УДК 517.518.82:517.518.36:517.518.45

П.С. Янчук
Міжнародний економіко-гуманітарний університет ім. Дем'янчука

ПРО СПЕКТРАЛЬНИЙ МЕТОД НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА

Побудовано явну формулу наближеного розв'язку неоднорідної задачі Діріхле для рівняння Пуассона у вигляді алгебраїчного полінома. Встановлена апріорна оцінка апроксимації означає, що порядок похибки наближення точного розв'язку співпадає з порядком похибки середньоквадратичного наближення розв'язку.

Построено приближенное решение неоднородной задачи Дирихле для урав-нения Пуассона в прямоугольнике в форме алгебраического полинома. Установленная априорная оценка аппроксимации означает, что построенные полиномы сходятся к точному решению со скоростью сходимости среднеквадратичного приближения.

We construct an approximate solution of the inhomogeneous Dirichlet problem for Poisson's equation in a rectangle in the form of an algebraic polynomial. Established a priori estimate of the approximation means that the constructed polynomials converge to the exact solution at a rate of convergence of the mean-square approximation.

Ключові слова: ряд Фур'є, ортогональний поліном, спектральний метод, рівняння Пуассона.

Вступ і постановка задачі. Численні статті і монографії присвячені обчислювальним методам на основі методу Гальоркіна є, наприклад, у списку літератури, наведеному в [2,3]. Квазі-спектральні поліноми $K_i^{\circ}(x)$ вивчались і застосовувались до побудови наближеного розв'язку диферен-ціальних рівнянь зокрема в [6 – 8]. У роботі [6] розглядалося наближення розв'язку задачі Діріхле з однорідними умовами, у [8] – з неоднорідними умовами, у [7] розглянуті крайові задачі для звичайних диференційних рівнянь з неоднорідними умовами. В даній роботі досліджується зв'язок між рядом Фур'є за квазі-спектральними поліномами розв'язку та рядами Фур'є відомих з умови задачі функцій і на цій основі суттєво покращена формула наближеного розв'язку і одержано нові оцінки апроксимації наближеного розв'язку. Характерною рисою реалізації одержаної формули є економія машинної пам'яті, висока швидкодія та відмінна якість наближення. З точки зору машинних обчислень дане наближення практично нічим не відрізняється від середньоквадратичного наближення рядом Фур'є-Лежандра.

Наближені розв'язки в загальному випадку задачі Діріхле:

$$u_{xx}+u_{yy}=f(x,y), \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &u(x,-1)=\varphi_1(x), u(x,1)=\varphi_2(x),\\ &u(-1,y)=\psi_1(y), u(1,y)=\psi_2(y) \end{aligned} \tag{2}$$

подаватимемо у вигляді алгебраїчного полінома степеня $N=2n+1$:

$$u^n=\sum_{i,j=0}^{2n+1}u_{i,j}^{\circ}K_i^{\circ}(x)K_j^{\circ}(y), u_{i,j}^{\circ}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}u(x,y)K_i^{\circ}(x)K_j^{\circ}(y)dxdy, \tag{3}$$

де $K_i^{\circ}(x),\quad i=1,\dots,2n+2$ ортонормовані на відрізку $[-1,1]$ алгебраїчні поліноми. Припустимо, що нам відомі розвинення правої частини рівняння (1) подвійними рядами Фур'є та крайових умов (2) одномірними рядами Фур'є за квазі-спектральними поліномами і знайдемо розвинення (3), що зводиться до знаходження коефіцієнтів Фур'є розв'язку u задачі (1), (2) через коефіцієнти Фур'є функцій $f,\varphi_1,\varphi_2,\psi_1,\psi_2$, які позначатимемо через $f_{i,j}^{\circ},\varphi_{1i}^{\circ},\varphi_{2i}^{\circ},\psi_{1j}^{\circ},\psi_{2j}^{\circ}$.

Основні означення і властивості квазі-спектральних поліномів [6–8]. Через $J=J_x$ позначимо операцію інтегрування $(J_xu)(x)=\int_{-1}^{x}u(t)dt$, а через $J_{xx}=J_x(J_x)$ повторне застосування цієї операції. Через M_k^m позначимо множину всіх алгебраїчних поліномів, які є лінійними комбінаціями поліномів Лежандра $P_i,\quad i=k,\dots,m,\quad P_i(1)=1$. Через π_k^m позначимо операцію проектування $(\pi_k^m u)(x)=\sum_{i=k}^{m}c_iP_i(x)$, де $u=\sum_{i=0}^{\infty}c_iP_i(x)\in L_2[-1,1]$ - ряд Фур'є-Лежандра функції u. Оператор $-\pi_1^{2n}J_{xx}:\mathrm{M}_1^{2n}\to\mathrm{M}_1^{2n}$ є симетричним і додатно визначеним, тому існують $2n$ таких поліномів $K_i=K_i(x)\in\mathrm{M}_1^{2n}$ і $2n$ таких додатних чисел λ_i (характеристичних чисел), для яких справджуються рівності

$$-\pi_1^{2n}J_{xx}K_i=\lambda_iK_i,\quad i=1,\dots,2n. \tag{4}$$

Звідси дістаємо, що для заданого фіксованого натурального n квазі-спектральні поліноми $K_i = K_i(x)$ задовольняють квазі-спектральне інте-гральне рівняння

$$-\pi_1^{\infty} J_{xx} K_i = \lambda_i K_i + \tau_i \bar{P}_{2n+2-\bar{i}}, \quad \bar{i} = i \operatorname{mod} 2, \\ \bar{P}_i(x) = \left(1/\sqrt{i(i+1)}\right) P_i(x), \quad i = 1, \ldots, 2n \tag{5}$$

для деяких дійсних чисел λ_i, τ_i, причому їх парність співпадає з парністю їх індексів. Для уникнення двозначності звернемо увагу, що $\bar{i} = 0$ для парних i та $\bar{i} = 1$ для непарних. Через $K_i^{\circ} = \sqrt{\lambda_i^{\circ}} J_x K_i, \quad \lambda_i^{\circ} = 1/\lambda_i, \quad i = 1, \ldots, 2n$ позначимо поліноми, які, очевидно, перетворюються в нуль у точках $x = \pm 1$, а парність яких є протилежною парності їх індексів. Квазі-спектральні поліноми $K_i^{\circ} = K_i^{\circ}(x)$ задовольняють квазі-спектральне диференціальне рівняння

$$-\frac{d^2}{dx^2} K_i^{\circ} = \lambda_i^{\circ} K_i^{\circ} + \tau_i^{\circ} \bar{P}'_{2n+2-\bar{i}}, \quad i = 1, \ldots, 2n \tag{6}$$

де, $\tau_i^{\circ} = \lambda_i^{\circ} \sqrt{\lambda_i^{\circ}} \tau_i$.

Зазначимо, що для поліномів Лежандра $\bar{P}_m, \quad m = 1, 2, \ldots$ та їх похідних $\bar{P}'_m = \frac{d}{dx} \bar{P}_m$ справджуються рівності

$$\int_{-1}^{1} \left(\bar{P}'_m(x)\right)^2 dx = 1, \int_{-1}^{1} \left(\bar{P}_m(x)\right)^2 dx = 2/\left(m(m+1)(2m+1)\right), \\ \bar{P}_m(1) = 1/\sqrt{m(m+1)}, \bar{P}'_m(1) = \sqrt{m(m+1)}/2. \tag{7}$$

Поліноми K_i та K_i° утворюють ортонормовані системи поліномів:

$$\int_{-1}^{1} K_i(x) K_j(x) dx = \int_{-1}^{1} K_i^{\circ}(x) K_j^{\circ}(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \\ i = 1, \ldots, 2n, \quad j = 1, \ldots, 2n, \tag{8}$$

причому, з точністю до множника, поліноми K_i є похідними поліномів K_i°.

Добавляючи до описаних тільки що внутрішніх поліномів $K_i^{\circ}, i = 1, \ldots, 2n$ поліноми $K_{2n+1}^{\circ} = \frac{d}{dx} \bar{P}_{2n+2}, K_{2n+1}^{\circ} = \frac{d}{dx} \bar{P}_{2n+1}$, які ми називаємо крайовими і одержимо потрібний нам скінченовимірний базис із $2n+2$ квазі-спектральних поліномів. Для функцій двох змінних поліноми $K_i^{\circ}(x) K_j^{\circ}(y), (i, j = 1, \ldots, 2n+2)$ утворюють ортонормований базис. Коефіцієнти Фур'є $u_{i,j}^{\circ}\ (i, j = 1, \ldots, 2n)$ за квазі-спектральними поліномами $K_i^{\circ}(x) K_j^{\circ}(y), (i, j = 1, \ldots, 2n+2)$ назвемо внутрішніми, а всі інші крайовими.

Внутрішні коефіцієнти Фур'є частинних похідних функцій за системою квазі-спектральних поліномів. Знайдемо вираження для коефіцієнта Фур'є похідної $u_{xx} = \frac{d^2 u}{dx^2}$ функції $u = u(x, y)$ двох змінних. Двічі інте-груючи частинами і враховуючи рівності $K_i^{\circ}(\pm 1) = 0, \quad i = 1, \ldots, 2n$, а потім використовуючи формулу (6) дістанемо

$$\left(u_{xx}\right)_{i,j}^{\circ} = -\lambda_i^{\circ} u_{i,j}^{\circ} + d_i \left(\psi_{2j}^{\circ} + (-1)^{i+1} \psi_{1j}^{\circ}\right) + N_{\bar{i}} \tau_i^{\circ} \left(u_x\right)_{2n+2-\bar{i}, j}, \tag{9}$$

де

$$\left(u_x\right)_{2n+2-\bar{i}, j} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u_x K_j^{\circ}(y) \hat{P}_{2n+2-\bar{i}}(x) dx, \\ d_i = \left(-\lambda_i^{\circ -\frac{1}{2}} K_i(1) + \tau_i^{\circ} \bar{P}_{2n+2-\bar{i}}(1)\right), \\ N_{\bar{i}} = -\left(\left(2n+2-\bar{i}\right)\left(2n+3-\bar{i}\right)\left(4n+5-2\bar{i}\right)\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

Тут і далі $\hat{P}_k$ ортонормовані поліноми Лежандра. Аналогічно,

$$\left(u_{yy}\right)_{i,j}^{\circ} = -\lambda_i^{\circ} u_{i,j}^{\circ} + d_j \left(\varphi_{2i}^{\circ} + (-1)^{i+1} \varphi_{1i}^{\circ}\right) + N_{\bar{j}} \tau_j^{\circ} \left(u_y\right)_{i, 2n+2-\bar{j}}. \tag{11}$$

Вираження внутрішніх коефіцієнтів Фур'є розв'язку рівняння Пуассона через коефіцієнти Фур'є правої частини та крайових значень. Застосовуючи формули (9), (11) до рівності (1), дістанемо

$$f_{i,j}^{\circ}=\left(u_{xx}+u_{yy}\right)_{i,j}^{\circ}=$$
$$=-\left(\lambda_i^{\circ}+\lambda_j^{\circ}\right)u_{i,j}^{\circ}+d_i\left(\psi_{2j}^{\circ}+(-1)^{i+1}\psi_{1j}^{\circ}\right)+d_j\left(\varphi_{2i}^{\circ}+(-1)^{i+1}\varphi_{1i}^{\circ}\right)+$$
$$+N_{\bar{i}}\tau_i^{\circ}\left(u_x\right)_{2n+\bar{i},j}+N_{\bar{j}}\tau_j^{\circ}\left(u_y\right)_{i,2n+\bar{j}}\quad (i=1,...,2n;\ j=1,...,2n). \tag{12}$$

Звідси легко знаходимо $u_{i,j}^{\circ},\ i,j=1,...,2n$: $u_{i,j}^{\circ}=U_{i,j}^{\circ}+\varepsilon_{i,j}^{\circ}$, де

$$U_{i,j}^{\circ}=-f_{i,j}^{\circ}+d_i\left(\psi_{2j}^{\circ}+(-1)^{i+1}\psi_{1j}^{\circ}\right)+d_j\left(\varphi_{2i}^{\circ}+(-1)^{i+1}\varphi_{1i}^{\circ}\right)\Big/\left(\lambda_i^{\circ}+\lambda_j^{\circ}\right), \tag{13}$$

$$\varepsilon_{i,j}^{\circ}=\left(N_{\bar{i}}\tau_i^{\circ}\left(u_x\right)_{2n+2-\bar{i},j}+N_{\bar{j}}\tau_j^{\circ}\left(u_y\right)_{i,2n+2-\bar{j}}\right)\Big/\left(\lambda_i^{\circ}+\lambda_j^{\circ}\right). \tag{14}$$

Крайові коефіцієнти Фур'є функцій $u\in W_2^1(\Pi)$. У певному сенсі ці коефіцієнти виражаються лише через крайові значення функції u. Інте-груючи частинами у формулах для коефіцієнтів Фур'є

$$u_{2n+2-\bar{i},j}^{\circ}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}u\bar{P}'_{2n+2-\bar{i}}(x)K_j^{\circ}(y)\,dxdy$$

дістанемо

$$u_{2n+2-\bar{i},j}^{\circ}=U_{2n+2-\bar{i},j}^{\circ}+\varepsilon_{2n+2-\bar{i},j}^{\circ},$$
$$U_{2n+2-\bar{i},j}^{\circ}=\bar{P}_{2n+2-\bar{i}}(1)\left(\psi_{2j}^{\circ}+(-1)^{i+1}\psi_{1j}^{\circ}\right),\ \varepsilon_{2n+2-\bar{i},j}^{\circ}=N_{\bar{i}}\left(u_x\right)_{2n+2-\bar{i},j}. \tag{15}$$

Аналогічно, обчислюємо $u_{i,2n+2-\bar{j}}^{\circ}$. Залишилось знайти ще чотири коефіцієнти Фур'є з крайових умов. Інтегруючи частинами, одержимо

$$u_{2n+2-\bar{i},2n+2-\bar{j}}^{\circ}=U_{2n+2-\bar{i},2n+2-\bar{j}}^{\circ}+\varepsilon_{2n+2-\bar{i},2n+2-\bar{j}}^{\circ},$$

де

$$U_{2n+2-\bar{i},2n+2-\bar{j}}^{\circ}=\bar{P}_{2n+2-\bar{i}}(1)\bar{P}_{2n+2-\bar{j}}(1)\times$$
$$\times\left(u(1,1)+(-1)^{i+1}u(-1,1)+(-1)^{j+1}u(1,-1)+(-1)^{i+j}u(-1,-1)\right),$$
$$\varepsilon_{2n+2-\bar{i},2n+2-\bar{j}}^{\circ}=-\bar{P}_{2n+2-\bar{i}}(1)N_{\bar{i}}\left(\left(\psi_2'\right)_{2n+2-\bar{j}}-\left(\psi_1'\right)_{2n+2-\bar{j}}\right)-$$
$$-\bar{P}_{2n+2-\bar{j}}(1)N_{\bar{j}}\left(\left(\varphi_2'\right)_{2n+2-\bar{i}}-\left(\varphi_1'\right)_{2n+2-\bar{i}}\right)+N_{\bar{i}}N_{\bar{j}}\left(u_{xy}\right)_{2n+2-\bar{i},2n+2-\bar{j}}. \tag{16}$$

Тут штрих означає похідну відповідної функції, $\left(\psi_1'\right)_j=\int_{-1}^{1}\psi_1'(y)\hat{P}_j(y)\,dx,\ \left(u_{xy}\right)_{ij}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}u_{xy}\hat{P}_i(x)\hat{P}_j(y)\,dxdy$ і т.д.

Загальний вигляд наближеного розв'язку задачі Діріхле. З доведених формул (13) – (16) для коефіцієнтів Фур'є за системою квазі-спектральних поліномів випливає наступна теорема.

Теорема 1. *Часткова сума ряду Фур'є-Лежандра загального розв'язку u задачі Діріхле (1), (2) має вигляд*

$$u^n=U^n+\varepsilon^n, \tag{17}$$

де

$$U^n=\sum_{i,j=1}^{2n+2}U_{i,j}^{\circ}K_i^{\circ}(x)K_j^{\circ}(y),\ \varepsilon^n=\sum_{i,j=1}^{2n+2}\varepsilon_{i,j}^{\circ}K_i^{\circ}(x)K_j^{\circ}(y), \tag{18}$$

а числа $U_{i,j}^{\circ},\varepsilon_{i,j}^{\circ}$ знаходяться за формулами (13)-(16).

Оцінка полінома ε^n покаже, якою є величина відхилення полінома U^n від часткової суми $u^n=\pi_0^{2n+1}u$ ряду Фур'є-Лежандра точного розв'язку u задачі Діріхле. Для того, щоб одержати необхідну оцінку знадобиться наступна лема.

Лема 1. Для чисел $\tau_i^{\circ},\lambda_i^{\circ}$ справедлива оцінка

$$\left(N_{\bar{i}}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left(\tau_{2i-\bar{i}}^{\circ}\big/\lambda_{2i-\bar{i}}^{\circ}\right)^2<(2n+1)^{-2}\big/2,\quad \bar{i}=0,1. \tag{19}$$

Доведення. Припустимо, що поліном K_i° парний і помножимо обидві частини рівності (6) на поліном Лежандра $\bar{P}_{2n}=\bar{P}_{2n}(x)$, зінтегруємо знайдену рівність по x і дістанемо

$$-\int_{-1}^{1}\bar{P}_{2n}\frac{d^2}{dx^2}K_i^{\circ}dx=\lambda_i^{\circ}\int_{-1}^{1}\bar{P}_{2n}K_i^{\circ}dx+\tau_i^{\circ}\int_{-1}^{1}\bar{P}_{2n}\frac{d}{dx}\bar{P}_{2n+2-\bar{i}}dx,\quad i=1,...,2n. \tag{20}$$

Степінь парних поліномів K_i° (i-не парне) не перевищує $2n$. Внаслідок ортогональності поліномів Лежандра інтеграл у лівій частині рівності дорівнює нулеві. Інтегруючи частинами в другому доданку справа дістанемо

$$\int_{-1}^{1}\bar{P}_{2n}\frac{d}{dx}\bar{P}_{2n+1}dx = 2\bar{P}_{2n}(1)\bar{P}_{2n+1}(1) = \frac{2}{(2n+1)\sqrt{2n(2n+2)}}. \qquad (21)$$

Підставивши (21) в (20), матимемо

$$\int_{-1}^{1}\bar{P}_{2n}K_i^{\circ}dx = -\frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n(2n+2)}}\frac{\tau_i^{\circ}}{\lambda_i^{\circ}}, \quad i = 1,3...,2n-1. \qquad (22)$$

Із рівностей (21),(22) випливає формула розкладу полінома Лежандра в ряд Фур'є за ортонормованою системою квазі-спектральних поліномів

$$\bar{P}_{2n} = \frac{1}{(2n+1)\sqrt{2n(2n+2)}}\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{\tau_{2i-1}^{\circ}}{\lambda_{2i-1}^{\circ}}K_{2i-1}^{\circ} + \frac{d}{dx}\bar{P}_{2n+1}\right). \qquad (23)$$

Норма полінома $\bar{P}_{2n}$ дається формулою (7), а тому із ортонормованості квазі-спектральних поліномів випливає справедливість леми для парних поліномів K_i°. Для непарних поліномів лема встановлюється аналогічно.

Ортонормовані поліноми Лежандра $\hat{P}_i(x)\hat{P}_j(y), i,j = 0,1,...$ дають у просторі функцій $L_2(\Pi), \Pi = [-1,1]^2$ повну ортонормовану систему функцій, часткова сума ряду Фур'є-Лежандра $u^n = \pi_0^{2n+1}u = \sum_{i,j=0}^{2n+1}u_{i,j}\hat{P}_i(x)\hat{P}_j(y)$ є поліномом середньоквадратичного наближення степеня $2n+1$, а

$$E_m(u)^2 = \left\|u - \pi_0^{2n+1}u\right\|^2 = \sum_{\max(i,j)>2n+1}u_{i,j}^{\ 2}, \qquad (24)$$

де $u_{ij} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}u\hat{P}_i(x)\hat{P}_j(y)dxdy$ – коефіцієнти подвійного ряду Фур'є-Лежандра, є величиною середньоквадратичного відхилення у випадку фун-кцій двох змінних $u = u(x,y)$.

Завдяки ортонормованості квазі-спектральних поліномів

$$\varepsilon^n = \sum_{i,j=1}^{2n+2}\varepsilon_{i,j}^{\circ\,2}.$$

Тому із явних формул (14) - (16) для коефіцієнтів Фур'є $\varepsilon_{i,j}^{\circ}$, а також формул типу (24), застосовуючи скінчену нерівність Коші-Буняковського після простих обчислень одержимо наступну теорему.

Теорема 2. *Нехай розв'язок задачі Діріхле,* $u \in W_2^2(\Pi)$, *а його слід* $u\big|_{\partial\Pi} \in W_2^1(\partial\Pi)$. *Тоді, для відхилення* $\varepsilon^n = u^n - U^n$ *полінома* U^n *від полінома* u^n *найкращого наближення розв'язку задачі Діріхле в метриці гільбертового простору* $L_2(\Pi)$ *справджується оцінка*

$$\left\|\varepsilon^n\right\|^2 < \left(2^{-1}N^{-2} + O\left(N^{-3}\right)\right)\left(E_N(u_x)^2 + E_N(u_y)^2\right) + 4N^{-5}\left\{\left(E_N(\varphi_1')\right)^2\right.$$
$$\left. + \left(E_N(\varphi_2')\right)^2 + \left(E_N(\psi_1')\right)^2 + \left(E_N(\psi_2')\right)^2 + \left(E_N(u_{xy})\right)^2\right\}, \qquad (25)$$

де c *деяке число, залежне від* k , *але не залежне від* n .

Із прямих теорем L_2-наближення [4,5] (теореми Джексона) випливає наступна теорема

Теорема 3. *Нехай розв'язок задачі Діріхле (1),(2)* $u \in W_2^k(\Pi)$, *а його слід* $u\big|_{\partial\Pi} \in W_2^{k-1}(\partial\Pi)$. *Тоді для відхилення полінома* U^n *від розв'язку задачі Діріхле в метриці гільбертового простору* $L_2(\Pi)$ *справджується оцінка*

$$\left\|u - U^n\right\|_{\Pi} \le c\left(\max_{|i|=k}\left\|D^i u\right\|_{\Pi} + \max_{|i|=k-1}\left\|D^i u\right\|_{\partial\Pi}\right)N^{-k}, \qquad (26)$$

де c *деяке число, залежне від* k , *але не залежне від* n .

Висновок. Для середньоквадратичного наближення $u^n = U^n + \varepsilon^n$ розв'язку $u \in W_2^k(\Pi)$ неоднорідної задачі Діріхле порядок наближення дорівнює $O\left(N^{-k}\right)$ відносно степеня полінома $N = 2n+1$. Установлена в роботі оцінка для наближеного розв'язку U^n має такий самий порядок наближення і відрізняється від середньоквадратичного наближення доданком ε^n порядку $O\left(N^{-k}\right)$, який виник із-за апроксимації диференційного рівняння та крайових умов. У цьому сенсі одержано таке явне наближення розв'язку задачі Діріхле алгебраїчними поліномами, яке має максимально можливий порядок швидкості збіжності в просторі $L_2(\Pi)$. Такі наближення можна назвати майже середньоквадратичними наближеннями.

Відомо, що коли $f \in L_2(\Pi)$, а крайові умови достатньо гладкі: $u|_{\partial\Pi} \in W_2^1(\partial\Pi)$, то $u \in W_2^2(\Pi)$. У цьому випадку середньоквадратична похибка одержаного наближення U^n розв'язку задачі Діріхле є величиною порядку $O(N^{-2})$, де $N = 2n+1$ степінь наближеного полінома.

Бібліографічні посилання

1. **Пашковский С.** Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышова. / С. Пашковский. -М., 1983, 384 с.
2. **Ректорис К.** Вариационные методы в математической физике и технике. / К. Ректорис. – М.,1985, 590 с.
3. **Флетчер К.** Численные методы на основе метода Галеркина. / К. Флетчер -М.,1988, 352с.
4. **Бабенко К.И.** Основы численного анализа. / К.И. Бабенко – М., 1986, 744 с.
5. **Михлин С.Г.** Некоторые вопросы теории погрешностей. / С.Г. Михлин – Л., 1988, 333с.
6. **Янчук П.С.** Использование А-метода при решении эллиптических и параболических уравнений / П.С. Янчук //Гармонический анализ и развитие аппроксимационных методов. – Киев: 1989. – С.112-121.
7. **Янчук П.С.** Квазіспектральні многочлени та крайові задачі.- / П.С. Янчук //Волинський математичний вісник. – 1999. – Вип. 6. – С.183-187.
8. **Янчук П.С.** Метод многочленних рядів Фур'є для задачі Діріхле для рівняння Пуассона в квадраті $[-1,1]\times[-1,1]$ / П.С. Янчук //Волинський математичний вісник. – 2000. – Вип. 7. – С.193-208.

Надійшла до редколегії 2.07.12