УДК 519.85:

С.А. Ус
Национальный горный университет

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗБИЕНИЯ МНОЖЕСТВА С ИНТЕРВАЛЬНЫМ ЦЕЛЕВЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ

Сформульвано нову постановку задачі оптимального розбиття множин (ОРМ) із інтеральним цільовим функціоналом та запропоновано підхід до її розв'язання, на основі зведення до багатокритерійної задачі ОРМ, доведено розв'язність отриманої багатокритерійної задачі.

Сформулирована новая постановка задачи оптимального разбиения множеств (ОРМ) с интервальным целевым функционалом и предложен подход к ее решению, основаный на сведении к многокритериальной задаче ОРМ, доказана разрешимость полученной многокритериальной задачи.

It was stated a new formulation of set patitioning problem with interval objective functional and a new approach suggested for solving it which is based on data by information about the multi-criteria set patitioning problem, the solubility of the resulting multi-criteria problem was proved.

Ключевые слова: оптимальное разбиение множеств, неполная информация, метод редукции, неопределенность

Введение. В настоящее время большой интерес вызывают задачи принятия решений в условиях неполной информации. Это вызвано тем, что в реальных условиях часто не возможно получить полную информацию об объекте и условиях его существования, а использование приближенных данных сильно огрубляет модель. Поэтому многие задачи рассматриваются в условиях неполной или нечеткой информации. Исключением не стала и задача оптимального разбиения некоторого континуального множества на его непересекающиеся подмножества (ОРМ), поскольку многие практически важные задачи могут быть рассмотрены в рамках этой математической модели [2]. Задачи ОРМ в условиях непопределенности исследовались в работах [2;3;4]. В [5] были предложены различные математические модели задач ОРМ в нечетких условиях, в работах [6;7] предложен метод решения задачи ОРМ с множественнозначным целевым функционалом и подход для решения задачи ОРМ с интервальным целевым функционалом, основанный на ее сведении к задаче с множественнозначным функционалом. В данной работе рассмотрен подход к решению такой задачи, основаный на сведении ее к многокритериальной задаче ОРМ с дополнительными ограничениями.

Постановка задачи. Под бесконечномерной задачей оптимального разбиения с интервальным целевым функционалом будем понимать такую задачу.

Пусть потребитель некоторой однородной продукции распределен в области Ω. Конечное число N производителей, расположенных в заданных изолированных точках τ_i, $i=\overline{1,N}$ области Ω, образуют систему точек $\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_N$. Известен спрос $\rho(x)$ на продукцию в каждой точке области Ω, и стоимость доставки продукции $c_i(x)$, $i=\overline{1,N}$ – из пункта производства τ_i в пункт потребления x, причем значения функции $c_i(x)$ в каждой точке x области Ω, представляют собой некоторый интервал: $c_i(x)=\left[c_i^1(x);c_i^2(x)\right]$. Предполагается, что прибыль производителя зависит только от транспортных расходов. Мощность i-го производителя определяется суммарным спросом обслуживаемых потребителей и не должна превышать заданных объемов b_i, $i=\overline{1,N}$. Необходимо разбить область Ω на зоны обслуживания каждым из производителей, т.е. на подмножества $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_N$, так, чтобы суммарные затраты на доставку продукции были минимальны.

Поставленной задаче соответствует следующая математическая модель.

Задача А. Пусть Ω – замкнутое ограниченное измеримое по Лебегу множество евклидова пространства E^n. Необходимо разбить его на N измеримых по Лебегу подмножеств $\Omega_1,\Omega_2,\ldots,\Omega_N$, так, чтобы функционал

$$F(\Omega_1,\Omega_2,\ldots,\Omega_N)=\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i}c_i(x)\rho(x)dx$$

достигал минимального значения при ограничениях

$$\int_{\Omega_i} \rho(x)dx \le b_i, \quad i=\overline{1,N}$$

$$\text{mes}\left(\Omega_i \cap \Omega_j\right)=0,\ i\neq j,\ i,j=\overline{1,N},$$

$$\bigcup_{i=1}^{N}\Omega_i=\Omega,$$

Здесь $c_i(x)=[c_i^1(x); c_i^2(x)]$, $i=\overline{1,N}$, причем $c_i^1(x)$, $c_i^2(x)$ – заданные действительные, ограниченные, измеримые на Ω функции, такие что $c_i^1(x)\le c_i^2(x)$ для всех $x\in\Omega$, $i=\overline{1,N}$; $\rho(x)$ действительная неотрицательная интегрируемая функция, заданная на Ω; b_i, $i=\overline{1,N}$ заданные действительные положительные числа, удовлетворяющие условию:

$$\sum_{i=1}^{N} b_i \ge S,\ S=\int_{\Omega}\rho(x)dx \tag{1}$$

Метод решения. Для решения сформулированной задачи введем в рас-смотрение характеристические функции подмножеств Ω_i, $i=\overline{1,N}$:

$$\lambda_i(x)=\begin{cases}1, \text{если } x\in\Omega_i,\\ 0, \text{если } x\in\Omega\setminus\Omega_i,\end{cases}$$

и перепишем задачу А в следующем виде.

Задача В. Найти вектор-функцию $\lambda(x)=(\lambda_1(x),\lambda_2(x),\ldots,\lambda_N(x))$ доставляющую минимум функционалу:

$$I(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_N)=\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i} c_i(x)\rho(x)\lambda_i(x)dx$$

при ограничениях

$$\int_{\Omega_i}\rho(x)\lambda_i(x)dx\le b_i, \quad i=\overline{1,N},$$

$$\lambda_i(x)=0 \text{ или } 1 \text{ п.в. } x\in\Omega, i=1,2,\ldots N,$$

$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(x)=1 \text{ п.в. } x\in\Omega,$$

Очевидно, что задачи А и В эквивалентны.

Особенностью рассматриваемой задачи является интервальный целевой функционал. В некотором смысле такую задачу можно считать многокритериальной задачей с бесконечным числом критериев. Одним из возможных подходов к ее решению является сведение к многокритериальной задаче с конечным набором критериев. Заметим, что при этом возникает необходимость каким-либо образом оценить качество полученного решения. В случае конечномерных задач нечеткого математического программирования этот подходописан в [1]. Применим его для решения задачи В.

Рассмотрим задачи ОРМ целевые функционалы которых соответствуют нижним и верхним границам функций $c_i(x)=[c_i^1(x); c_i^2(x)]$, $i=\overline{1,N}$. А именно:

Задача В1. Найти вектор-функцию $\lambda(x)=(\lambda_1(x),\lambda_2(x),\ldots,\lambda_N(x))$ доставляющую минимум функционалу:

$$I_1(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_N)=\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i} c_i^1(x)\rho(x)\lambda_i(x)dx$$

при ограничениях

$$\int_{\Omega_i}\rho(x)\lambda_i(x)dx\le b_i, \quad i=\overline{1,N},$$

$$\lambda_i(x)=0 \text{ или } 1 \text{ п.в. } x\in\Omega, i=1,2,\ldots N,$$

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x) = 1 \quad \text{п.в.} \quad x \in \Omega,$$

Задача B2. Найти вектор-функцию $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_N(x))$ доставляющую минимум функционалу:

$$I_2(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c_i^2(x)\rho(x)\lambda_i(x)dx$$

при ограничениях

$$\int_{\Omega_i} \rho(x)\lambda_i(x)dx \le b_i, \quad i = \overline{1, N},$$

$$\lambda_i(x) = 0 \text{ или } 1 \text{ п.в. } x \in \Omega, i = 1, 2, \ldots N,$$

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x) = 1 \quad \text{п.в.} \quad x \in \Omega,$$

При выполнении условия (1) обе эти задачи разрешимы [2]. Пусть $\lambda^1(x) = \left(\lambda_1^1(x), \lambda_2^1(x), \ldots, \lambda_N^1(x)\right)$ и $\lambda^2(x) = \left(\lambda_1^2(x), \lambda_2^2(x), \ldots, \lambda_N^2(x)\right)$ – оптимальные решения задач B1 и B2 соответственно.

Обозначим:

$l_1 = I_2\left(\lambda^1(x)\right) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c_i^2(x)\rho(x)\lambda_i^1(x)dx$, $l_2 = I_1\left(\lambda^2(x)\right) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c_i^1(x)\rho(x)\lambda_i^2(x)dx$, и рассмотрим задачу

Задача B3. Найти вектор-функцию $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_N(x))$, такую что

$$I_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c_i^1(x)\rho(x)\lambda_i(x)dx \to \min$$

$$I_2(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c_i^2(x)\rho(x)\lambda_i(x)dx \to \min$$

при ограничениях

$$\int_{\Omega_i} \rho(x)\lambda_i(x)dx \le b_i, \quad i = \overline{1, N} \tag{6}$$

$$\lambda_i(x) = 0 \text{ или } 1 \text{ п.в. } x \in \Omega, i = 1, 2, \ldots N, \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x) = 1 \quad \text{п.в.} \quad x \in \Omega, \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c_i^1(x)\rho(x)\lambda_i(x)dx \le l_1, \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c_i^2(x)\rho(x)\lambda_i(x)dx \le l_2 \ . \tag{10}$$

Рассмотрим условия разрешимости этой задачи.

Утверждение. Множество допустимых решений задачи B3 не пусто.

Доказательство. Согласно [2] условие (5) обеспечивает существование допустимого решения в задачах B1, B2. Рассмотрим ограничения (9), (10). Вектор-функция $\lambda^1(x) = \left(\lambda_1^1(x), \lambda_2^1(x), \ldots, \lambda_N^1(x)\right)$ является оптимальным решением задачи B1 и допустимым решением задачи B2, а $\lambda^2(x) = \left(\lambda_1^2(x), \lambda_2^2(x), \ldots, \lambda_N^2(x)\right)$ – допустимым решением задачи B1 и оптимальным решением задачи B2, поэтому будут иметь место такие соотношения:

$$\sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c_i^1(x)\rho(x)\lambda_i^1(x)dx \le \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c_i^1(x)\rho(x)\lambda_i^2(x)dx,$$

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i} c_i^2(x)\rho(x)\lambda_i^1(x)dx = \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i} c_i^2(x)\rho(x)\lambda_i^1(x)dx,$$

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i} c_i^1(x)\rho(x)\lambda_i^2(x)dx = \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i} c_i^1(x)\rho(x)\lambda_i^2(x)dx,$$

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i} c_i^2(x)\rho(x)\lambda_i^2(x)dx \le \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i} c_i^2(x)\rho(x)\lambda_i^1(x)dx.$$

Таким образом, область допустимых решений задачи В3 содержит по меньшей мере две точки: $\lambda^1(x) = \left(\lambda_1^1(x), \lambda_2^1(x), \ldots, \lambda_N^1(x)\right)$ и $\lambda^2(x) = \left(\lambda_1^2(x), \lambda_2^2(x), \ldots, \lambda_N^2(x)\right)$. Утверждение доказано.

Решение многокритериальной задачи В3 будет одним из компромис-сных решений исходной задачи. Для того чтобы оценить качество этого решения введем в расмотрение функционалы

$$f_1(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{l_1 - I_1(\lambda)}{l_1 - I_1^*}, \ I_1(\lambda) \le l_1, \\ 0, \quad I_1(\lambda) > l_1, \end{cases} \qquad f_2(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{l_2 - I_2(\lambda)}{l_2 - I_2^*}, I_2(\lambda) \le l_2, \\ 0, \ I_2(\lambda) > l_2. \end{cases}$$

где а $I_1^* = I_1\left(\lambda_1^1, \lambda_2^1, \ldots, \lambda_N^1\right)$, $I_2^* = I_2\left(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_N^2\right)$ – оптимальные значения целевых функционалов задач В1 и В2.

Легко видеть, что функционалы $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ принимают значения в интервале [0; 1], и, очевидно, близки к 1 в случае, когда их значения близки к оптимальным значениям целевых функционалов задач В1, В2. Таким образом, их можно использовать для оценивания качества полученного решения $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \ldots, \lambda_N(x))$. А именно величина $\alpha = \min\{f_1(\lambda), f_2(\lambda)\}$ может служит мерой удовлетворенности лица принимающего решения достигнутыми значениями целевого функционала.

Выводы. Применение метода редукции к задаче ОРМ с интервальным целевым функционалом дает возможность свести исходную интервальную задачу к двукритериальной задаче ОРМ с дополнительными ограничени-ями и оценить качество полученного решения.

Библиографические ссылки

1. **Зайченко Ю.П**. Исследование операций: Нечеткая оптимизация: учеб. пособие / Ю.П. Зайченко – К., 1991. – 191 с.
2. **Киселева Е.М**. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения: монография / Е.М. Киселева, Н.З. Шор – К., 2005. – 564 с.
3. **Кісельова О.М.** Метод розв'язання задачі нечіткого розбиття множин / О.М. Кісельова, О.Ю.Лебідь// Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. праць.– 2010. – С.139 –145.
4. **Кісельова О.М**. Методи розв'язання задач нечіткого розбиття множин із нечіткими параметрами у функціоналі / О.М. Кісельова, О.Ю.Лебідь// Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. праць.– 2007. – С.115 –123.
5. **Ус С.А.** О моделях оптимального разбиения множеств в условиях неопределенности / С.А. Ус // Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. праць. 2010. – С. 320-326.
6. **Ус С.А.** Задача оптимального разбиения множеств с множественнозначным целевым функционалом / С.А. Ус //Питання прикладної математики і математичного моделювання : зб. наук. праць. – 2011, С. 269–279.
7. **Ус С.А.** Задача оптимального розбиття множин із нечітким цільовим функціоналом // Комбінаторна оптимізація та нечіткі множини (КОНеМ-2011) Матеріали Всеукраїнського наукового семінару 26-27 серпня 2011 року. С.107–109.

Надійшла до редколегії 15.05.2012