УДК 519.8

О. М. Кісельова, Л. І. Лозовська
Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

ПРО МОДЕЛЮВАННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ЗАДАЧ БАГАТОКРАТНОГО КУЛЬОВОГО ПОКРИТТЯ МНОЖИНИ

Обґрунтована актуальність та значимість неперервних задач про оптимальне k-кратне c-кульове покриття компактної множини Ω з E_n. Побудовані математичні моделі основних типів задач про оптимальне k-кратне покриття множини.

Обоснованы актуальность и значимость непрерывных задач об оптимальном k-кратном c-шаровом покрытии компактного множества Ω из E_n. Построены математические модели основных типов задач об оптимальном k-кратном покрытии множества.

Topicality and significance of the continuous optimal k-fold c-sphere covering problems of compact sets Ω of E_n is substantiated. Mathematical models for the principal types of the optimal k-fold covering problems are constructed.

Ключові слова: діаграма Діріхле – Вороного, розбиття множини, оптимальне покриття множини, багатократне покриття, радіус покриття.

Вступ. Робота присвячена розгляду та формулюванню деяких задач багатократного покриття множини. Численні технічні та економічні задачі зводяться до задач оптимального покриття заданої області зонами обслуговування (кулями). Прикладами можуть бути задачі розміщення різноманітних станцій технічного обслуговування, станцій стільникового зв'язку, безпровідного Інтернету, що є задачами оптимального покриття обмеженої області. Розв'язанню таких задач присвячена велика кількість публікацій. Огляд задач та аналіз методів їх розв'язання було проведено авторами даної роботи [1; 2]. Для неперервної задачі про оптимальне **c**-кульове по-криття компактної множини Ω з E_n заданою кількістю куль з мінімальним радіусом та задачі про покриття множини мінімальною кількістю куль заданих радіусів запропоновані та обґрунтовані алгоритми, що базуються на використанні теорії оптимального розбиття множин та r-алгоритм Шора. Розроблені авторами статті алгоритми одночасно знаходять всі центри оптимального покриття; їх можна використовувати для покриття множин із n-вимірного евклідового простору довільної розмірності; їх реалізація не пов'язана з геометричними особливостями множини, що покривається; можуть бути використані для покриття як випуклих, так і невипуклих множин, для розв'язання дискретних задач оптимального покриття, а також для розв'язання задачі покриття множини мінімальною кількістю куль заданих радіусів; можуть бути використані для покриття множин, точки яких мають різну вагу.

Розроблені алгоритми дозволяють отримати результати для довільної кількості куль покриття. Але, як установлено в результаті обчислювальних експериментів, зі збільшенням кількості куль покриття може збільшуватися й відносна похибка, з якою отримані розв'язки.

Задачі багатократного покриття є не менш цікавими й важливими. Так, наприклад, навігаційні системи GPS, Глонасс використовують багатократне покриття зон обслуговування. У даній роботі запропоновано огляд можливих варіантів неперервних задач багатократного оптимального по-криття множини та шляхів

Постановка задачі. Необхідно провести аналіз та відібрати практичні задачі, що зводяться до неперервних задач багатократного оптимального c-кульового покриття обмеженої множини з E_n , а також побудувати математичні моделі для основних типів задач про багатократне покриття множин.

Результати. Розглянемо як конкретний приклад багатократної задачі оптимального покриття таку задачу. Припустимо, необхідно розташувати відеокамери протипожежної системи спостереження за лісовими масивами. Дистанційно керована або працююча в автоматичному режимі поворотна відеокамера може обертатися на 360 градусів та передавати інформацію оператору в режимі реального часу. У цьому випадку можна вважати, що зоною спостереження окремої відеокамери є коло. Для надійності системи та точного визначення координат можливих осередків загоряння необхідно покривати такими колами вказану область дворазово.

При розміщенні логістичних, а також розподільних центрів зоною обслуговування буде «коло», в якому відстань від центру до споживача вимірюється по існуючих дорогах, а не як довжина відрізку, що поєднує їх. При цьому відстань можна оцінювати, використовуючи певну метрику на заданій області. До цього класу згаданих задач можна віднести задачу роз-міщення центрів служб надзвичайних ситуацій, що користуються існуючими дорогами.

Також такою являється, наприклад, задача визначення місцезнаходження пунктів зберігання хімічних реагентів для нафто- й газопромислів. Важливо розмістити ці пункти таким чином, аби швидше доставляти реагенти в необхідну точку. При цьому, якщо в найближчому пункті необхідний реагент буде відсутній, то бажано, щоб інший пункт знаходився не дуже далеко. У результаті маємо задачу двократного покриття

© *О.М. Кісельова, Л.І. Лозовська, 2013*

заданої множини зонами обслуговування окремими центрами зберігання реагентів. Як двократну задачу оптимального покриття множини можна також розглядати задачу розміщення місцезнаходження банкоматів. Їх бажано розмістити так, щоб споживач міг дістатися до банкомату якнайшвидше. При цьому, якщо в найближчому банкоматі немає в наявності необхідної суми або він не працює, то бажано, щоб інший банкомат знаходився не дуже далеко. У результаті маємо задачу двократного покриття заданої множини зонами обслуговування окремими банкоматами.

При плануванні розміщення станцій стільникового зв'язку стандарту GSM передбачається, що кожен абонент має знаходитися в зоні обслуговування щонайменше трьох базових станцій; хоча він і обслуговується найближчою до нього, але у випадку її перевантаженості його обслуговування передається іншій, менш завантаженій станції. Таким чином, маємо трикратну задачу оптимально покриття.

При визначенні відстаней можна використовувати готові матриці від-станей, геоінформаційні системи або функції оцінки відстаней. Матриці відстаней та геоінформаційні системи складно використовувати для якісного аналізу областей обслуговування окремих станцій – діаграм Діріхле –Вороного. Тому доцільніше для неперервних задач багатократного по-криття множини використовувати функції для оцінки відстаней, які є деякою метрикою в просторі з E_n, якому належить множина. У літературі використовуються різні метрики: евклідова, метрика Чебишева, зважена 1p-метрика, зважена 1p-метрика з можливим поворотом осей координат, манхеттенська, московська та ряд інших метрик. Вибір метрики залежить від властивостей множини та від існуючих зв'язків центру з клієнтами.

Оптимізації розміщення різноманітних станцій обслуговування при-свячені спеціальні монографії та велика кількість наукових статей, у яких як досліджуються загальні питання, так і розв'язуються задачі для вибраних конкретних множин. Наприклад, у ряді робіт розглядається оптимізація розміщення станцій для окремих країн [3; 4; 5], і навіть їхніх окремих частин [6].

Будемо використовувати такі поняття.

Нехай Ω – обмежена, замкнена множина в n-вимірному евклідовому просторі E_n.

Будемо називати **c**-кулею радіуса R із центром у точці τ_i з E_n множину вигляду $B(\tau_i,R) = \{x \in E_n: c(x,\tau_i) \le R\}$, де $c(x,\tau_i)$ – деяка квазиметрика [7].

Будемо говорити, що сукупність центрів $\tau_1,\ldots,\tau_N$ задає k-кратне кульове покриття множини Ω із радіусом R, якщо

$$\Omega \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} B(\tau_i,R),$$

та для кожної точки $x \in \Omega$ виконується умова $x \in \bigcap_{j=1}^{k} B(\tau_{i_j},R)$, $i_j \in \{1,2,...,N\}$.

Зрозуміло, що радіус R покриття множини Ω, що задається центрами $\tau_1,\ldots,\tau_N$ (вектором τ^N), має вигляд

$$R(\tau^N) = \sup_{x\in\Omega} \min_{i=1,...,N} c(x,\tau_i), \qquad (1)$$

при цьому для кожної точки $x \in \Omega$ виконується умова $x \in \bigcap_{j=1}^{k} B(\tau_{i_j},R)$, $i_j \in \{1,2,...,N\}$,

де $\tau^N = (\tau_1,\ldots,\tau_N) \in \underbrace{E_n \times ... \times E_n}_{N} = E_n^N$ (або, в окремому випадку, $\tau^N=(\tau_1,\ldots,\tau_N) \in \underbrace{\Omega \times ... \times \Omega}_{N} = \Omega^N$).

Зрозуміло, що k–кратне покриття множини Ω, задане вектором $\tau^N = (\tau_1,\ldots,\tau_N)$, із радіусом $R(\tau^N)$, який визначається за формулою (1), є мінімальним k–кратним **c**-кульовим покриттям, що генерується вектором τ^N, тобто ніякі **c**-кулі меншого радіуса із центрами в $\tau_1,\ldots,\tau_N$ k-кратно не покривають Ω.

k-кратне покриття мінімального радіуса будемо називати *оптимальним*.

Таким чином, для визначення оптимального k-кратного покриття потрібно знайти величину

$$R(\tau^N) = \inf_{\tau^N} \sup_{x\in\Omega} \min_{i=1,...,N} c(x,\tau_i),$$

що називається *радіусом оптимального покриття,* і вектор $\tau_*^N = (\tau_1^*,\ldots,\tau_N^*)$, при яких досягається значення, що дорівнює нижній грані та при цьому для кожної точки $x \in \Omega$ виконується умова $x \in \bigcap_{j=1}^{k} B(\tau_{i_j},R)$, $i_j \in \{1,2,...,N\}$.

Розглянемо деякі постановки неперервних задач про k-кратне **c**-кульове покриття, виходячи з [1].

Задача 1 із фіксованими центрами.

Для заданої системи центрів $(\tau_1,\ldots,\tau_N)$ з E_n^N (або з Ω^N) знайти мінімальне k-кратне **с**-кульове покриття множини Ω, тобто знайти величину (1).

Розглянемо тепер більш складну задачу про оптимальне k-кратне по-криття, в якій на відміну від задачі **1** центри $\tau_1,\ldots,\tau_N$ не фіксовані, а повинні розміститися в множині Ω так, щоб отримати k-кратне **с**-кульове покриття мінімального радіуса (тобто оптимальне покриття).

Задача 2 про оптимальне обмежене k-кратне **с**-кульове покриття.

При заданій кількості N центрів $\tau_1,\ldots,\tau_N$ знайти їх розміщення в області Ω, що здійснює k-кратне покриття множини Ω з мінімальним радіусом, тобто знайти величину

$$R(\tau_*^N) = \inf_{(\tau_1,\ldots,\tau_N)\in\Omega^N} \sup_{x\in\Omega} \min_{i=1,\ldots,N} c(x,\tau_i), \qquad (2)$$

і вектор $\tau_*^N = (\tau_1^*,\ldots,\tau_N^*)\in\Omega^N \subset E_n^N$, при яких у (2) досягається значення, що дорівнює нижній грані та при цьому для кожної точки $x\in\Omega$ виконується умова $x\in\bigcap_{j=1}^{k} B(\tau_{i_j},R), i_j\in\{1,2,\ldots,N\}$.

Сформулюємо задачу про оптимальне k-кратне покриття, що відрізняється від задачі **2** тим, що центри $\tau_1,\ldots,\tau_N$ можуть розміщуватися не лише в множині Ω, але і в усьому просторі E_n.

Задача 3 про оптимальне k-кратне **с**-кульове покриття.

При заданій кількості N центрів $\tau_1,\ldots,\tau_N$ знайти їх розміщення в E_n, що здійснює k-кратне покриття множини Ω з мінімальним радіусом, тобто знайти величину

$$R(\tau_*^N) = \inf_{\tau^N\in E_n^N} \sup_{x\in\Omega} \min_{i=1,\ldots,N} c(x,\tau_i), \qquad (3)$$

і вектор $\tau_*^N = (\tau_1^*,\ldots,\tau_N^*)\in E_n^N$, при яких у (3) досягається значення, що дорівнює нижній грані та при цьому для кожної точки $x\in\Omega$ виконується умова $x\in\bigcap_{j=1}^{k} B(\tau_{i_j},R), i_j\in\{1,2,\ldots,N\}$.

Сформулюємо також задачу про k-кратне покриття, що відрізняється від перших трьох задач тим, що кількість N центрів $\tau_1,\ldots,\tau_N$ наперед не задано.

Задача 4 про знаходження мінімальної за кількістю сукупності центрів k-кратного покриття.
При заданому радіусі покриття R знайти мінімальну за кількістю N сукупність центрів $\tau_1,\ldots,\tau_N$, що генерує k-кратне покриття компактної множини Ω.

Аналіз отриманих результатів. Можна сформулювати такі задачі дослідження задач багатократного покриття множини:

- побудувати та уточнити математичні моделі неперервних задач багатократного покриття множини;
- з'ясувати властивості математичних моделей неперервних задач багатократного покриття множини, умови існування їх розв'язку;
- обґрунтувати методи розв'язання задач багатократного покриття множити, що базуються на теорії оптимального розбиття множин;
- розробити алгоритми розв'язання задач оптимізації кількості куль або (і) їх розміщення для k-кратного (k > 1) покриття заданих множин, що базуються на теорії оптимального розбиття множини;
- розробити алгоритми розв'язання задач оптимізації радіуса куль, при відомій їх кількості, та їх розміщення для k-кратного (k > 1) покриття заданих множин, що базуються на теорії оптимального розбиття множини;
- отримати оцінки точності розроблених алгоритмів;
- розробити рекомендації щодо вибору функцій метрики, підбору її параметрів для окремих типів станцій обслуговування. дослідити властивості множин Діріхле – Вороного для вибраної метрики в задачах k-кратного покриття;
- розробити програмний комплекс для розв'язання задач багатократного покриття, у тому числі здійснити підбір функції метрики та її параметрів для заданих множин із використанням електронних карт або матриць відстаней.

Висновки. Обґрунтовано актуальність та значимість неперервних задачі про оптимальне k-кратне с-кульове покриття компактної множини Ω з E_n. Побудовано математичні моделі основних типів задач про оптимальне k-кратне покриття множини, сформульовано задачі їх подальшого до-слідження, обґрунтування методів розв'язання задач багатократного по-криття множини, що базуються на теорії оптимального розбиття множин та розробки відповідних алгоритмів.

Бібліографічні посилання

1. **Киселёва Е.М.** Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: монограф. / Е.М. Киселёва, Н.З. Шор / – К.: Наук. думка, 2005. – 564 с.
2. **Киселёва Е.М.** Решение непрерывнх задач оптимального покрытия множества шарами с использованием теориии оптимального разбиения множеств: междунар. науч.-теорет. журн. / Е.М. Киселёва, Л.И. Лозовская, Е.В. Тимошенко // Кибернетика и системный анализ. – К. 2009. – №3. – С. 98–118.
3. **Beasley J. E.** Enhancing an algorithm for set covering problems / J.E. Beasley, K. Jornston // Europ. J. Oper. Res. – 1992. – Vol. 58. – P. 293-300.
4. **Farahani R. Z.** Facility location. Concepts, models, algorithms and case studies. Springer-Verlag. / R.Z. Farahani , M. Hekmatfar (eds.). – Berlin; Heidelberg. – 2009. – 530 p.
5. **Galinier P.** Solution techniques for the large set covering problem / P. Galinier, A. Heztz // Discrete applied Mathematics. – 2007. – Vol. 155. – Issue 3. – P. 312–326.
6. **Chen L**. Solving a minimum-power covering problem with overlap constraint for cellular network design / L. Chen, D. Yuan // European Journal of Operational Research. – 2010. - Vol. 203. – P. 714–723.
7. **Сухарев А.Г**. Минимаксные алгоритмы в задачах целочисленного анализа / А.Г. Сухарев. – М.: Наука, 1989. – 300 с.

Надійшла до редколегії 01.07.2013 р.