УДК 539.3:534.222

Ю.В. Турбал
Международный экономико-гуманитарный университет им. С. Демьянчука

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ ТЕЛ В ВИДЕ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН ТИПА δ-СОЛИТОНОВ

Розглядаються необхідні та достатні умови існування розв'язків системи диференціальних рівнянь руху для анізотропного пружного середовища у вигляді відокремлених структурно-стійких хвиль типу δ -солітонів.

Рассматриваются необходимые и достаточные условия существования решений системы дифференциальных уравнений движения для анизотропной упругой среды в виде уединенных структурно-устойчивых волн определенного типа.

In this paper we consider necessary and sufficient conditions for the existence of motion equations solution for the anisotropic elastic bodies in the form of structurally stable solitary waves.

Ключевые слова: солитон, уединенная волна, уравнения движения, упругая среда.

Введение. Уединенные волны, способные сохранять свою форму и характеристики при распространении на значительные расстояния, находять, в последнее время, свое применение во многих областях теоретических и прикладных исследований. Решения в виде уединенных волн, обладающие особыми частицеподобными свойствами, получены для множества моделей, имеющих важное прикладное значение. Например, хорошо известно уравнение КдВ, допускающее солитонные решения . В последнее время найдено ряд новых многосолитонных его решений [6]. Солитоны в твердых телах исследуются в рамках так называемого структурно-феноменологического похода [2]. В рамках его, например, рассматривается поврежденная среда с микроструктурой, континуум Коссера с ограниченным движением, среда с деформациями [1; 2], для которых соответствующие модели допускают солитонные решения.

Заметим, что солитоны часто возникают на границе сред с разными физическими характеристиками. Например, известны солитоны в слоистых жидкостях (возникают на границах слоев), на поверхностях жидкостей (граница жидкость–воздух), солитоны в гравитирующих газовых дисках галактик (граница газ–вакуум [7]), ионозвуковые и магнитозвуковые солитоны в плазме, солитоны, представляющие собой краевые дислокации в кристаллах [4].

В ряде работ рассмотрены в некотором смысле простейшие уединенные волны, названные волнами типа δ-солитонов, представляющие собой некоторые локализированные в пространстве движущиеся возмущения. Такие волны рассматривались как приближенные решения уравнений газовой динамики гравитирующих газових дисков галактик [7; 9], уравнений типа мелкой воды. В [8] найдены точные решения в аналогичной форме для уравнений движения в случае анизотропии упругих свойств твердых тел . При этом показано, что соответствующие решения существуют лишь при определенных типах анизотропии упругих свойств. В [8] получены достаточные условия существования частных решений системы уравнений движения для анизотропной упругой среды в виде δ -солитонов. В данной работе покажем, что эти условия являются и необходимыми.

Необходимые условия существования решений уравнений движения типа δ-солитонов. В [8] рассматривались частные решения системы уравнений движения для анизотропной упругой среды , которая имеет вид:

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\left((c_{11},c_{66},c_{55},2c_{16},2c_{15},2c_{56}),\Theta u\right)+\left((c_{16},c_{26},c_{45},c_{12}+c_{66},c_{14}+\right. \tag{1}$$
$$\left.+c_{56},c_{46}+c_{25}),\Theta v\right)+\left((c_{15},c_{46},c_{35},c_{14}+c_{56},c_{13}+c_{55},c_{36}+c_{45}),\Theta w\right),$$

$$\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\left((c_{16},c_{26},c_{45},c_{66}+c_{12},c_{56}+c_{14},c_{25}+c_{46}),\Theta u\right)+\left((c_{66},c_{22},c_{44},2c_{26},\right. \tag{2}$$
$$\left.2c_{46},2c_{24}),\Theta v\right)+\left((c_{56},c_{24},c_{34},c_{46}+c_{25},c_{36}+c_{45},c_{23}+c_{44}),\Theta w\right),$$

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\left((c_{15},c_{46},c_{35},c_{14}+c_{56},c_{13}+c_{55},c_{45}+c_{36}),\Theta u\right)+\left((c_{56},c_{24},c_{34},c_{46}+c_{25},\right. \tag{3}$$
$$\left.c_{45}+c_{36},c_{23}+c_{44}),\Theta v\right)+\left((c_{55},c_{44},c_{33},2c_{45},2c_{35},2c_{34}),\Theta w\right),$$

где u, v, w – смещения вдоль соответствующих осей в декартовой системе координат;

$\Theta=(\frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2},\frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2},\frac{\partial^2}{\partial x_3{}^2},\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_1},\frac{\partial^2}{\partial x_3\partial x_1},\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3})$; $C=\|c_{ij}\|_{i,j=\overline{1,6}}$ –матрица упругих постоянных; $\rho(x_1,x_2,x_3)$ – плотность.

Решения системы (1)-(3) предложено находить в виде:

$$\begin{pmatrix} u(x_1,x_2,x_3,t)\\ v(x_1,x_2,x_3,t)\\ w(x_1,x_2,x_3,t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\psi_u(t)\\ \psi_v(t)\\ \psi_w(t)\end{pmatrix}W(x_1,x_2,x_3,t), \qquad (4)$$

где $W(x_1,x_2,x_3,t)=e^{-\frac{g(x_1-\tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1}-\frac{g(x_2-\tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2}-\frac{g(x_3-\tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3}}$, $g(.)\in G$, $\psi_u(t)$, $\psi_v(t)$, $\psi_w(t)$ – произвольные, непрерывно-дифференцируемые функции, определяющие амплитуду возмущения; $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ – параметры, определяющие локализацию возмущения; G – класс положительно-определенных, унимодальных, дважды непрерывно-дифференцируемых функций, которые имеют минимум в начале координат равный 0 и для которых вторые про-изводные отличные от констант. Очевидно, что такое возмущение в каждый фиксированный момент времени t имеет единственную точку экстремума – $(\tilde{x}_1(t),\tilde{x}_2(t),\tilde{x}_3(t))$.

Подставляя представление (4) в систему (1)-(3), получаем:

$$\rho\psi_u G^2(x_1,x_2,x_3,t)+\rho\psi_u\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{g'(x_i-\tilde{x}_i(t))}{\varepsilon_i}\tilde{x}_i''(t)-\frac{g''(x_i-\tilde{x}_i(t))}{\varepsilon_i}\tilde{x}_i'^2(t)\right)==\psi_u\left((c_{11},c_{66},c_{55},2c_{16},2c_{15},2c_{56}),\tilde{\Theta}\right)+$$
$$+\psi_v\left((c_{16},c_{26},c_{45},c_{12}+c_{66},c_{14}+c_{56},c_{46}+c_{25}),\tilde{\Theta}\right)+$$
$$+\psi_w\left((c_{15},c_{46},c_{35},c_{14}+c_{56},c_{13}+c_{55},c_{36}+c_{45}),\tilde{\Theta}\right) \qquad (5)$$

$$\rho\psi_v G^2(x_1,x_2,x_3,t)+\rho\psi_v\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{g'(x_i-\tilde{x}_i(t))}{\varepsilon_i}\tilde{x}_i''(t)-\frac{g''(x_i-\tilde{x}_i(t))}{\varepsilon_i}\tilde{x}_i'^2(t)\right)=$$
$$+\psi_v\left((c_{66},c_{22},c_{44},2c_{26},2c_{46},2c_{24}),\tilde{\Theta}\right)+$$
$$+\psi_w\left((c_{56},c_{24},c_{34},c_{46}+c_{25},c_{36}+c_{45},c_{23}+c_{44}),\tilde{\Theta}\right) \qquad (6)$$

$$\rho\psi_w G^2(x_1,x_2,x_3,t)+\rho\psi_w\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{g'(x_i-\tilde{x}_i(t))}{\varepsilon_i}\tilde{x}_i''(t)-\frac{g''(x_i-\tilde{x}_i(t))}{\varepsilon_i}\tilde{x}_i'^2(t)\right)=$$
$$=\psi_u\left((c_{15},c_{46},c_{35},c_{14}+c_{56},c_{13}+c_{55},c_{45}+c_{36}),\tilde{\Theta}\right)+$$
$$+\psi_v\left((c_{56},c_{24},c_{34},c_{46}+c_{25},c_{45}+c_{36},c_{23}+c_{44}),\tilde{\Theta}\right)+$$
$$+\psi_w\left((c_{55},c_{44},c_{33},2c_{45},2c_{35},2c_{34}),\tilde{\Theta}\right), \qquad (7)$$

где

$$\tilde{\Theta}=(\frac{(g'(x_1-\tilde{x}_1(t))^2}{(\varepsilon_1)^2}-\frac{g''(x_1-\tilde{x}_1(t)}{\varepsilon_1},\frac{(g'(x_2-\tilde{x}_2(t))^2}{(\varepsilon_2)^2}-\frac{g''(x_2-\tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2},$$
$$\frac{(g'(x_3-\tilde{x}_3(t))^2}{(\varepsilon_3)^2}-\frac{g''(x_3-\tilde{x}_3(t)}{\varepsilon_3},\frac{g'(x_1-\tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1}\frac{g'(x_2-\tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2},\frac{g'(x_1-\tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1}\frac{g'(x_3-\tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3},\quad\frac{g'(x_2-\tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2}\frac{g'(x_3-\tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3}),$$
$$G(x_1,x_2,x_3,t)=\sum_{i=1}^{3}\frac{g'(x_i-\tilde{x}_i(t))}{\varepsilon_i}\tilde{x}_i'(t).$$

Рассматриваем случай $\psi_u(t)=\psi_u=const$, $\psi_v(t)=\psi_v=const$, $\psi_w(t)=\psi_w=const$, $\rho=const$. Группируя в уравнениях (5)-(7) слагаемые , содержащие соответствующие функции $g(.)$ с их производными и приравнивая к нулю соответствующие коэффициенты, получаем систему уравнений (более детально все выкладки можно найти в [8]):

$$
\begin{cases}
\rho\psi_u \tilde{x}_1'^2(t) = c_{11}\psi_u + c_{16}\psi_v + c_{15}\psi_w, \\
\rho\psi_u \tilde{x}_2'^2(t) = c_{26}\psi_v + c_{66}\psi_u + c_{46}\psi_w, \\
\rho\psi_u \tilde{x}_3'^2(t) = c_{45}\psi_v + c_{55}\psi_u + c_{35}\psi_w, \\
2\rho\psi_u \tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_2'(t) = 2c_{16}\psi_u + (c_{12}+c_{66})\psi_v + (c_{14}+c_{56})\psi_w, \\
2\rho\psi_u \tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_3'(t) = (c_{13}+c_{55})\psi_w + 2c_{15}\psi_u(t) + (c_{14}+c_{56})\psi_v, \\
2\rho\psi_u \tilde{x}_2'(t)\tilde{x}_3'(t) = 2c_{56}\psi_u + (c_{46}+c_{25})\psi_v + (c_{36}+c_{45})\psi_w
\end{cases} \tag{8}
$$

$$
\begin{cases}
\rho\psi_v \tilde{x}_1'^2(t) = c_{16}\psi_u + c_{66}\psi_v + c_{56}\psi_w, \\
\rho\psi_v \tilde{x}_2'^2(t) = c_{26}\psi_u + c_{22}\psi_v + c_{24}\psi_w, \\
\rho\psi_v \tilde{x}_3'^2(t) = c_{45}\psi_u + c_{44}\psi_v + c_{34}\psi_w, \\
2\rho\psi_v \tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_2'(t) = (c_{12}+c_{66})\psi_u + 2c_{26}\psi_v + (c_{46}+c_{25})\psi_w, \\
2\rho\psi_v \tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_3'(t) = (c_{56}+c_{14})\psi_u + 2c_{46}\psi_v + (c_{36}+c_{45})\psi_w. \\
2\rho\psi_v \tilde{x}_2'(t)\tilde{x}_3'(t) = (c_{25}+c_{46})\psi_u + 2c_{24}\psi_v + (c_{23}+c_{44})\psi_w.
\end{cases} \tag{9}
$$

$$
\begin{cases}
\rho\psi_w \tilde{x}_1'^2(t) = c_{15}\psi_u + c_{56}\psi_v + c_{55}\psi_w, \\
\rho\psi_w \tilde{x}_2'^2(t) = c_{46}\psi_u + c_{24}\psi_v + c_{44}\psi_w, \\
\rho\psi_w \tilde{x}_3'^2(t) = c_{35}\psi_u + c_{34}\psi_v + c_{33}\psi_w, \\
2\rho\psi_w \tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_2'(t) = (c_{14}+c_{56})\psi_u + (c_{46}+c_{25})\psi_v + 2c_{45}\psi_w, \\
2\rho\psi_w \tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_3'(t) = (c_{13}+c_{55})\psi_u + (c_{36}+c_{45})\psi_v + 2c_{35}\psi_w, \\
2\rho\psi_w \tilde{x}_2'(t)\tilde{x}_3'(t) = (c_{36}+c_{45})\psi_u + (c_{23}+c_{44})\psi_v + 2c_{34}\psi_w
\end{cases} \tag{10}
$$

Система (8)-(10) определяет условия, которым должны удовлетворять упругие постоянные, амплитуды а также компоненты скорости для существования решений вида (4). Заметим, что эти условия достаточные. Покажем, що система (8)-(10) определяет и необходимые условия существования решений вида (4).

Действительно, пусть система (8)-(10) совместна, $x_1 \in R, x_2 \in R, x_3 \in R, t \in [t_0, T]$. Рассмотрим уравнение (5). Учитывая свойства функций класса G, имеем: $g'(x_1 - \tilde{x}_1(t)) = 0$, $g''(x_1 - \tilde{x}_1(t)) = 0$ при $x_1 = \tilde{x}_1(t)$. Таким образом, рассматривая последовательно случаи $x_2 = \tilde{x}_2(t), x_3 = \tilde{x}_3(t)$; $x_1 = \tilde{x}_1(t), x_3 = \tilde{x}_3(t)$; $x_1 = \tilde{x}_1(t)$, $x_2 = \tilde{x}_2(t)$ с уравнения (5) получаем соотношения:

$$
\rho\psi_u \left(\frac{g'(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1} \tilde{x}_1''(t) \right) = (\psi_u c_{11} + \psi_v c_{16} + \psi_w c_{15} - \rho\psi_u \tilde{x}_1'^2(t))\left(\frac{(g'(x_1 - \tilde{x}_1(t))^2}{(\varepsilon_1)^2} - \frac{g''(x_1 - \tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1}\right), \tag{11}
$$

$$
\rho\psi_u \left(\frac{g'(x_2 - \tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2} \tilde{x}_2''(t) \right) = (\psi_u c_{66} + \psi_v c_{26} + \psi_w c_{46} - \rho\psi_u \tilde{x}_2'^2(t))\left(\frac{(g'(x_2 - \tilde{x}_2(t))^2}{(\varepsilon_2)^2} - \frac{g''(x_2 - \tilde{x}_2(t)}{\varepsilon_2}\right), \tag{12}
$$

$$
\rho\psi_u \left(\frac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} \tilde{x}_3''(t) \right) = (\psi_u c_{55} + \psi_v c_{45} + \psi_w c_{35} - \rho\psi_u \tilde{x}_3'^2(t))\left(\frac{(g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))^2}{(\varepsilon_3)^2} - \frac{g''(x_3 - \tilde{x}_3(t)}{\varepsilon_3}\right). \tag{13}
$$

Рассмотрим уравнение (13). Пусть $\psi_u c_{55} + \psi_v c_{46} + \psi_w c_{35} - \rho\psi_u \tilde{x}_3'^2(t) \neq 0$ для некоторого значения t, причем $\tilde{x}_3''(t) \neq 0$. Зафиксируем такое значение t. Тогда соотношение (13) представляет собой обычное дифференциальное уравнение для функции g относительно переменной x_3. Общее решение такого уравнения легко найти, введя замену: $\dfrac{g'(x_3 - \tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3} = y(x)$. Получаем дифференциальное уравнение вида:

$$
y'(x) = y^2(x) - \rho\psi_u \tilde{x}_3''(t) y(x) / (\psi_u c_{55} + \psi_v c_{46} + \psi_w c_{35} - \rho\psi_u \tilde{x}_3'^2(t)).
$$

Общее решение такого уравнения имеет вид: $y(x)=\dfrac{C}{1-e^{C(x-C_1)}}$, где C, C_1 –произвольные константы. Отсюда $\dfrac{g'(x_3-\tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3}=\dfrac{C}{1-e^{C(x_3-\tilde{x}_3(t)-C_1)}}$. Но в таком случае получим противоречие с условием $g'(0)=0$, которое должны удовлетворять функции класса G. Пусть $\tilde{x}_3''(t)=0$. Тогда после аналогичной замены уравнение (13) запишется в виде $y^2(x)-y'(x)=0$. Его общее решение имеет вид $y(x)=\dfrac{1}{x-C}$, где C – произвольная константа. Отсюда $\dfrac{g'(x_3-\tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3}=\dfrac{1}{x_3-\tilde{x}_3(t)-C}$. Снова получаем противоречие с условием $g'(0)=0$.

Таким образом, выполняется уравнение

$$\psi_u c_{55}+\psi_v c_{45}+\psi_w c_{35}-\rho\psi_u \tilde{x}_3'^2(t)=0. \qquad (14)$$

Аналогично, рассматривая уравнения (11) и (12) получаем соответственно перове и второе уравнеие системы (8). Если выполняется соотношение (14), то с уравнения (13) получаем $\rho\psi_u W\left(\dfrac{g'(x_3-\tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3}\tilde{x}_3''(t)\right)=0$. Отсюда $\tilde{x}_3''(t)=0$ или $g'(x_3-\tilde{x}_3(t))=0$. Если $\tilde{x}_3''(t)\neq 0$, то $g'(x_3-\tilde{x}_3(t))=0$ для любых значений x_3, что невозможно для функций класса G.

Учитывая соотношения (11)-(13), из уравнения (5) получаем:

$$\begin{gathered}\rho\psi_u\Big(\frac{g'(x_1-\tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1}\frac{g'(x_2-\tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2}\tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_2'(t)+\frac{g'(x_1-\tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1}\frac{g'(x_3-\tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3}\tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_3'(t)+\\+\frac{g'(x_2-\tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2}\frac{g'(x_3-\tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3}\tilde{x}_2'(t)\tilde{x}_3'(t)\Big)=\psi_u\left((2c_{16},2c_{15},2c_{56}),\hat{\Theta}\right)+\\+\psi_v((c_{12}+c_{66},c_{14}+c_{56},c_{46}+c_{25}),\hat{\Theta})+\psi_w\left((c_{14}+c_{56},c_{13}+c_{55},c_{36}+c_{45}),\hat{\Theta}\right), \qquad (15)\end{gathered}$$

где $\hat{\Theta}=\left(\frac{g'(x_1-\tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1}\frac{g'(x_2-\tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2},\frac{g'(x_1-\tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1}\frac{g'(x_3-\tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3},\frac{g'(x_2-\tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2}\frac{g'(x_3-\tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3}\right)$.

Пусть $x_1=\tilde{x}_1(t)$. Тогда с (15) получаем уравнение

$$\begin{gathered}\frac{g'(x_2-\tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2}\frac{g'(x_3-\tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3}\tilde{x}_2'(t)\tilde{x}_3'(t)=(\psi_u 2c_{56}+(c_{46}+c_{25})\psi_v+\\+(c_{36}+c_{45})\psi_w)W\frac{g'(x_2-\tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2}\frac{g'(x_3-\tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3}. \qquad (16)\end{gathered}$$

При $x_2=\tilde{x}_2(t)$ и $x_3=\tilde{x}_3(t)$ получаем, соответственно, уравнения:

$$\begin{gathered}\frac{g'(x_1-\tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1}\frac{g'(x_3-\tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3}\tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_3'(t)=((c_{13}+c_{55})\psi_w+2c_{15}\psi_u(t)+\\+(c_{14}+c_{56})\psi_v)W\frac{g'(x_1-\tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1}\frac{g'(x_3-\tilde{x}_3(t))}{\varepsilon_3}, \qquad (17)\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\frac{g'(x_1-\tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1}\frac{g'(x_2-\tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2}\tilde{x}_1'(t)\tilde{x}_2'(t)=(2c_{16}\psi_u+(c_{12}+c_{66})\psi_v+\\+(c_{14}+c_{56})\psi_w)W\frac{g'(x_1-\tilde{x}_1(t))}{\varepsilon_1}\frac{g'(x_2-\tilde{x}_2(t))}{\varepsilon_2}. \qquad (18)\end{gathered}$$

Видим, что уравнения (16), (17) и (18) эквивалентны трем последним урав-нениям системы (8) для функций $g(.)\in G$. Таким образом, получили сис-тему (8). Проведя аналогичные рассуждения, можем получить из уравнений (6) и (7) системы (9) и (10) соответственно.

Следовательно, система (11)-(13) определяет необходимые и достаточные условия существования частных решений уравнений движения (1)-(3) в форме (4). Детальный анализ системы (8)-(10) для разных кристаллографических классов проведен в [8].

Выводы. Таким образом, в работе получена система уравнений, содер-жащая упругие постоянные, компоненты скорости, амплитуды и плотность, представляющая собой необходимые и достаточные условия существования частных решений уравнений движения для анизотропной упругой среды в виде уединенных волн типа δ-солитонов. Важность этой системы для практических приложений состоит в том, что она позволяет определять, какими упругими свойствами должны обладать материалы, для которых уравнения движения имеют частные решения вида (4).

В [8] показано, что система (8)-(10) несовместна для всех типов сингоний выше орторомбической . И лишь при наличии триклинной или моноклинной сингонии система (8)-(10) совместна и имеет решения, для которых положительно определена квадратичная форма, определяющая упругий потенциал. Полученные теоретические результаты интересно сравнить с экспериментальными работами по определению упругих постоянных поликристаллов, например, гранитоидов , в которых показано, что такие материалы имеют высокую анизотропию упругих совойств (исследуемые в [6] гранитоиды имеют анизотропию упругих свойств приближающуюся к аксиальной орторомбической или триклинной сингонии).

Библиографические ссылки

1. **Быков В.Г.** Уединенные сдвиговые волны в зернистой среде / В.Г. Быков // Акустический журн. –1999.– Т.45, № 2.– С. 169-173.
2. **Ерофеев В.И.** Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой /В.И. Ерофеев – М., 1999.
3. **Кольский Г.** Волны напряжения в твердых телах / Г. Кольский – М., 1955.
4. **Порубов А.В.** Генерация уединенных волн деформации в нелинейных твердых телах: дисс. … докт. физ.-мат. наук / А.В. Порубов – СПб, 2006.–313 с.
5. **Продайвода Г.Т.** Исследования упругих постоянных гранитоидов и анизотропии распространения обьемных упругих волн в них / Г.Т. Продайвода, К.С. Александров, С.А. Выжва //Геофизический журнал.–2001.– №2,т.23.–С.31-42
6. **Самойленко В.Г.** Асимптотичні двофазові солітоноподібні розв'язки сингулярно збуреного рівняння Кортевега - де Фріза зі змінними коефіцієнтами / В.Г. Самойленко, Ю.І. Самойленко // Укр. мат. журнал .-2008.-80, №1.-С. 388-397.
7. **Турбал Ю.В.** Часткові розвязки рівнянь газової динаміки галактик із збуреннями типу δ -солитонів / Ю.В. Турбал // Вісник Київського університету. Серія «Фізико-математичні науки».– 2009.– № 1.– С. 67-75.
8. **Турбал Ю.В.** Дослідження анізотропії пружних властивостей матері-алів з точки зору існування відокремлених хвиль типу δ -солітонів / Ю.В. Турбал // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. Вип.18, – С.76-90.
9. **Turbal Y.** The trajectories of self-reinforsing solitary wave in the gas disc of galaxies//Proceedings of the 3-rd International Conference on Nonlinear Dynamic.– Kharkov.– 2010.– P.112-118

Надійшла до редколегії 5.06.2012