УДК 577.4:517.9

А.Г. Балакирева, С.Н. Герасин, С.В. Яковлев
Харьковский национальный университет радиоэлектроники
Харьковский национальный университет внутренних дел

ИССЛЕДОВАНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ НЕОДНОРОДНОЙ МОДЕЛИ ЛЕСЛИ

Розглядається неоднорідний добуток невід'ємних матриць та доводиться, що за певних умов цей добуток має властивість слабкої ергодичності. Уводиться поняття неоднорідної популяційної моделі Леслі та досліджуються асимптотичні властивості моделі. Установлюється, що неоднорідна модель Леслі має властивість слабкої ергодичності.

Рассматривается неоднородное произведение неотрицательных матриц и доказывается, что при определенных условиях данное произведение обладает свойством слабой эргодичности. Вводится понятие неоднородной популяционной модели Лесли и исследуются асимптотические свойства данной модели. Устанавливается, что неоднородная модель Лесли обладает свойством слабой эргодичности.

In this work the inhomogeneous product of non-negative matrices is considered and it is proved that under certain conditions the given product is weakly ergodic. The concep of inhomogeneous population Leslie model is entered and asymptotic properties of this model are investigated. It is ascertained that inhomogeneous population Leslie model has weak ergodicity property.

Ключевые слова: модель Лесли, слабая эргодичность, матрица, популяция.

Введение. Матричный аппарат для описания эволюции сложных многовидовых популяций был предложен П. Лесли. Формализм Лесли опирается на допущение, что популяция разбита на конечное число последовательных n возрастных классов одинаковой длительности, а численность всех классов изменяется в дискретном времени с равномерным шагом. Данная модель называется однородной моделью Лесли и ее свойства достаточно хорошо изучены [1–5]. Однако, классическая однородная модель Лесли имеет весьма жесткие ограничения для использования ее в прогнозировании динамики реальных популяций. В связи с этим мы распространяем данную модель на неоднородный случай, предполагая, что статистические показатели популяции изменяются на каждом шаге.

Неоднородная модель Лесли. Перед определением неоднородной модели Лесли введем понятие классической однородной модели Лесли.

Однородная модель Лесли

$$X(t_{j+1}) = LX(t_j),\ j = 0,1,2,...,$$

где $X(t_j) = [x_1(t_j) \quad x_2(t_j) \quad ... \quad x_n(t_j)]^T$ вектор-столбец описывает структуру популяции в момент времени t_j. Элементы $x_i(t_j)$ – численность i-ой возрастной группы ($i = \overline{1,...n}$) в момент времени t_j, если не учитывается разделение по полу, и численность самок i-ой группы в момент времени t_j, если половое разделение существенно для рассматриваемой популяции.

Матрица L называется переходной матрицей Лесли и имеет вид:

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & ... & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \beta_1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \beta_{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

где α_i ($\alpha_i \geq 0, i = 1,2,..., n$) – возрастные коэффициенты рождаемости, (то есть средняя плодовитость особей i-й возрастной группы), и β_i ($0 < \beta_i \leq 1,\ i = 1,2,..., n$) – коэффициенты выживания, равные вероятности перехода из возрастной группы i в $i+1$ группу к следующему моменту времени (причем $\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i$ может быть больше 1).

Таким образом, зная структуру матрицы L и начальное состояние популяции (вектор-столбец $X(t_o)$), можно прогнозировать состояние популяции в любой наперед заданный момент времени.

$$X(t_1) = LX(t_0),$$
$$X(t_2) = LX(t_1) = LLX(t_0) = L^2 X(t_o),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots..$$
$$X(t_n) = LX(t_{n-1}) = L^n X(t_0),$$
где L^n – n-ая степень матрицы L.
В однородной модели Лесли переходная матрица L с течением времени остается неизменной, что не соответствует действительности. Предположим, что коэффициенты выживаемости и рождаемости популяции изменяются на каждом шаге, что соответствует изменению переходной матрицы Лесли. Тогда однородная модель Лесли модифицируется на неоднородный случай.
Неоднородную модель Лесли для прогнозирования развития популяции с течением времени имеет вид:
$$X(t_n) = L_{0,n} X(t_0),\ L_{0,n} = L_1 \cdot L_2 \cdot \ldots \cdot L_n,\ n = 1,2,..,\qquad (1)$$
где L_i – матрица Лесли на i-ом шаге ($i = \overline{1,n}$).

Свойство эргодичности для неоднородного произведения неотрицательных матриц. Введем некоторые обозначения: x – вектор-столбец, тогда x^T – вектор-строка.

Определение. Функция $\rho(x, y)$, определенная на множестве $(1\times n)$ положительных векторов, имеет свойства метрики или расстояния, если для любых двух векторов $x^T = (x_1, x_2, ..., x_n) > O$ и $y^T = (y_1, y_2, ..., y_n) > O$ она определена как
$$\rho(x^T, y^T) = \ln\left[\frac{\max_i (x_i / y_i)}{\min_i (x_i / y_i)}\right] = \max_{i,j} \ln\left(\frac{x_i y_j}{x_j y_i}\right)$$
и $\rho(x^T, y^T) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \lambda y$ ($\lambda > 0$).

Свойства функции $\rho(x, y)$:
1. $\rho(x^T, y^T) \ge 0$;
2. $\rho(x^T, y^T) = \rho(y^T, x^T)$;
3. $\rho(x^T, y^T) \le \rho(x^T, z^T) + \rho(z^T, y^T)$;
4. $\rho(x^T, y^T) = \rho(\alpha x^T, \beta y^T)$,

где x^T, y^T, z^T любые положительные вектора $(1\times n)$, а α, β – два положительных скаляра.

Данная псевдо-метрика показывает «проекционное расстояние» между векторами $x^T > O$ и $y^T > O$. Будем предполагать, что все векторы имеют длину n, а все матрицы являются не отрицательными и имеют размерность $(n\times n)$, если не сказано иное.

Введем некоторые понятия. Будем говорить, что матрица A не имеет нулевых столбцов, если в каждом столбце данной матрицы есть, по крайней мере, один элемент отличный от нуля. Аналогично, матрица A не имеет нулевых строк (без нулевых строк), если в каждой строке данной матрицы есть, по крайней мере, один элемент отличный от нуля.

Пусть A матрица без нулевых столбцов, тогда если $x^T, y^T > O$, то $x^T A, y^T A > O$.

Неравенство (2) дает свойство сжатия функции $\rho(\cdot,\cdot)$:
$$\rho(x^T A, y^T A) \le \rho(x^T, y^T).\qquad (2)$$
Докажем данное свойство.

Лемма 1. Если $x, y > O$ и $\tilde{x} = Ax,\quad \tilde{y} = Ay$, где $A = \{a_{ij}\} \ge 0$ и не имеет нулевых строк, то
$$\max_i\left(\frac{\tilde{x}_i}{\tilde{y}_i}\right) \le \max_i\left(\frac{x_i}{y_i}\right),\ \min_i\left(\frac{\tilde{x}_i}{\tilde{y}_i}\right) \ge \min_i\left(\frac{x_i}{y_i}\right).\qquad (3)$$

Доказательство.
$$\frac{\tilde{x}_i}{\tilde{y}_i} = \frac{\sum_j a_{ij} x_j}{\sum_k a_{ik} y_k} = \sum_j p_{ij} \frac{x_j}{y_j},$$

где $p_{ij} = a_{ij} y_j / \sum_k a_{ik} y_k$ – (i, j) элемент стохастической матрицы P. В частности, $\sum_j p_{ij} = 1$, тогда неравенства (3) доказано. Учитывая определение для функции $\rho(\cdot,\cdot)$ и результаты леммы 1 нетрудно показать, что неравенство (2) выполняется для матриц, которые не имеют нулевых столбцов.

Определение. Матрица $A = \{a_{ij}\} \geq 0$ без нулевых строк называется кодирующей, если любые две строки данной матрицы имеют, по крайней мере, один положительный элемент с одинаковым индексом j_0.

Лемма 2. Если A^T кодирующая матрица и $x, y > O$, то выполняется следующее неравенство

$$\rho(x^T A, y^T A) < \rho(x^T, y^T). \tag{4}$$

Следствие. Неравенство (4) будет также выполняться, если матрица A имеет хотя бы одну строку, каждый элемент которой отличен от нуля.

Учитывая неравенство (2) и свойство функции $\rho(\cdot,\cdot)$ ($\rho(x^T, y^T) = 0$ тогда и только тогда, если $x = \lambda y$ ($\lambda > 0$)), определим величину $\tau_B(A)$ следующим образом:

$$\tau_B(A) = \sup_{\substack{x,y>0 \\ x \neq \lambda y}} \frac{\rho(x^T A, y^T A)}{\rho(x^T, y^T)},$$

$$0 \leq \tau_B(A) \leq 1. \tag{5}$$

Ясно, если A_1 и A_2 матрицы без нулевых столбцов, то для произведения данных матриц $A_1 A_2$ и для $x, y > 0$ имеем, что

$$\rho(x^T A_1 A_2, y^T A_1 A_2) \leq \tau_B(A_2) \rho(x^T A_1, y^T A_1) \leq \tau_B(A_2) \tau_B(A_1) \rho(x^T, y^T).$$

Тогда

$$\tau_B(A_1 A_2) \leq \tau_B(A_1) \tau_B(A_2). \tag{6}$$

Определение. Величины $\tau_B(\cdot)$ называются коэффициентами сжатия Биркгоффа (или коэффициентами эргодичности), если они удовлетворяют свойствам (5) и (6). [6]

Если из последовательности матриц $\{H_k\}$, где каждая матрица не имеет нулевых столбцов, выбрать матрицы $H_{p+1}, \ldots, H_{p+r}$ и составить из них произведение $H_{p,r}$ (то есть $H_{p,r} = \prod_{k=p+1}^{p+r} H_k$) в произвольном порядке, то в силу неравенства (6) имеем

$$\tau_B(H_{p,r}) \leq \prod_{k=p+1}^{p+r} \tau_B(H_k). \tag{7}$$

Матрица A будет сжимающейся, если $\tau_B(A) < 1$.

Определим вид матрицы A, для которой $\tau_B(A) = 0$. Заметим, что если A имеет ранг 1, то есть A представимо в виде $A = wv^T = \{w_i v_j\}$, где $v > 0; w \geq 0, \neq 0$, а также A не имеет нулевых столбцов, тогда

$$\tau_B(A) = \sup_{\substack{x,y>0 \\ x \neq \lambda y}} \frac{\rho(x^T w v^T, y^T w v^T)}{\rho(x^T, y^T)} = 0,$$

поскольку $\rho((x^T w) v^T, (y^T w) v^T) = \rho(v^T, v^T) = 0$. Таким образом, мы получаем, что для матрицы A, которая не имеет нулевых строк и столбцов, $\tau_B(A) = 0$ тогда и только тогда, когда A имеет ранг 1, то есть $A = wv^T$, $w, v > 0$.

Далее определим явную форму коэффициентов $\tau_B(A)$ для матрицы A, не содержащую нулевых строк и нулевых столбцов [6].

$$\tau_B(A) = \{1 - [\phi(A)]^{1/2}\} / \{1 + [\phi(A)]^{1/2}\},$$

где

$$\phi(A) = \begin{cases} \min\limits_{i,j,k,l} \dfrac{a_{ik} a_{jl}}{a_{jk} a_{il}}, \text{åñëè} A > 0 \\ 0, \text{åñëè} A \leq 0 \end{cases},$$

Определение. Произведение $H_{p,r} = \{h_{ij}^{(p,r)}\}$, сформированное из матриц $H_{p+1}, H_{p+2}, ..., H_{p+r}$, каждая из которых без нулевых строк и столбцов, умноженные в некотором особом порядке для каждого $p \geq 0, r \geq 1$, обладает свойством слабой эргодичностью, если существуют положительные матрицы $S_{p,r} = \{s_{ij}^{(p,r)}\}$ ($p \geq 0, r \geq 1$) ранга 1, такие, что для любого фиксированного p при $r \to \infty$ имеем:

$$h_{ij}^{(p,r)} / s_{ij}^{(p,r)} \to 1 \text{ для всех } i, j \tag{8}$$

Лемма 3. Произведение матриц $H_{p,r}$ является слабой эргодичностью тогда и только тогда, когда для всех $p \geq 0$ при $r \to \infty$ выполняется

$$\tau_B(H_{p,r}) \to 0. \tag{9}$$

Доказательство.
(достаточность) Из явной формы $\tau_B(A)$, которая связана с $A > 0$, ясно, что (8) очевидно включает в себя (9).
(необходимость) Пусть условие (9) выполняется и матрица $H_{p,r}$ без нулевых строк и столбцов. Определим матрицы ранга 1 в следующем виде:

$$H_{p,r} E E^T H_{p,r} / E^T H_{p,r} E.$$

Тогда из явной формы $\tau_B(\cdot)$ следует, что $H_{p,r} > 0$ для достаточного большого r. Отношение

$$\frac{h_{ij}^{(p,r)}}{s_{ij}^{(p,r)}} = h_{ij}^{(p,r)} / \left\{ \sum_{k,s} \frac{h_{ik}^{(p,r)} h_{sj}^{(p,r)}}{h_{sk}^{(p,r)} h_{ij}^{(p,r)}} \cdot \frac{h_{sk}^{(p,r)} h_{ij}^{(p,r)}}{\sum_{k,s} h_{ks}^{(p,r)}} \right\} \to 1,$$

поскольку выполняется условие (9), следовательно $\phi(H_{p,r}) \to 1$.

Далее обратим внимание на два вида произведений $T_{p.r} = H_{p+1} H_{p+2} ... H_{p+r}$ и $U_{p,r} = H_{p+r} \cdots H_{p+2} H_{p+1}$, $r \to \infty$.

Лемма 4. Если $H_{p,r} = H_{p+1} H_{p+2} ... H_{p+r}$, то есть $H_{p,r} = T_{p,r}$, и все H_k не имеют нулевых строк и столбцов, то $\tau_B(T_{p,r}) \to 0$ при $r \to \infty$ для всякого $p \geq 0$ тогда и только тогда, когда выполняются два условия:
а) $T_{p,r} > 0, r \geq r_o(p)$;

$$\text{б) } t_{ik}^{(p,r)} / t_{jk}^{(p,r)} \to W_{ij}^{(p)} > 0 \tag{10}$$

для всех i, j, p, k, где предел не зависит от k (то есть строки $T_{p,r}$ стремятся к пропорциональности при $r \to \infty$).

Доказательство. (достаточность) Очевидно, что из (10) следует (9), поскольку в силу (10) ясно, что $\phi(T_{p,r}) \to 1$.

(необходимость) Пусть (9) выполняется, тогда ясно $T_{p,r} > 0$ для достаточно больших r ($r \geq r_o(p)$). Зафиксируем i и j, тогда

$$\frac{t_{ik}^{(p,r+1)}}{t_{jk}^{(p,r+1)}} = \sum_s \frac{d_{ks}^{(p,r)} t_{is}^{(p,r)}}{t_{js}^{(p,r)}},$$

где $d_{ks}^{(p,r)} = t_{js}^{(p,r)} h_{sk}(p+r+1) / t_{.jk}^{(p,r+1)}$ – (k, s) элемент стохастической матрицы со строго положительными элементами, и, следовательно, данная матрица является кодирующей. Тогда из леммы 1 имеем

$$\max_k \left(\frac{t_{ik}^{(p,r)}}{t_{jk}^{(p,r)}} \right) \text{ не возрастает с ростом } r;$$

$$\min_k \left(\frac{t_{ik}^{(p,r)}}{t_{jk}^{(p,r)}} \right) \text{ не убывает с ростом } r.$$

Поскольку $\tau_B(T_{p,r}) \to 0$, $\phi(T_{p,r}) \to 1$, то при $r \to \infty$ имеем

$$\frac{t_{ik}^{(p,r)}}{t_{jk}^{(p,r)}} \cdot \frac{t_{js}^{(p,r)}}{t_{is}^{(p,r)}} \to 1 \text{ для всех } i, j, k, s,$$

значит две монотонные величины при $r \to \infty$ имеют один и тот же положительный предел, который не зависит от k и может быть записан как $W_{ij}^{(p)}$.

Замечание 1. В лемме 4, $W_{i,j}^{(p)} = \lim_{r\to\infty} t_{ik}^{(p,r)} / t_{jk}^{(p,r)}$ может быть записана как $w_i^{(p)} / w_j^{(p)}$ для некоторого $w^{(p)} = \{w_i^{(p)}\}$, где $w^{\{p\}} > 0$, $(w^{(p)})^T E = 1$.

Теорема 1. *Для последовательности* $\{H_k\}$, $k = 1,2,...$ *неотрицательных и не имеющих нулевых строк и столбцов матриц (* $H_{p,r} = T_{p,r}$ *и* $H_{p,r} = U_{p,r}$*), слабая эргодичность существует тогда и только тогда, когда существует строго возрастающая последовательность положительных целых чисел* $\{k_s\}$, $s = 0,1,2,...$ *такая, что*

$$\sum_{s=0}^{\infty} [\phi(H_{k_s, k_{s+1}-k_s})]^{1/2} = \infty. \qquad (11)$$

Доказательство. Предположим, что $H_{p,r} = T_{p,r}$, $p \ge 0$, $r \ge 1$. Возьмем для простаты $p = 0$ и достаточно большое r.

$$T_{o.r} = T_{o,k_o} T_{k_0,k_1-k_0} T_{k_1,k_2-k_1} \cdots T_{k_{t-1},k_t-k_{t-1}} T^*,$$

где $T^* \ge 0$ некоторая матрица без нулевых строк и столбцов, k_t – ближайший член последовательности $\{k_s\}$ не больший чем r. Ясно, что $t \to \infty$ при $r \to \infty$. Тогда из неравенства (5) следует, что

$$\tau_B(T_{o,r}) \le \prod_{s=0}^{t-1} \tau_B(T_{k_s,k_{s+1}-k_s}),$$

и при $r \to \infty$ правая часть вышеприведенного неравенства $\to 0$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{s=0}^{\infty} \{1 - \tau_B(T_{k_s,k_{s+1}-k_s})\} = \infty.$$

Из определения для функции $\phi(\cdot), 0 \le \phi(\cdot) \le 1$, и явной формы $\tau_B(\cdot)$, следует, что дивергенция суммы вытекает из (11). Таким образом, условия (11) достаточно для слабой эргодичности для $T_{p,r}$.

Теперь пусть выполняется слабая эргодичность, тогда учитывая леммы 3 имеем, что $\tau_B(T_{p,r}) \to 0$ при $r \to \infty$, $p \ge 0$.

Зафиксируем δ: $1 > \delta > 0$. Тогда, по определению, последовательность $\{k_s\}$ реккурентна по выбору произвольного k_o, и k_{s+1} были определены как

$$\tau_B(T_{k_s,k_{s+1}-k_s}) \le \delta.$$

То

$$[\phi(T_{k_s,k_{s+1}-k_s})]^{1/2} = \left\{\frac{1-\tau_B(T_{k_s,k_{s+1}-k_s})}{1+\tau_B(T_{k_s,k_{s+1}-k_s})}\right\} \ge \frac{1-\delta}{1+\delta} > 0,$$

что доказывает выполнения условия (11) для данной последовательности $H_{p,r} = T_{p,r}$.

Доказательство для произведения $U_{p,r}$ аналогично.

Следствие. Если для последовательности $\{k_s\}$, $s \ge 0$ положительных целых чисел таких, что $k_{s+1} - k_s = g(const)$, выполняется условие:

$$\phi(T_{k_s,k_{s+1}-k_s}) \ge \varepsilon^2,$$

тогда $\tau_B(T_{p,r}) \to 0$ при $r \to \infty$, $p \ge 0$, по геометрической норме. Например, в случае $p = 0$ имеем:

$$\tau_B(T_{0,p}) \le \{(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)\}^{-(k_0/g)-1} \{(1-\varepsilon)/(1+\varepsilon)\}^{r/g}$$

для достаточного большого r. Аналогичный результат можно получить и для произведения $U_{p,r}$.

Теорема 2. *Если для последовательности неотрицательных и без нулевых строк и столбцов матриц* $H_k = \{h_{ij}(k)\}$, $k \ge 1$, *выполняются условия*

i) $H_{p,r_0} > 0$ *для* $p \ge 0$, *где* r_0 *(* ≥ 1*) некоторое фиксированное целое число независимое от* p

$$\text{i i)} \ \min_{i,j}{}^{+} h_{ij}(k) / \max_{i,j} h_{ij}(k) \ge \upsilon > 0 \qquad (12)$$

(где $\min^{+}$ *– минимум по всем положительным элементам и* υ *не зависит от* k*), тогда если* $H_{p,r} = T_{p,r}$ *(или* $U_{p,r}$*),* $p \geq 0$, $r \geq 1$*, слабая эргодичность (по геометрической норме) существует.*

Доказательство. Из структуры $\tau_B(\cdot)$ и его зависимости от $\phi(\cdot)$ очевидно, что значение $\tau_B(H_{p,r})$ не изменится, если каждую H_k умножить на некоторый положительный скаляр (каждый скаляр зависит от k). Поскольку из леммы 3 ясно, что слабая эргодичность зависит только от таких значений (величин), мы можем заменить условие (12) без потери общности на следующие неравенства:

$$0 < \upsilon \leq \min_{i,j}{}^{+} h_{ij}(k), \qquad \max_{i,j} h_{ij}(k) \leq 1. \tag{13}$$

Из того, что $H_{p,r_0} > 0, p \geq 0$, следует, что

$$\upsilon^{r_0}\text{II}^T \leq H_{p,r_o} \leq n^{r_0-1}\text{II}^T. \tag{14}$$

Значит $\phi(H_{p,r_0}) \geq (\upsilon^{r_0} / n^{r_0-1})^2 = \varepsilon^2$, $p \geq 0$. Далее применяем следствие теоремы 1 с $g = r_o$ и $k_0 = 1$.

Утверждение 1. Если все матрицы H_k, $k > 1$ имеют одну и туже матрицу событий и являются неразложимыми, а также хотя бы один элемент главной диагонали каждой матрицы отличен от нуля, то $H_{p,r} > 0,\ p \geq 0$, $r \geq 2(n-1)$.

Если произведение $H_{p,r} = \{h_{ij}^{(p,r)}\}$ обладает свойством слабой эргодичности, то выполняется условие

$$\lim_{r\to\infty} \frac{h_{ik}^{(p,r)}}{h_{jk}^{(p,r)}} = W_{ij}^{(p)} = \frac{w_i^{(p)}}{w_j^{(p)}} \text{ для всех } i, j, p, k,$$

где $w^{(p)} = \{w_i^{(p)}\}$ некоторый стохастический вектор.

Свойство эргодичности для неоднородной модели Лесли. Рассмотрим неоднородную модель Лесли вида (1). Основываясь на утверждении 1 теоремы 2 и на том, что все элементы матрицы Лесли находятся в диапазоне от нуля до бесконечности, можно утверждать, что условия теоремы 2 выполняются для $L_{o,n}$.

Тогда, определим два различных начальных распределения как $X(t_0^1) = \{x_i^1\}$ и $X(t_0^2) = \{x_i^2\}$. Рассмотрим отношение $L_{o,n}X(t_0^1)$ к $L_{o,n}X(t_0^2)$, при этом числитель и знаменатель данной дроби умножим на $l_{qk}^{(0)}$:

$$\frac{L_{o,n}X(t_0^1)}{L_{o,n}X(t_0^2)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x\binom{1}{i} l_{ik}^{(0,n)}}{\sum_{j=1}^{n} x\binom{2}{j} l_{jk}^{(0,n)}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x\binom{1}{i} l_{ik}^{(0,n)} \cdot l_{qk}^{(0,n)}}{\sum_{j=1}^{n} x\binom{2}{j} l_{jk}^{(0,n)} \cdot l_{qk}^{(0,n)}}.$$

Применяя лемму 4 к последнему выражению и устремляя $n \to \infty$ имеем:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x\binom{1}{i} l_{ik}^{(0,n)}}{\sum_{j=1}^{n} x\binom{2}{j} l_{jk}^{(0,n)}} \to \frac{\sum_{i=1}^{n} x\binom{1}{i} W_{iq}^{(0)}}{\sum_{j=1}^{n} x\binom{2}{j} W_{jq}^{(0)}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x\binom{1}{i} w_i^{(0)}}{\sum_{j=1}^{n} x\binom{2}{j} w_j^{(0)}},$$

то есть значение предела не зависит от k. Данная независимость называется свойством слабой эргодичности неоднородной модели Лесли и для популяции интерпретируется следующим образом: доля особей каждого возрастного класса по отношению к общей численности популяции остается неизменной, хотя общая численность может изменяться с течение времени. То есть, при $n \to \infty$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\,(t_o) l_{ik}^{(0,n)} \Big/ \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} x_i\,(t_o) l_{is}^{(0,n)} \sim$$

$$\sim \left\{ l_{qk}^{(0,p)} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i\,(t_o) w_i^{(0)}}{w_q^{(0)}} \right\} \Bigg/ \left\{ \left(\sum_{s=1}^{n} l_{qs}^{(0,n)} \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i\,(t_o) w_i^{(0)}}{w_q^{(0)}} \right) \right\} \sim$$

$$\sim l_{qk}^{(0,n)} \Bigg/ \sum_{s=1}^{n} l_{qs}^{(0,n)}$$

для любого фиксированного $q = 1,..,n$ и всех $k = 1,...,n$. Видим, что последний предел не зависит от $X(t_0)$.

Выводы. Введение неоднородности в модель Лесли обусловлена достоверностью описания динамики реальных популяций. В связи с этим встает вопрос об исследовании свойств данной модели. В данной статье установлено, что неоднородная модель Лесли обладает свойством слабой эргодичности.

Библиографические ссылки

1. **Leslie P.H**. On the use of matrices in certain population mathematics // Biometrica.– 1945.–V.33, N3.– P.183-212.
2. **Свирежев Ю.М** Устойчивость биологических сообществ / Ю.М. Свирежев, Д.О. Логофет. – М.,1978.
3. **Ризниченко Г.Ю** Математические модели биологических продукционных процессов / Г.Ю Ризниченко, А.Б Рубин. – М.,1993.
4. **Логофет Д.О.** Неотрицательные матрицы как инструмент моделирования динамики популяций: классические модели и современные обобщения / Д.О. Логофет, И.Н. Белова // Фундаментальная и прикладная математика, Т. 13.– вып. 4 . – 2007. – С.145-164.
5. **Horn R.** Matrix Analysis / R. A. Horn, C. R. Johnson.—London: Cambridge Univ. Press, 1990
6. **Seneta E.** Non-negative matrices and Markov chains.-Springer-Verlag New-York-1981.-284p.

Надійшла до редколегії 21.02.11