УДК 519.85

**О. М. Кісельова*, В. О. Строєва****
**Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара*
***Дніпродзержинський державний технічний університет*

# РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ БАГАТОПРОДУКТОВИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН З ФІКСОВАНИМИ ЦЕНТРАМИ ПІДМНОЖИН

**Приведено алгоритм розв'язання нелінійної неперервної багатопродуктової задачі оптимального розбиття множини $\Omega$ з $n$-вимірного евклідового простору на її підмножини з фіксованими центрами цих підмножин при обмеженнях у формі рівностей та нерівностей, з функціями попиту та вартості транспортування одиниці продукції, які можуть бути різними для різних видів продукції .**

**Приведен алгоритм решения нелинейной непрерывной многопродуктовой задачи оптимального разбиения множества $\Omega$ из $n$-мерного евклидова пространства на его непересекающиеся подмножества с фиксированными центрами этих подмножеств при ограничениях в форме равенств и неравенств, с фунциями спроса и стоимости транспортировки единицы продукции, которые могут быть разными для разных видов продукции.**

**The algorithm of the decision of a non-linear continuous multigrocery problem of a set $\Omega$ from $n$-dimensional Euclidean space on its not crossed subsets with fixed the centres is given at restrictions in the form of equalities and inequalities, with functions of demand and costs of transportation of a unit of production which can be different for different kinds of production.**

**Ключові слова: нескінченновимірне математичне програмування, оптимальне розбиття множин, багатопродуктова задача.**

**Вступ.** Багато практично важливих задач оптимізації та задач з різних розділів прикладних наук зводиться до задач розбиття заданої множини визначеної структури на її неперетинні підмножини з метою мінімізації деякого критерію якості розбиття.

В [1] викладається математична теорія неперервних задач оптимального розбиття множин (ОРМ) *n*-вимірного евклідового простору, які є некласичними задачами нескінченновимірного математичного програмування з булевими змінними. На основі розроблених і теоретично обґрунтованих у монографії [1] методів розв'язання задач оптимального розбиття множин сформульовані алгоритми, складовою частиною яких є r-алгоритм Н. З. Шора або його модифікації.

В [2]-[5] задачі з [1] узагальнюються на нелінійний випадок. Дослідження цієї роботи продовжує розгляд нелінійних неперервних багатопродуктових задач ОРМ з [3]-[5]. Метою роботи є приведення алгоритму розв'язання нелінійної неперервної багатопродуктової задачі оптимального розбиття множини $\Omega$ на її підмножини з фіксованими центрами при обмеженнях у формі рівностей та нерівностей, його програмна реалізація на випадок, коли функції попиту та вартості транспортування одиниці продукції можуть бути різними для різних видів продукції та ілюстрація цього алгоритму на модельних задачах.

**Постановка задачі.** Розглядається нелінійна неперервна багатопродуктова задача оптимального розбиття множини $\Omega \in E^n$ на її неперетинні вимірні за Лебегом підмножини $\Omega_1^1,...,\Omega_N^1$; $\Omega_1^2,...,\Omega_N^2$;…; $\Omega_1^M,...,\Omega_N^M$ (серед яких можуть бути й пусті) так, щоб

$$\mathrm{mes}(\Omega_i^j \cap \Omega_k^j) = 0, \quad i \neq k, \quad i,k = 1,...,N, \quad j = 1,...,M,$$

де $mes(\cdot)$ – міра Лебега,

$$\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i^j = \Omega, \;\; j = 1,2,...,M,$$

з фіксованими координатами центрів підмножин при обмеженнях у вигляді рівностей та нерівностей.

Позначимо сукупність усіх можливих розбиттів множини $\Omega$ на N підмножин по M продуктів через $\Sigma_\Omega^{N\times M}$, тобто

$$\Sigma_\Omega^{N\times M} = \left\{ \begin{aligned} &(\Omega_1^1,...,\Omega_N^1;...;\Omega_1^M,...,\Omega_N^M) : \bigcup_{i=1}^{N}\Omega_i^j = \Omega, \\ &mes(\Omega_i^j \cap \Omega_k^j) = 0, \;\; i \neq k, \;\; i,k = 1,...,N, \;\; j = 1,...,M \end{aligned} \right\}.$$

© *О. М. Кісельова, В. О. Строєва, 2011*

**Задача А.** $$\min_{\{\Omega_1^1,\ldots,\Omega_N^1;\ldots;\Omega_1^M,\ldots,\Omega_N^M\}} \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\left[\varphi_i^j\left(\int_{\Omega_i^j}\rho^j(x)dx\right)+\int_{\Omega_i^j}c^j(x,\tau_i)\rho^j(x)dx\right] \quad (1)$$

при умовах

$$\left\{\Omega_1^1,\ldots,\Omega_i^j,\ldots,\Omega_N^M\right\}\in\Sigma_\Omega^{N\times M} \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{M}\int_{\Omega_i^j}\rho^j(x)dx=b_i\,,\ i=1,\ldots,p\,,$$

$$\sum_{j=1}^{M}\int_{\Omega_i^j}\rho^j(x)dx\le b_i\,,\ \ i=p+1,\ldots,N\,. \quad (3)$$

де $x=(x^{(1)},\ldots,x^{(n)})\in\Omega;$ $\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_N)\in\Omega;$ $b_1,b_2,\ldots,\ b_N$ – задані невід'ємні числа, причому виконуються умови розв'язності задачі

$$S=M\cdot\int_{\Omega}\rho^j(x)dx\le\sum_{i=1}^{N}b_i,\ \ 0<b_i\le S,\ \ i=1,\ldots,N.$$

Функції $c^j(x,\tau_i)$ – дійсні, обмежені, визначені на $\Omega\times\Omega$, вимірні по аргументу х при будь-якому фіксованому $\tau_i=\left(\tau_i^{(1)},\ldots,\tau_i^{(n)}\right)$ з $\Omega$ для всіх $i=1,\ldots,N,$ $j=1,\ldots,M$; функції $\rho^j(x)$ – дійсні, обмежені, вимірні і невід'ємні на $\Omega$ для всіх $j=1,\ldots,M$; $\tau_i=\left(\tau_i^{(1)},\ldots,\tau_i^{(n)}\right)$ – задана точка підмножини $\Omega$, одна й та ж для всіх $j=1,\ldots,M$, яку ми називаємо спільним центром підмножин $\Omega_i^1,\ldots,\Omega_i^M$, не обов'язково належить кожній $\Omega_i^1,\ldots,\Omega_i^M$; $\varphi_i^j(\cdot),$ $i=1,\ldots,N, j=1,\ldots,M$ – дійсні, обмежені, опуклі, двічі неперервно-диференційовні функції свого аргументу.

Вважаємо, що міра Лебега множин і граничних точок підмножин $\Omega_i^j,$ $i=1,\ldots,N, j=1,\ldots,M$, дорівнює нулю.

Задача **А** записується у термінах характеристичних функцій, а потім, від отриманої нескінченновимірної задачі математичного програмування з булевими значеннями змінних $\lambda_i^j(x)$, $i=1,\ldots,N,$ $j=1,\ldots,M$, здійснено перехід до відповідної задачі зі значеннями $\lambda_i^j(x)$ на відрізку [0,1]:

**Задача С.** $$\min_{(\lambda(\cdot))\in\Gamma_1}\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}[\varphi_i^j(\int_{\Omega}\rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx)+\int_{\Omega}c^j(x,\tau_i)\rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx],$$

де $\Gamma_1=\{\,\lambda(x):\ \lambda(x)\in\Gamma$ майже скрізь (м. с.) для $x\in\Omega;$

$$\int_{\Omega_i^j}\sum_{j=1}^{M}\rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx=b_i,\ i=1,\ldots,\ p,$$

$$\int_{\Omega_i^j}\sum_{j=1}^{M}\rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx\le b_i,\ i=p+1,\ \ldots,\mathrm{N}\ \};$$

$\Gamma=\{\,\lambda(x)=(\lambda_1^1(x),\ldots,\lambda_N^1(x);\ldots;\lambda_1^M(x),\ldots,\lambda_N^M(x)):\ 0\le\lambda_i^j(x)\le1\,,\ \ x\in\Omega,\ i=1,\ldots,\ N,\ j=1,\ldots,M,\ \sum_{i=1}^{N}\lambda_i(x)=1$ м. с. для $x\in\Omega\,\}.$

По аналогії з [2], [3] можна привести обґрунтування методу розв'язання задачі **С**, який засновано на переході від вихідної нелінійної нескінченновимірної задачі через функціонал Лагранжа виду

$$h\left(\lambda(\cdot),\psi\right)=-\sum_{i=1}^{N}\psi_i b_i+\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\left[\begin{array}{l}\varphi_i^j(\int_{\Omega}\rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx)+\\+\int_{\Omega}(c^j(x,\tau_i)+\psi_i)\rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx\end{array}\right]= \quad (4)$$
$$=-\sum_{i=1}^{N}\psi_i b_i+\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\Phi_i^j\left(\lambda_i^j(\cdot),\psi_i\right),$$

де $\psi=(\psi_1,\ldots,\psi_N)\in\Lambda$ – $N$-вимірний вектор з дійсними компонентами, причому $\psi_1,\ldots,\psi_p$ – довільного знаку, а $\psi_{p+1},\ldots,\psi_N$ невід'ємні; $\lambda(x)\in\Gamma$ для $x\in\Omega$, $\tau_i=\left(\tau_i^{(1)},\ldots,\tau_i^{(n)}\right)\in\Omega^N$, до скінченновимірної задачі з негладким цільовим функціоналом.

Як випливає з [2], [3], [6], у випадку виконання умов сильної регулярності:

$mes\left\{ x\in\Omega : \left( c^j(x,\tau_i)+\psi_i+\varphi'^{\,j}_{iY_i^j}\left(\int\limits_{\Omega}\rho^j(x)\lambda^{*j}_i(x)dx\right)\right)\rho^j(x)=0 \right\}=0,\ i=1,...,N,\ j=1,...,M,$ вектор-функція $\lambda^{*j}_i(x)$, яка доставляє мінімум лінійному функціоналу $\Phi_i^j\left(\lambda_i^j\left(\cdot\right),\psi_i\right)$ з правої частини (4), визначається при кожному фіксованому $\psi\in\Lambda$ із наступного операторного рівняння:

$$\lambda^{*j}_i(x)=\begin{cases} 1, & c^j(x,\tau_i)+\psi_i+\varphi'^{\,j}_{iY_i^j}\left(\int\limits_{\Omega}\rho^j(x)\lambda^{*j}_i(x)dx\right)\le c^j(x,\tau_k)+\psi_k+\varphi'^{\,j}_{kY_k^j}\left(\int\limits_{\Omega}\rho^j(x)\lambda^{*j}_k(x)dx\right), \\ & i\ne k \text{ м.с. для } x\in\Omega \text{ (іншими словами, } i=k \text{ тільки на множині міри нуль,} \\ & \text{тобто у точках границі між підмножинами } \Omega_i^j \text{ та } \Omega_k^j),\ \ i,k=1,...,N,\ \ j=1,...,M, \\ 0, & \text{в інших випадках,} \end{cases}$$

де $Y_i^j=\int\limits_{\Omega}\rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx$.

Отже, слідуя [2]-[3], можна привести перехід від нескінченновимірної задачі **C** до пошуку сідлової точки функціонала (4) у вигляді наступної теореми, на основі якої буде сформульовано алгоритм розв'язання поставленої задачі.

**Теорема 1.** *Якщо* $\varphi_i^j(\cdot),\ \ i=1,...,N,\ j=1,...,M$ *– опуклі, двічі неперервно-диференційовні функції свого аргументу та при кожному фіксованому* $\psi\in\Lambda$ *має місце умова сильної регулярності*

$$mes\left\{ x\in\Omega : \left( c^j(x,\tau_i)+\psi_i+\varphi'^{\,j}_{iY_i^j}\left(\int\limits_{\Omega}\rho^j(x)\lambda^{*j}_i(x)dx\right)\right)\rho^j(x)=0 \right\}=0,\ i=1,...,N,\ j=1,...,M,$$

*тоді сідлова точка* $\left(\lambda\left(\cdot\right),\psi^*\right)$ *(де перша компонента є оптимальним розв'язком задачі* ***C****) функціонала (4) на множині* $\left\{\Gamma\times\Omega^N\right\}\times\Lambda$ *визначається для* $i=1,...,N,\ j=1,...,M$ *та майже всіх* $x\in\Omega$ *наступним чином:*

*пр*

*пр*

*и*

$$\lambda^{*j}_i( \quad ma\begin{cases} 1, & \text{ïðè } x\in\Omega^j_{*i} \text{ òà } x\notin\Omega^j_{*q},\ \ q\le i, \\ 0, & \text{ïðè } x\notin\Omega^j_{*i}, \end{cases}$$

*де*

$$\Omega^{*j}_i=\left\{\begin{array}{l} x\in\Omega : c^j(x, \quad +\varphi^j_{iY_i^j}(Y_i^{*j})= \\ =\min\limits_{k=\overline{1,N}}(c^j(x,\tau_k)+\psi_k^*+\varphi^j_{kY_k^j}(Y_k^{*j})),\ \ i\ne k \text{ м.с. для } x\in\Omega \end{array}\right\},$$

*в якості* $Y_1^*,...,Y_N^*$, $\psi_1^*,...,\psi_N^*$ *обирається оптимальний розв'язок слідуючої двоїстої задачі:*

$$G(\psi)=\max_{Y\in U}\left( -\sum_{i=1}^{N}\psi_i b_i+\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\left[\begin{array}{l}\left(\varphi_i^j(Y_i^j)-\varphi'^{\,j}_{iY_i^j}(Y_i^j)\cdot Y_i^j\right)+ \\ +\int\limits_{\Omega}\min\limits_{k=\overline{1,N}}\left(c^j(x,\tau_k)+\psi_k+\varphi'^{\,j}_{kY_k^j}(Y_k^j)\right)\rho^j(x)dx\end{array}\right]\right)\to\max, \tag{5}$$

$$\tau\in\Omega^N,\psi\in\Lambda,Y\in U=\left\{Y=(Y_1^1,...,Y_N^1;...;Y_1^M,...,Y_N^M)\in E_{N\times M} : 0\le\sum_{j=1}^{M}Y_i^j\le b_i, i=1,...,N\right\}.$$

при умовах $\psi_i\ge 0,\ \ i=p+1,...,N.$ (6)

**Алгоритм розв'язання задачі.** Сформулюємо алгоритм розв'язання задачі (5), (6), що базується на теоремі 1, в якому для розв'язання допоміжної скінченновимірної негладкої оптимізаційної задачі (5), (6), буде застосовано $r$ - алгоритм Н.З. Шора, [7].

Для цього від задачі (5), (6) перейдемо до задачі безумовної оптимізації по $\psi$ за допомогою введення в цільову функцію задачі (5), (6) негладких штрафних функцій множин:

$\left\{\psi_i\ge 0, i=p+1,...,N\right\}$, $\left\{Y_i^j\ge 0, i=1,...,N, j=1,...,M\right\}$, $\left\{\sum_{j=1}^{M}Y_i^j\le b_i, i=1,...,N\right\}$.

А саме, знайти

$$\max_{\psi\in\Lambda}\max_{Y\in U} P(Y,\psi), \tag{7}$$

де

$$P\left(Y,\psi\right)=G(Y,\psi)-$$

$$-S_1\cdot\sum_{i=p+1}^{N}\max\left\{0,-\psi_i\right\}-S_2\cdot\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\max\left\{0,-Y_i^j\right\}- \tag{8}$$

$$-S_3\cdot\sum_{i=1}^{N}\max\left\{0,\sum_{j=1}^{M}Y_i^j-b_i\right\}.$$

Тут $S_1,\ S_2,\ S_3$ – достатньо великі додатні числа.

Визначаємо вектор узагальненого градієнту функції (8) у точці $\left(Y,\psi\right)=\left(Y_1^1,...,Y_N^1;...;Y_1^M,...,Y_N^M;\psi_1,...,\psi_N\right)$ наступним чином:

$$g_P(Y,\psi)=\left(g_p^Y(Y,\psi),g_p^\psi(Y,\psi)\right)=$$

$$=\left(g_p^{Y_1^1}(Y,\psi),...,g_p^{Y_N^1}(Y,\psi);...;g_p^{Y_1^M}(Y,\psi),...,g_p^{Y_N^M}(Y,\psi);g_p^{\psi_1}(Y,\tau,\psi),...,g_p^{\psi_N}(Y,\tau,\psi)\right),$$

при цьому його компоненти мають вигляд:

$$g_p^{Y_i^j}(Y,\psi)=-\varphi''^{\,j}_{iY_i^jY_i^j}(Y_i^j)\cdot Y_i^j+\varphi''^{\,j}_{iY_i^jY_i^j}(Y_i^j)\cdot\int_\Omega\rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx+$$
$$+S_2\max\left[0,sign(-Y_i^j)\right]-S_3\max\left[0,sign(\sum_{j=1}^M Y_i^j-b_i)\right];i=1,...,N,\ j=1,...,M, \tag{9}$$

$$g_p^{\psi_i}(Y,\psi)=\begin{cases}\int_\Omega\sum_{j=1}^M\rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx-b_i,\ i=1,...,p\\ \int_\Omega\sum_{j=1}^M\rho^j(x)\lambda_i^j(x)dx-b_i+S_1\max\left[0,sign(-\psi_i)\right],\ i=p+1,...,N,\end{cases} \tag{10}$$

де $\lambda_i^j(x)$ визначаються за формулами:

$$\lambda_i^j(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо } c^j(x,\tau_i)+\psi_i+\varphi'^{\,j}_{iY_i^j}(Y_i^j)=\min\limits_{k=1,N}[c^j(x,\tau_k)+\psi_k+\varphi'^{\,j}_{kY_k^j}(Y_k^j),\\ & i\neq k \text{ м. с. для } x\in\Omega,\\ 0, & \text{в інших випадках,}\end{cases} \tag{11}$$
$$i=1,...,N,\ j=1,...,M.$$

Опишемо послідовні етапи алгоритму.

***Алгоритм.*** Область $\Omega$ заключаємо в $n$-вимірний паралелепіпед П, сторони якого паралельні вісям декартової системи координат, покладемо $\rho^j(x)=0$ при $x\in\Pi\setminus\Omega$, $j=1,...,M$. Паралелепіпед П покриваємо прямокутною сіткою і задаємо початкове наближення $\left(Y,\psi\right)=\left(Y^{(0)},\psi^{(0)}\right)$. Обчислюємо значення $\lambda^{(0)}(x)$ у вузлах сітки за формулами (11) при $Y=Y^{(0)}$, $\psi=\psi^{(0)}$. Значення $g_p^Y\left(Y^{(0)},\psi^{(0)}\right)$, $g_p^\psi\left(Y^{(0)},\psi^{(0)}\right)$ у вузлах сітки визначаємо за формулами (9)-(10) при $Y=Y^{(0)}$, $\psi=\psi^{(0)}$, $\lambda(x)=\lambda^{(0)}(x)$. Вибираємо початковий крок $h_0>0$ r-алгоритму.

*Перший крок* алгоритму проводимо за формулами:

$$Y^{(1)}=Y^{(0)}+h_0g_p^Y\left(Y^{(0)},\psi^{(0)}\right),$$

$$\psi^{(1)}=\psi^{(0)}+h_0g_p^\psi\left(Y^{(0)},\psi^{(0)}\right),$$

де $P_\Pi$ – оператор проектування на П.

Переходимо до другого кроку.

Нехай у результаті обчислень після $k$, $k$ = 1, 2,… кроків алгоритму отримано значення $Y^{(k)},\psi^{(k)},\lambda^{(k-1)}(x)$ у вузлах сітки.

Опишемо *(k+1)-й крок* алгоритму.

1. Обчислюємо значення $\lambda^{(k)}(x)$ у вузлах сітки за формулами (11) при $Y^{(k)}$, $\psi^{(k)}$
2. Обчислюємо значення $g_p\left(Y,\psi\right)$ за формулами (9), (10) при $\lambda(x)=\lambda^{(k)}(x)$, $Y=Y^{(k)}$, $\psi=\psi^{(k)}$.
3. Проводимо (k+1)-й крок r-алгоритму узагальнених градієнтів із розтягненням простору, близького до r-алгоритму у Н-формі [7], коротка схема якого має вигляд

$$Y^{(k+1)}=Y^{(k)}+h_k\frac{H_{k+1}g_p^Y\left(Y^{(k)},\psi^{(k)}\right)}{\sqrt{\left(H_{k+1}g_p^Y\left(Y^{(k)},\psi^{(k)}\right),g_p^Y\left(Y^{(k)},\psi^{(k)}\right)\right)}},$$

$$\psi^{(k+1)}=\psi^{(k)}+h_k\frac{H_{k+1}g_p^\psi\left(Y^{(k)},\psi^{(k)}\right)}{\sqrt{\left(H_{k+1}g_p^\psi\left(Y^{(k)},\psi^{(k)}\right),g_p^\psi\left(Y^{(k)},\psi^{(k)}\right)\right)}},$$

де $H_{k+1}$ – матриця розтягнення простору з коефіцієнтом $\alpha$ у напрямку різниці двох послідовних узагальнених градієнтів, яка визначається наступним чином:

$$H_{k+1} = H_k + \left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right) \frac{H_k \Delta_k \Delta_k^T H_k}{\left(H_k \Delta_k, \Delta_k\right)},$$

$$\Delta_k = g_p^T\left(Y^{(k)}, \psi^{(k)}\right) - g_p^T\left(Y^{(k-1)}, \psi^{(k-1)}\right),$$

(тут $T$ – одна зі змінних $Y$ або $\psi$).

4. Якщо умова

$$\left\|\left(Y^{(k)}, \psi^{(k)}\right) - \left(Y^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}\right)\right\| \le \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \qquad (12)$$

не виконується, переходимо до ($k$+2)-го кроку алгоритму, у противному випадку – до п. 5.

5. Покладемо $Y_* = Y^{(l)}$, $\psi_* = \psi^{(l)}$, $\lambda_*(x) = \lambda^{(l)}(x)$, де $l$ – номер ітерації, на якій виконалася умова (12).

6. Обчислимо оптимальне значення цільового функціоналу за формулою (8) при $Y = Y^*$, $\psi = \psi^*$ і, для контролю правильності обчислень, за формулою

$$I(\lambda_*(\cdot)) = \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=1}^{N} [\varphi_i^j (\int_\Omega \rho^j(x) \lambda_{*i}^j(x) dx) + \int_\Omega c^j(x, \tau_i) \rho^j(x) \lambda_{*i}^j(x) dx].$$

Алгоритм описано.

**Розв'язання модельних задач.** Описаний алгоритм реалізовано для модельних нескінченновимірних транспортних задач. У заданій області розміщені дев'ять підприємств. Вони виробляють продукцію трьох видів для розміщеного в цій області з заданою щільністю споживача, з обмеженнями на потужність підприємств у вигляді рівностей та нерівностей. Вартість транспортування одиниці продукції від підприємства до споживача задається однією з метрик: евклідової, Чебишева або манхеттенської, в залежності від виду продукції. Функція попиту на продукцію у *модельній задачі 1* задається аналітично, а в *модельній задачі 2* дорівнює одиниці.

*Модельна задача 1.* Задано множину $\Omega$ споживачів трьох видів продукції, яка може виготовлятись дев'ятьма підприємствами. Границя області визначена наступним чином $\Omega = \{(x, y): 0 \le x \le 10, 0 \le y \le 10\}$.

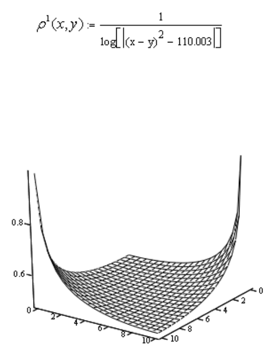
Вартість транспортування одиниці продукції з і-го підприємства $i = \overline{1,9}$ до споживача $(x, y)$ задається відповідно до виду продукції:

$$c^j(x, y, \tau_i) = \begin{cases} \sqrt{\left(\text{якщ} \; )\right)^2 + \left(y - \tau_i^{(2)}\right)^2}, & \text{ÿêù î} \quad j = 1; \\ \mathrm{m}\text{якщ} \; -\tau_i^{(1)}\Big|, \Big|y - \tau_i^{(2)}\Big|\Big\}, & \text{ÿêù î} \quad j = 2; \\ \Big|\text{якщ} \; )\Big| + \Big|y - \tau_i^{(2)}\Big|, & \text{ÿêù î} \quad j = 3. \end{cases}$$

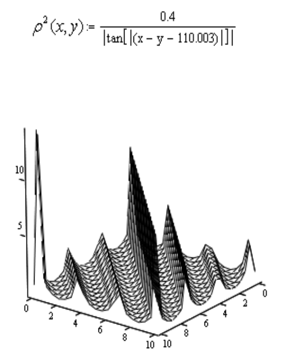
Попит $\rho^j(x, y)$ на продукцію кожного виду розподілений в області $\Omega$ з відповідними щільностями:

$$\rho^1(x, y) = \frac{1}{\ln\left|(x - y)^2 - 110.003\right|}, \quad \rho^2(x, y) = \frac{0.4}{\left|tg\left|x - y - 110.003\right|\right|}, \quad \rho^3(x, y) = \frac{50}{\left|x - y + 110.003\right|}.$$

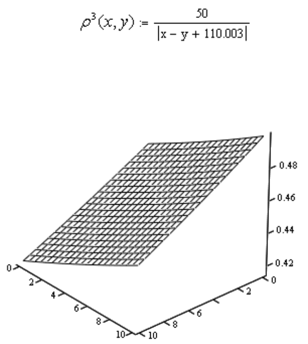
Графічне зображення функцій попиту для трьох видів продукції представлене на рис. 1.




a)




b)




c)

**Рис. 1. Графічне зображення функцій попиту $\rho^j(x,y)$ для кожного з трьох видів продукції: a) для I-го виду продукції; b) для II-го виду продукції; c) для III-го виду продукції**

Функції $\varphi_i^j(Y_i^j)$, які описують залежність вартості виробництва $j$-го виду продукції на $i$-ому підприємстві від його потужності, мають вигляд

$$\varphi_i^j(Y_i^j) = \left(Y_i^j\right)^2, \quad i = \overline{1,\ 9},\ j = 1,2,3,$$

де потужність $Y_i^j$ $i$-го підприємства по виробництву $j$-го виду продукції визначається за формулою:

$$Y_i^j = \iint\limits_{\Omega_i^j} \rho^j(x,y)dxdy.$$

Потужність $i$-го пункту виробництва по всім видам продукції визначається сумарним попитом споживачів, які належать $\Omega_i^j$, $i = \overline{1,9}$, та для пунктів виробництва $i = 1, 2, 4, 5, 7, 9$ неповинна перевищувати задані об'єми, тобто на потужності підприємств накладені наступні обмеження :

$$0 \le \sum_{j=1}^{3} \iint\limits_{\Omega_1^j} \rho^j(x,y)dxdy \le b_i,\ i = 1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 9,$$

$$b_1 = 100,\ b_2 = 60,\ b_4 = 80,\ b_5 = 17,\ b_7 = 100,\ b_9 = 12,$$

а для пунктів виробництва з номерами $i = 3,\ 6,\ 8$ повинна дорівнювати заданим об’ємам: $\sum_{j=1}^{3} \iint\limits_{\Omega_i^j} \rho^j(x,y)dxdy = b_i,\ i = 3,\ 6,\ 8,$

$$b_3 = 36,\ b_6 = 5,\ b_8 = 15.$$

Необхідно розбити множину споживачів Ω на їх зони обслуговування дев'ятьма підприємствами по кожному виду продукції, тобто на підмножини $\Omega_i^j$, $i = \overline{1,\ 9}$, $j = \overline{1,\ 3}$, так, щоб мінімізувати функціонал сумарних витрат на виробництво продукції та доставку її до споживача:

$$F\left(\{\Omega_1^1,...,\ \Omega_9^1;\Omega_1^2,...,\ \Omega_9^2;\Omega_1^3,...,\ \Omega_9^3\}\right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{9}\left[\varphi_i^j(\iint\limits_{\Omega_i^j}\rho^j(x,y)dxdy) + \iint\limits_{\Omega_i^j} c^j(x,\tau_i)\rho^j(x,y)dxdy\right]\left[\varphi_i^j(\iint\limits_{\Omega_i^j}\rho^j(x,y)dxdy) + \iint\limits_{\Omega_i^j} c^j(x,\tau_i)\rho^j(x,y)dxdy\right].$$

Не є виключенням той випадок, коли деякі з підмножин $\Omega_i^j$, $i = \overline{1,\ 9}$, $j = \overline{1,\ 3}$, опиняться порожніми.

Множина Ω покривалася сіткою з вузлами $(i,\ j)$, $i = 1,...,21,\ j = 1,...,21$.

В якості початкових значень двоїстих змінних задано $\psi_i^{(0)} = 0,\ i = \overline{1,9}$; початкові значення потужностей: $Y_1^{j(0)}$ =10, $Y_2^{j(0)}$=100, $Y_3^{j(0)}$=10, $Y_4^{j(0)}$=10, $Y_5^{j(0)}$=100, $Y_6^{j(0)}$=10, $Y_7^{j(0)}$=10, $Y_8^{j(0)}$=100, $Y_9^{j(0)}$=10, а також задані координати розміщення підприємств:

$$\tau^0 = \begin{pmatrix} 0.7;\ 1.4;\ 4.8;\ 8.7;\ 5.1;\ 8.9;\ 2.5;\ 5.8;\ 8.5 \\ 2.4;\ 5.6;\ 4.2;\ 2.5;\ 7.5;\ 8.3;\ 9.1;\ 1.5;\ 5.7 \end{pmatrix}.$$

Умовою завершення обчислень є виконання нерівності:

$$\left\| \left(Y^{(k)}, \psi^{(k)}\right) - \left(Y^{(k+1)}, \psi^{(k+1)}\right) \right\| \le \varepsilon, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

За *146* ітерацій отримано:

– максимальне значення функціоналу двоїстої задачі $G^* \approx 4646.87$;

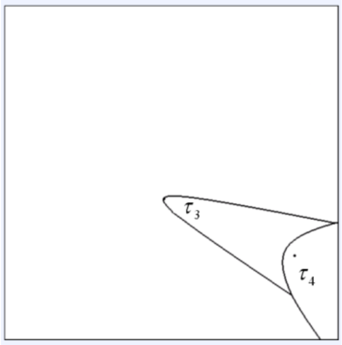
– мінімальне значення функціоналу прямої задачі $F_* \approx 4668.40$;

– оптимальні потужності кожного з дев'яти підприємств:

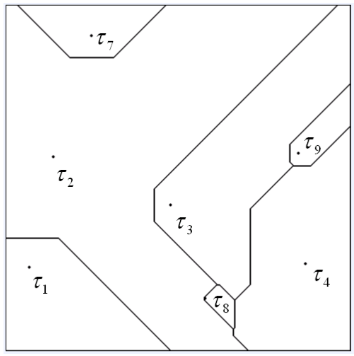
$$Y_1^* = 24.82;\ Y_2^* = 20.81;\ Y_3^* = 35.93;\ Y_4^* = 24.41;\ Y_5^* = 16.98;$$

$$Y_6^* = 4.95;\ Y_7^* = 24.23;\ Y_8^* = 14.65;\ Y_9^* = 11.89.$$

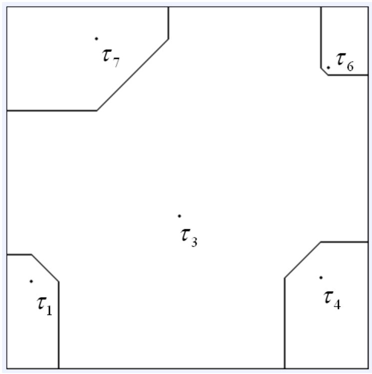
Оптимальне розбиття множини споживачів $\Omega$ на дев'ять зон обслуговування кожним з дев'яти підприємств по трьом видам продукції представлене на рис. 2.




a)




b)




c)

**Рис. 2. Оптимальне розбиття множини $\Omega$ на зони обслуговування кожним з дев'яти підприємств з фіксованими центрами по трьом видам продукції для модельної задачі 1: a) для I-го виду продукції; b) для II-го виду продукції; c) для III-го виду продукції.**

*Модельна задача 2.* У постановці першої модельної задачі задамо функцію попиту $\rho^j(x, y) = 1$, $j = 1, 2, 3$. За таких умов, після *204* ітерації, отримали наступні результати:

– максимальне значення функціоналу двоїстої задачі $G^* \approx 14254.00$;

– мінімальне значення функціоналу прямої задачі $F_* \approx 14242.49$;

– оптимальні потужності кожного з дев'яти підприємств:

$$Y_1^* = 53.65\ Y_2^* = 52.89;\ Y_3^* = 35.93;\ Y_4^* = 54.46;\ Y_5^* = 16.94;$$

$$Y_6^* = 4.95;\ Y_7^* = 54.02;\ Y_8^* = 14.91;\ Y_9^* = 11.98.$$

Оптимальне розбиття множини споживачів $\Omega$ на дев'ять зон обслуговування кожним з дев'яти підприємств по трьом видам продукції представлене на рис. 3.

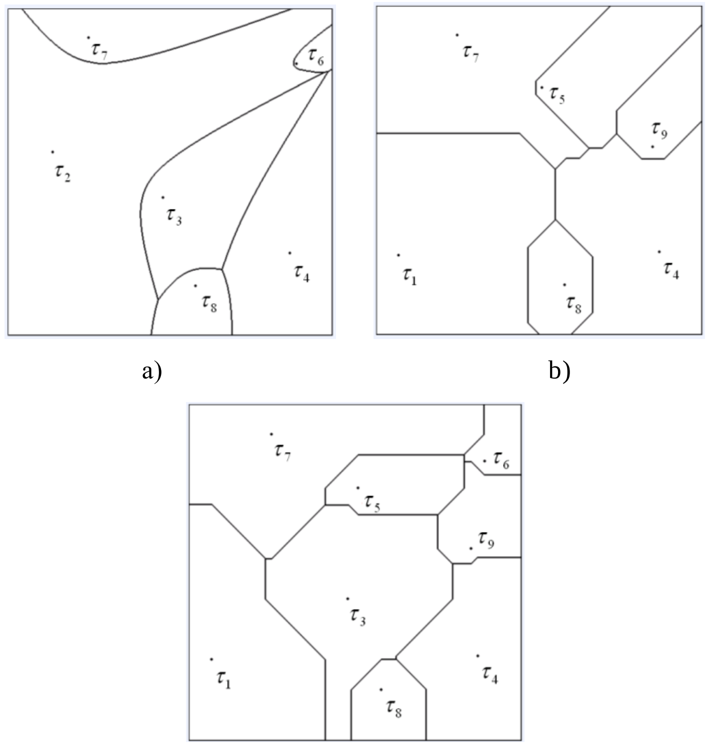



**Рис. 3. Оптимальне розбиття множини $\Omega$ на зони обслуговування кожним з дев'яти підприємств з фіксованими центрами по трьом видам продукції для модельної задачі 2:**

**а) для I-го виду продукції; b) для II-го виду продукції; c) для III-го виду продукції.**

За результатами розглянутих модельних задач можна зробити наступні висновки:

1) для кожної із задач виконуються умови розв'язності задачі **А**:

$$S = M \cdot \int_{\Omega} \rho^j(x)dx \le \sum_{i=1}^{9} b_i, \ \ 0 < b_i \le S, \ \ i = 1,...,9, \ j = 1,2,3,$$

тобто загальна оптимальна потужність дев'яти підприємств, яка отримана за алгоритмом розв'язку (для *задачі 1* це *178.67*, а для *задачі 2* це *299.73*) не перевищує *S = 425* – суми заданих об'ємів потужностей підприємств;

2) отримані оптимальні потужності 3-го, 6-го та 8-го підприємства у кожній із задач відповідають обмеженням у вигляді рівностей, тобто дорівнюють заданим значенням, а саме $Y_3^* \approx 36, \ \ Y_6^* \approx 5$, $Y_8^* \approx 15$;

3) у *задачі 1* функція попиту $\rho^j(x,y) \not\equiv 1, \ j = \overline{1, \ 3}$, тому деякі з підмножин, за рахунок вигляду функції $\rho^j$, опинились порожніми, що не суперечить постановці вихідної задачі. Так, наприклад, на рисунку 2 а) порожніми є підмножини з номерами 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9 і т.п.

Описаний алгоритм реалізовано мовою Visual Fortran 6.5 у середовищі Microsoft Visual Studio.

**Висновки.** Приведено алгоритм розв'язання нелінійної неперервної багатопродуктової задачі оптимального розбиття множини $\Omega$ з $n-$вимірного евклідового простору на її неперетинні підмножини з фіксованими центрами цих підмножин при обмеженнях у формі рівностей та нерівностей, з функціями попиту та вартості транспортування одиниці продукції, які можуть бути різними для різних видів продукції . Програмна реалізація алгоритму проілюстрована на модельних задачах.

**Бібліографічні посилання**


1. **Киселёва Е.М.** Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения / Е.М. Киселёва, Н.З. Шор // Монография. – К., 2005.

2. **Киселёва Е.М.** Решение непрерывной нелинейной задачи оптимального разбиения множеств с размещением центров подмножеств для случая выпуклого целевого функционала / Е.М. Киселёва, М.С. Дунайчук // Кибернетика и системный анализ. — К. , 2008. — № 2. — С. 134—152.

3. **Кісельова О.М.** Розв'язання нелінійної неперервної багатопродуктової задачі оптимального розбиття множин з розташуванням центрів підмножин / О.М. Кісельова, В.О. Строєва// Питання прикладної математики і математич- ного моделювання. – Д.: ДНУ, 2010. – С. 155–164.

4. **Кісельова О.М.** Про алгоритм розв'язку нелінійної багатопродуктової задачі оптимального розбиття множин з фіксованими центрами / О.М. Кісельова, В.О. Строєва // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: VIII Міжнар. наук.-практ. конф.: тезис докл. – Д. ДНУ, 2010. – С. 104.

5. **Кісельова О.М.** Застосування операторних рівнянь при розв'язку нелінійної багатопродуктової задачі оптимального розбиття множин / О.М. Кісельова, В.О. Строєва // Проблеми математичного моделювання: Міжнар. наук.-практ. конф.: тезис докл. – Д. ДДТУ, 2011. – С. 9–11.

6. **Трухаев Р.Н.** Теория неклассических вариационных задач / Р.Н. Трухаев, В.В. Хоменюк – Л., 1971.

7. **Шор Н.З.** Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложение. // – К., 1979.

*Дата надходження до редколегії: 21.03.11*