УДК 519.658

В. Г. Боборикін[*], В. Л. Волошко[**], Л. В. Волошко[**]
[*]Навчально-тренувальний центр Кримської електроенергетичної системи
[**]Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ПРО ОДИН ЕФЕКТИВНИЙ ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК НЕОДНОРІДНОГО БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ ТА ПОСТАНОВКИ ОПТИМІЗАЦІЙНИХ ЗАДАЧ

Розглянуто метод потенціалу для розв'язання крайової задачі для неоднорідного бігармонічного рівняння у випадку складної форми області. Отримання ефективних чисельних результатів послужило базою для формулювання трьох задач безумовної оптимізації.

Рассмотрен метод потенциала для решения граничной задачи для неоднородного бигармонического уравнения в случае сложной формы области. Получение эффективных численных результатов послужило базой для формулирования трех задач безусловной оптимизации.

Potential method was considered for boundary value problem solution with inhomogeneous biharmonic equation in case of the domain of irregular shape. Getting of effective results is the base for formulation of three unconstrained optimization problems.

Ключові слова: крайова задача, оптимізаційна задача, бігармонічне рівняння, неканонічна форма області.

Вступ

Оптимізаційні задачі математичної фізики є важливою галуззю сучасної математики з точки зору практичного застосування. Аналіз останніх наукових досліджень у цій царині свідчить, що ефективні розв'язки крайових задач бігармонічних рівнянь для областей складної форми мало вивчені з точки зору побудови на їх основі оптимізаційних алгоритмів.

Крайова задача для неоднорідного бігармонічного рівняння Розглянемо таку задачу. Необхідно знайти розв'язок неоднорідного бігармонічного рівняння

$$\Delta\Delta w = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega \tag{1}$$

© В. Г. Боборикін, В. Л. Волошко, Л. В. Волошко, 2014

при крайових умовах

$$w = \varphi(x, y), \quad \frac{dw}{dn} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma \tag{2}$$

в області складної форми Ω, обмеженої контуром Γ.

Коротко наведемо алгоритм розв'язку цієї задачі, який особливо ефективний для випадку області складної форми.

Частинним розв'язок бігармонічного рівняння [1]

$$w_1(x, y) = \frac{1}{8\pi} \iint_{\Omega} r^2 \ln r \cdot f(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta), \tag{3}$$

де $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$.

Тоді розв'язком задачі для однорідного бігармонічного рівняння

$$\Delta\Delta w = 0, \quad (x, y) \in \Omega \tag{4}$$

при крайових умовах

$$\begin{aligned} &w = \varphi(x, y) - w_1(x, y) = \tilde{\varphi}(x, y), \\ &\frac{dw}{dn} = \psi(x, y) - \frac{dw_1}{dn}(x, y) = \tilde{\psi}(x, y) \end{aligned}, \quad (x, y) \in \Gamma \tag{5}$$

буде сума бігармонічних потенціалів

$$w_2(x, y) = \int_{\Gamma} \left(r^2 \ln r \right) \cdot \mu_1(\xi, \eta) d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(r^2 \ln r \right) \cdot \mu_2(\xi, \eta) d\Gamma, \tag{6}$$

де μ_1, μ_2 – невідомі функції щільності.

Задоволення крайових умов (5) приводить до системи інтегральних рівнянь:

$$\int_{\Gamma} A(\xi, \eta; x, y)\big|_{(x,y)\in\Gamma} \cdot \begin{pmatrix} \mu_1(\xi, \eta) \\ \mu_2(\xi, \eta) \end{pmatrix} d\Gamma(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}(x, y) \\ \tilde{\psi}(x, y) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

з якої будуть знайдені невідомі функції μ_1, μ_2. Система (7) записана у матричному вигляді, де

$$A(\xi,\eta;x,y)=\left\|\begin{array}{cc} r^2\ln r & \dfrac{\partial}{\partial\nu}(r^2\ln r) \\ \dfrac{\partial}{\partial n}(r^2\ln r) & \dfrac{\partial}{\partial n\partial\nu}(r^2\ln r)\end{array}\right\|=\left\|\begin{array}{cc} \breve{G}_1 & \breve{G}_2 \\ \dfrac{\partial\breve{G}_1}{\partial n} & \dfrac{\partial\breve{G}_2}{\partial n}\end{array}\right\|. \qquad (8)$$

Алгоритм розв'язку системи (7) детально розглянуто в [3].

Розв'язком задачі (1) – (2) буде сума функцій (3) і (6) з відомими $\mu_1,\ \mu_2$. Або детальніше

$$\begin{gathered} w(x,y)=\frac{1}{8\pi}\iint\limits_{\Omega} r^2\ln r\cdot f(\xi,\eta)d\Omega(\xi,\eta)+ \\ +\int\limits_{\Gamma}\left(\breve{G}_1(x,y;\xi,\eta),\breve{G}_2(x,y;\xi,\eta)\right)\Big|_{(x,y)\in\Omega}\cdot\begin{pmatrix}\mu_1(\xi,\eta)\\ \mu_2(\xi,\eta)\end{pmatrix}d\Gamma(\xi,\eta). \end{gathered} \qquad (9)$$

Для формулювання оптимізаційної задачі, необхідно записати розв'язок так, щоб у явному вигляді були присутні функції $\varphi(x,y)$ та $\psi(x,y)$.

Виразимо $\mu_1,\ \mu_2$ з системи інтегральних рівнянь (7)

$$\begin{pmatrix}\mu_1(\xi,\eta)\\ \mu_2(\xi,\eta)\end{pmatrix}=A^{-1}(\xi,\eta;x,y)\cdot\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}(x,y)\\ \tilde{\psi}(x,y)\end{pmatrix}$$

і підставимо в розв'язок (9). Отримаємо:

$$\begin{gathered} w(x,y)=\frac{1}{8\pi}\iint\limits_{\Omega} r^2\ln r\cdot f(\xi,\eta)d\Omega(\xi,\eta)+ \\ +\int\limits_{\Gamma}\left(\breve{G}_1(x,y;\xi,\eta),\breve{G}_2(x,y;\xi,\eta)\right)\Big|_{(x,y)\in\Omega}\cdot A^{-1}(\xi,\eta;x,y)\cdot\begin{pmatrix}\tilde{\phi}(\xi,\eta)\\ \tilde{\psi}(\xi,\eta)\end{pmatrix}d\Gamma(\xi,\eta). \end{gathered}$$

Тепер позначимо

$$\begin{gathered}\left(G_1(x,y;\xi,\eta),G_2(x,y;\xi,\eta)\right)= \\ =\left(\breve{G}_1(x,y;\xi,\eta),\breve{G}_2(x,y;\xi,\eta)\right)\Big|_{(x,y)\in\Omega}\cdot A^{-1}(x,y;\xi,\eta).\end{gathered}$$

І тоді остаточно роз'язок задачі (1) – (2) матиме такий вигляд:

$$w(x,y)=\frac{1}{8\pi}\iint_{\Omega}\tilde{G}_1(x,y;\xi,\eta)\cdot f(\xi,\eta)d\Omega(\xi,\eta)+$$
$$+\int_{\Gamma}\left(G_1(x,y;\xi,\eta),G_2(x,y;\xi,\eta)\right)\cdot\begin{pmatrix}\tilde{\phi}(\xi,\eta)\\ \tilde{\psi}(\xi,\eta)\end{pmatrix}d\Gamma(\xi,\eta), \qquad (10)$$

де $G_1(x,y;\xi,\eta), G_2(x,y;\xi,\eta)$ − називають функціями впливу правих частин.

Наведемо приклад, який ілюструє ефективність обраного підходу. Нехай модельна функція має вигляд $w(x,y)=x^4/24$. Тоді маємо задачу:

$$\Delta\Delta w(x,y)=1,\ (x,y)\in\Omega$$
$$\varphi(x,y)\big|_{\Gamma}=x^4/24, \qquad \psi(x,y)\big|_{\Gamma}=\left(x^3/6\right)\cdot\cos(n\hat{}\,x).$$

Чисельний розв'язок наведено в табл. 1.

Обираємо складний контур гіпоциклоїди, яка задається рівннями

$$x=(R-r)\cos\varphi+d\cos\left(\frac{R-r}{r}\varphi\right)$$
$$y=(R-r)\sin\varphi+d\sin\left(\frac{R-r}{r}\varphi\right).$$

Розрахунки проведені для таких параметрів: нерухоме коло радіусом *R=6*, радіус твірного кола *r=1.2*, відстань до точки *d=1*.

Таблиця 1

Результати обчислень

(x,y)	$w_{наближене}$	$w_{точне}$	Похибка
(1.5, 4)	0.2108956	0.2109375	0.0000419
(2, 0.25)	0.6668450	0.6666667	0.0001783
(2.75, 3.5)	2.3957681	2.3829753	0.0127928
(4.25, 0.5)	13.594732	13.593913	0.000819
(6, 0)	54.002465	54.000000	0.002465

Таким чином, чисельні результати підтверджують ефективність запропонованого розв'язку. Отже, цей метод можна використати для розв'язування більш складних задач, які вимагають побудови ітераційного процесу, на кожному кроці якого розв'язується лінійна задача.

Задача 1. Ідентифікація функції правої частини однієї з крайових умов

Спочатку наведемо фізичний приклад. Як відомо, неоднорідне бігармонічне рівняння описує згин пластини при поперековому навантаженні на неї, яке визначається функцією правої частини цього рівняння. Нехай маємо щільний півпростір з нескінченним наскрізним отвором форми Ω, в якому закріплено пластину такої ж форми.

Нехай значення однієї з крайових умов:

$$w(x,y)=\varphi(x,y)=0, \qquad (x,y)\in\Gamma .$$

Фізично це означає, що граничні точки пластини не зміщуються, тобто вона закріплена по контуру.

Функція $\psi(x,y)$ визначає тангенс кута нахилу α пластини в її граничних точках, тобто спосіб кріплення пластини (рис. 1).

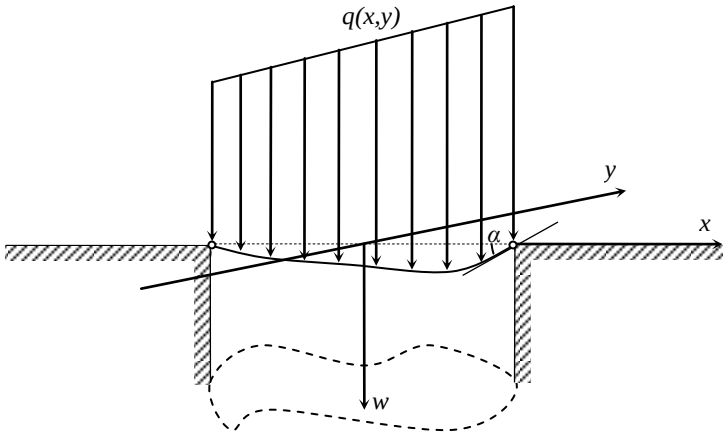


Рис. 1. Згин пластини під дією навантаження *f(x,y)*

Оптимізаційна задача полягає в тому, що необхідно відшукати такі кути нахилу крайових точок $tg\alpha(x,y)=\psi(x,y),\quad (x,y)\in\Gamma$, при яких сума квадратів прогинів по всій області пластини буде мінімальною [2].

Таким чином маємо задачу:

$$\Delta\Delta w = f(x,y),\quad (x,y)\in\Omega. \tag{11}$$

$$w=\varphi(x,y)\equiv 0,\quad \frac{dw}{dn}=\psi(x,y),\quad (x,y)\in\Gamma. \tag{12}$$

$$I(\psi(x,y))=\iint\limits_{\Omega} w^2(x,y)dxdy=\iint\limits_{\Omega}\left[\iint\limits_{\Omega}\tilde{G}_1(x,y;\xi,\eta)\cdot f(\xi,\eta)d\xi d\eta+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{L}\left(G_1(x,y;\xi,\eta),G_2(x,y;\xi,\eta)\right)\begin{pmatrix}\tilde{\phi}(\xi,\eta)d\xi d\eta\\ \tilde{\psi}(\xi,\eta)d\xi d\eta\end{pmatrix}\right]^2 dxdy\to\min_{\tilde{\psi}}. \tag{13}$$

Очевидно

$$\psi(x,y)=\tilde{\psi}(x,y)+\frac{dw_1}{dn}(x,y).$$

Задача 2. Ідентифікація функції правої частини бігармонічного рівняння

Поставимо подібну задачу, але цього разу будемо шукати таке поперекове навантаження, тобто функцію *f(x,y)*, щоб сума квадратів прогинів по всій області пластини була мінімальною і виконувалися задані крайові умови.

$$\Delta\Delta w = f(x,y),\quad (x,y)\in\Omega. \tag{14}$$

$$w=\varphi(x,y)\equiv 0,\quad \frac{dw}{dn}=\psi(x,y),\quad (x,y)\in\Gamma. \tag{15}$$

$$I(\psi(x,y))=\iint\limits_{\Omega} w^2(x,y)dxdy=\iint\limits_{\Omega}\left[\iint\limits_{\Omega}\tilde{G}_1(x,y;\xi,\eta)\cdot f(\xi,\eta)d\xi d\eta+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{L}\left(G_1(x,y;\xi,\eta),G_2(x,y;\xi,\eta)\right)\begin{pmatrix}\tilde{\phi}(\xi,\eta)d\xi d\eta\\ \tilde{\psi}(\xi,\eta)d\xi d\eta\end{pmatrix}\right]^2 dxdy\to\min_{f}. \tag{16}$$

Задача 3. Оптимальне розбиття області

Постановки задач оптимального розбиття області та їх розв'язки для рівняння Лапласа наведені в [3; 4]. Природним чином виникає аналогічна задача для пластини, яку треба розбити на сегменти з різними навантаженнями, щоб сума квадратів прогинів по всій області пластини була мінімальною і виконувалися задані крайові умови.

Нехай $\Omega \subset E_2$ із гладкою границею *Г*. Введемо в розгляд клас $P_N(\Omega)$ усіх можливих розбиттів множини Ω на *N* підмножин.

$$P_N(\Omega) = \Big\{ \bar{\omega} = (\Omega_1, ..., \Omega_N) : \Omega_i \subseteq \Omega, i = \overline{1, N}; \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega;\ \Omega_i \bigcap \Omega_j = \varnothing,\ i \neq j,\ j = \overline{1, N} \Big\}.$$

Нехай стан керованого об'єкта описується функцією $w(x, y) \in C^4(\Omega)$, яка задовольняє крайову задачу

$$\Delta\Delta w = f(x, y; \bar{\omega}), \quad (x, y) \in \Omega. \tag{17}$$

$$w = \varphi(x, y), \quad \frac{dw}{dn} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma. \tag{18}$$

$$F = \Big\{ f(x, y; \bar{\omega}) : f(x, y; \bar{\omega}) = f_i(x, y), \quad x \in \Omega_i,\ i = \overline{1, N},\ \bar{\omega} = (\Omega_1, ..., \Omega_N) \in P_N(\Omega) \Big\}. \tag{19}$$

Як керування $f(x, y; \bar{\omega})$ виступає функція правої частини бігармонічного рівняння, яка залежить від розбиття $\bar{\omega} \in P_N(\Omega)$ множини Ω на підмножини $\Omega_1, ..., \Omega_N$. Множина допустимих керувань *F* являє собою клас кусково-неперервних на Ω функцій, які визначаються розбиттям $\bar{\omega}$ множини Ω таким чином, що для точок *(x,y)* кожної з підмножин $\Omega_i \in \bar{\omega} \in P_N(\Omega)$, $i = \overline{1, N}$, функція керування $f(x, y; \bar{\omega})$ співпадає з однією із заданих функцій $f_i(x, y)$. Розв'язок крайової задачі, який відповідає функції $f(x, y; \bar{\omega})$, позначимо $w(x, y; \bar{\omega})$.

Необхідно визначити таке розбиття $\bar{\omega}^* \in P_N(\Omega)$, для якого функція $f(x, y; \bar{\omega})$ надавала б мінімальне значення функціоналу

$$I(f(x,y;\bar{\omega})) = \iint\limits_{\Omega} w^2(x,y;\bar{\omega})dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\Omega}\left[\iint\limits_{\Omega}\tilde{G}_1(x,y;\xi,\eta)\cdot f(\xi,\eta;\bar{\omega})d\xi d\eta + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\Gamma}\left(G_1(x,y;\xi,\eta), G_2(x,y;\xi,\eta)\right)\cdot\begin{pmatrix}\phi(\xi,\eta)\\ \psi(\xi,\eta)\end{pmatrix}d\Gamma(\xi,\eta)\right]^2 dxdy \to \min_{f(\xi,\eta;\bar{\omega})}.$$

Бібліографічні посилання

1. **Арсенин В. Я.** Методы математической физики и специальные функции / В.Я. Арсенин. − М. : Наука, 1984. – 384 с.

2. **Боборикін В. Г.** Функции Грина для защемленной кирхгофовой пластины произвольного очератния / В.Г. Боборикін // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія: Механіка. – 2013. − №5(17). – Т.2. – С. 21−29.

3. **Волошко Л. В.** Щодо розв'язування крайової задачі для неоднорідного бігармонічного рівняння для області складної форми / Л. В. Волошко, О. М. Кісельова, В. Д. Ламзюк // Вісник Дніпропетр. ун-ту. Серія : Моделювання. – 2011. − №8(3). – Т.2. – С. 20−28.

4. **Кісельова О. М.** Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения : моногр. / Е.М. Киселева, Н.З. Шор – К. : Наук. думка, 2005. – 564 с.

5. **Коряшкина Л. С.** Решение одной задачи управления параболической системой / Л.С. Коряшкіна // Проблемы управления и информатики. – 1998. – № 2. – С. 94–102.

Надійшла до редколегії 02.06.2014