\}.$$

Функціонал F_λ називатимемо λ-згорткою відображення F.

Узагальнені розв'язки. Нехай λ – довільний елемент конуса Λ. Позначимо через

$$Sol(\Xi;F_\lambda):=Arg\max_{(u,\rho)\in\Xi}F_\lambda(u,\rho)$$

множину розв'язків скалярної задачі (10).

Наведемо допоміжні означення, які будуть потрібні у подальшому.

Означення 4. Будемо казати, що послідовність $\{(u^k,\rho^k)\}_{k=1}^\infty\subset\Xi$ є максимізуючою для задачі векторної оптимізації (4) – (9), якщо

$$F(u^k,\rho^k)\to\xi \text{ слабко в } L^2(\Omega_T),$$

де ξ – елемент з множини $Sup_{(u,\rho)\in\Xi}^{\Lambda,\omega}F(u,\rho)$.

Означення 5. Будемо казати, що задача векторної оптимізації (4) – (9) є добре обумовленою відносно τ-топології на Y, якщо вона є розв'язною і кожна максимізуюча послідовність $\{(u^k,\rho^k)\}_{k=1}^\infty\subset\Xi$ містить підпослідовність, τ-збіжну до деякої пари з $Eff_\omega(\Xi;F;\Lambda)$. У цьому випадку максимізуючу послідовність називають максимізуючою послідовністю за Тихоновим. Також будемо казати, що задача векторної оптимізації (4) – (9) є добре поставленою за Тихоновим відносно τ-топології на Y, якщо вона є розв'язною, і кожна максимізуюча

послідовність з множини $\Xi \setminus Eff_{\omega}(\Xi; F; \Lambda)$ має τ-граничну пару у множині $Eff_{\omega}(\Xi; F; \Lambda)$.

Означення 6. Будемо казати, що пара $(u^*, \rho^*) \in \Xi$ є $(\tau; \omega)$-узагальненим розв'язком задачі (4) – (9), якщо існує послідовність $\{(u^k, \rho^k)\}_{k=1}^{\infty}$ з множини Ξ та елемент $\xi \in Sup_{(u,\rho)\in\Xi}^{\Lambda,\omega} F(u, \rho)$ такі, що $(u^k, \rho^k) \overset{\tau}{\to} (u^*, \rho^*)$ в Y і $F(u^k, \rho^k) \to \xi$ слабко в $L^2(\Omega_T)$.

Позначимо через $GenEff_{\tau,\omega}(\Xi; F; \Lambda)$ множину всіх $(\tau; \omega)$-узагальнених розв'язків задачі (4) – (9). Очевидно, що $Eff_{\omega}(\Xi; F; \Lambda) \subseteq$ $\subseteq GenEff_{\tau,\omega}(\Xi; F; \Lambda)$. Проте у загальному випадку, обернене включення $GenEff_{\tau,\omega}(\Xi; F; \Lambda) \subset Eff_{\omega}(\Xi; F; \Lambda)$ не є правильним. Логічним наслідком теореми 1 є наступний результат.

Твердження 1. За умови виконання припущень теореми 1 задача векторної оптимізації (4) – (9) є добре поставленою за Тихоновим відносно τ-топології на Y, і при цьому

$$GenEff_{\tau,\omega}(\Xi; F; \Lambda) = Eff_{\omega}(\Xi; F; \Lambda).$$

Для того, щоб отримати суттєві умови, які б гарантували, що множина $(\tau; \omega)$-узагальнених розв'язків задачі (4) – (9) не є порожньою, скористаємося скалярним представленням цієї задачі у вигляді (10).

Нехай $sc_{\tau}^{-} F_{\lambda} : \Xi \to R$ – τ-напівнеперервна зверху регуляризація функціонала

$$F_{\lambda}(u, \rho) = \int_{\Omega} F(u, \rho)\, \lambda(x)\, dx \text{ з деяким } \lambda \in \Lambda,$$

тобто $sc_{\tau}^{-} F_{\lambda}$ є найменшим τ-напівнеперервним зверху функціоналом, який задовольняє умову $sc_{\tau}^{-} F_{\lambda}(u, \rho) \geq F_{\lambda}(u, \rho)$, $\forall (u, \rho) \in \Xi$. Тоді, згідно з прямим методом варіаційного числення, маємо:

Твердження 2. Нехай $\Xi \subset \widetilde{U}_{ad} \times L^{\infty}(0,T;BV(\Omega))$, $\Xi \neq \emptyset$. Тоді для фіксованого $\lambda \in \Lambda$ кожна максимізуюча послідовність для скалярної задачі

$$\sup_{(u,\rho)\in\Xi} sc_{\tau}^{-} F_{\lambda}(u,\rho) \tag{11}$$

має τ-граничну пару, яка є максимумом $sc_{\tau}^{-} F_{\lambda}$ на Ξ, тобто $Sol(\Xi; sc_{\tau}^{-} F_{\lambda}) \neq \emptyset$.

Теорема 2. Припустимо, що задача векторної оптимізації (4) – (9) є регулярною. Нехай задано цільове відображення $F : \Xi \to L^2(\Omega_T)$ (не обов'язково $(\Lambda, \tau \times \omega)$-напівнеперервне зверху на Ξ). Тоді має місце таке включення:

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda^{\#}} Arg\max_{(u,\rho)\in\Xi} sc_{\tau}^{-} F_{\lambda}(u,\rho) \subseteq GenEff_{\tau,\omega}(\Xi; F; \Lambda). \tag{12}$$

Доведення. Для початку зауважимо, що для конуса додатних елементів Λ у просторі $L^2(\Omega_T)$ маємо: $cor(\Lambda) \subset \Lambda^{\#}$. Тому квазівнутрішність $\Lambda^{\#}$ конуса Λ не є порожньою. Нехай λ – довільний елемент з $\Lambda^{\#}$. Тоді, згідно з твердженням 2, існує принаймні одна пара $(u^*, \rho^*) \in \Xi$ така, що

$$(u^*, \rho^*) \in Arg\max_{(u,\rho)\in\Xi} sc_{\tau}^{-} F_{\lambda}(u,\rho). \tag{13}$$

Оскільки $sc_{\tau}^{-} F_{\lambda}(u,\rho)$ є τ-нн. зв. границею функціонала $F_{\lambda}(u,\rho)$, то існує послідовність $\left\{(u^k, \rho^k)\right\}_{k=1}^{\infty} \subset \Xi$ така, що $(u^k, \rho^k) \xrightarrow{\tau} (u^*, \rho^*)$ та

$$\begin{aligned} &\lim_{k\to\infty} \int_{\Omega} F(u^k, \rho^k)\,\lambda(x)\,dx = sc_{\tau}^{-} F_{\lambda}(u^*, \rho^*) \geq \\ &\geq sc_{\tau}^{-} F_{\lambda}(u,\rho) \geq \int_{\Omega} F(u,\rho)\,\lambda(x)\,dx,\ \forall (u,\rho) \in \Xi \end{aligned}. \tag{14}$$

Оскільки $\Lambda^{\#} \cup \{0\}$ непорожній випуклий конус в $L^2(\Omega_T)$ з непорожньою алгебраїчною внутрішністю, то цей конус є відтворюючим в

$L^2(\Omega_T)$, тобто $[\Lambda^{\#} \cup 0] - [\Lambda^{\#} \cup 0] = L^2(\Omega_T)$. Тоді в просторі $L^2(\Omega_T)$ впорядкований конус Λ є нормованим відносно норми топології $L^2(\Omega_T)$, тобто

$$y <_{\Lambda} z \Rightarrow \qquad \Rightarrow \|y\|_{L^2(\Omega_T)} < \|y\|_{L^2(\Omega_T)}. \tag{15}$$

Тепер, повертаючись до виразу (14), отримуємо: існує число $\hat{k} \in N$ і елемент $\hat{y} \in L^2(\Omega_T)$ такі, що

$$\int_{\Omega} F\left(u^k, \rho^k\right) \lambda(x)\, dx > \int_{\Omega} \hat{y}\ \lambda(x)\, dx,\ \forall k > \hat{k}.$$

Оскільки $\lambda \in \Lambda^{\#}$, то це означає, що $F(u^k, \rho^k) >_{\Lambda} \hat{y}$ для всіх $k > \hat{k}$. Використовуючи властивість (15), приходимо до висновку, що існує константа $C > 0$ така, що $\left\|F(u^k, \rho^k)\right\|_{L^2(\Omega_T)} \le C$ для всіх $k > \hat{k}$. Тому можемо припустити, що послідовність $\left\{F(u^k, \rho^k)\right\}_{k=1}^{\infty}$ є обмеженою в $L^2(\Omega_T)$. Отже, за теоремою Банаха-Алаоглу, існує елемент $\eta \in L^2(\Omega_T)$ і підпослідовність з послідовності $\left\{F(u^k, \rho^k)\right\}_{k=1}^{\infty}$ (для якої збережемо той же індекс k) такі, що $F(u^k, \rho^k) \to \eta$ слабко в $L^2(\Omega_T)$ при $k \to \infty$.

Припустимо тепер, що

$$(u^*, \rho^*) \notin GenEff_{\tau,\omega}(\Xi; F; \Lambda). \tag{16}$$

Тоді, згідно з означенням 6, $\eta \notin Sup^{\Lambda,\omega}_{(u,\rho)\in\Xi} F(u,\rho)$. Звідси випливає, що існує елемент $\xi \in Sup^{\Lambda,\omega}_{(u,\rho)\in\Xi} F(u,\rho)$ такий, що $\xi >_{\Lambda} \eta$. Тому $\xi - \eta \in \Lambda \setminus \{0\}$, і використовуючи той факт, що $\lambda \in \Lambda^{\#}$, приходимо до нерівності

$$\int_{\Omega} \eta(x)\, \lambda(x)\, dx < \int_{\Omega} \xi(x)\, \lambda(x)\, dx, \tag{17}$$

яка еквівалентна тому, що $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{\Omega} F(u,\rho)\, \lambda(x)\, dx < \int_{\Omega} \xi(x)\, \lambda(x)\, dx$.

З іншого боку, для елемента $\xi \in Sup^{\Lambda,\omega}_{(u,\rho)\in\Xi} F(u,\rho)$ існує послідовність

$\{(u^k, \rho^k)\}_{k=1}^{\infty} \subset \Xi$ така, що $F(\tilde{u}^k, \tilde{\rho}^k) \to \xi$ слабко в $L^2(\Omega_T)$. Оскільки множина Ξ є секвенційно τ-компактною, то можемо припустити, що $(\tilde{u}^k, \tilde{\rho}^k) \xrightarrow{\tau} (\tilde{u}^*, \tilde{\rho}^*)$. Тоді, згідно з нерівністю (14), маємо:

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega F(u^k, \rho^k)\,\lambda(x)\,dx \geq \int_\Omega F(\tilde{u}^i, \tilde{\rho}^i)\,\lambda(x)\,dx,\ \forall i \in N. \quad (18)$$

Переходячи до границі у (18), отримаємо:

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega F(u^k, \rho^k)\,\lambda(x)\,dx \geq \int_\Omega \xi(x)\,\lambda(x)\,dx.$$

Проте це суперечить нерівності (17), а отже і (16). Таким чином, (u^*, ρ^*) є $(\tau;\omega)$-узагальненим розв'язком задачі векторної оптимізації (4) – (9).

Висновки. У роботі досліджено з точки зору задач векторної оптимізації проблему керування транспортними потоками на мережах, динаміка руху яких описується нелінійними законами збереження, що приводять до розгляду системи нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних І-го порядку. Залучаючи процедуру скаляризації задач векторної оптимізації та ідеологію регуляризації за Тихоновим, було доведено існування узагальнених розв'язків поставленої задачі векторної оптимізації, які можна розглядати як альтернативу ефективним.

Бібліографічні посилання

1. **Божанова Т. А.** Про одну задачу керування з розподіленими параметрами на транспортній мережі / Т. А. Божанова // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. − 2011. − Т. 19, № 8. − С. 114–127.
2. **Гук В. І.** Транспортні потоки: теорія та її застосування в урбаністиці: моногр. / В. І. Гук, Ю. М. Шкодовський. − Х. : "Золоті сторінки", 2009. − 232 с.
3. Макро- и микроскопические модели для описания движения автотранспорта на многополосных магистралях / Б. Н. Четвёрушкин, М. А. Трапезникова, И. Ф. Фурманова, Н. Г. Чурбанова // Труды МФТИ. − 2010. − Т. 2, №4. − С.163–168.
4. **Garavello M.** Traffic Flow on Networks / M. Garavello, B. Piccoli // AIMS Series on Appl. Math. − 2006. − Vol. 1. − P. 243.
5. **Gugat M.** Optimal Control for Traffic Flow Networks / M. Gugat, M. Herty, A. Klar, G. Leugering // Journal of Optimization Theory and Applications. − 2005. − № 126. − P. 589–616.
6. **Lighthill M. L.** On kinetic waves / M. L. Lighthill, J. B. Whitham // Proceedings of Royal Society of Edinburg. − 1983. − № 229(A). − P. 217–243.

Надійшла до редколегії 28.01.2014