УДК 519.8 doi: 10.15421/322217

В.А. Турчина, Є.О. Коваленко
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

ВПЛИВ ПОЧАТКОВИХ ДАНИХ ЗАДАЧІ ПАРАЛЕЛЬНОГО УПОРЯДКУВАННЯ З ПЕРЕРИВАННЯМИ НА ОПТИМАЛЬНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ

Розглядаються задачі паралельного упорядкування вершин повного дводольного орграфа з перериваннями та без них. Проведено аналіз залежності значень цільової функції при певних співвідношеннях між початковими даними. Отримано аналітичний вигляд оцінки виграшу за умови переривань для довільних значень параметрів.

Ключові слова: повні дводольні графи, паралельне упорядкування вершин, переривання.

V.A. Turchyna, Y.O. Kovalenko
Oles Honchar Dnipro National University

THE INFLUENCE OF THE PARALLEL SEQUENCING PROBLEM WITH INTERRUPTIONS INITIAL DATA ON THE SOLUTION OPTIMALITY

In a generalized form, the technological process in production involves the undertaking of a specific amount of jobs with the help of available devices and workers within the set time limits. In addition, certain conditions and restrictions for the jobs usually exist. The parallel sequencing problems are formulated on the basis of finite sets of jobs and performers, a given criterion of optimality, and restrictions on the work execution order. It is convenient to consider them in the form of optimization problems on digraphs, where vertices correspond to jobs, and restrictions are set by arcs.

To formulate the parallel sequencing problem, we presume that there are a finite set of performers and a finite set of jobs, the execution order of which is subject to certain technological restrictions. It is necessary to find such a work distribution between performers, in which, without technological restrictions violation, the execution of all jobs is completed in the minimum time. At the same time, a specific performer cannot perform more than one job at any given time.

Among the issues of these problems solution optimization, the expediency of allowed interruptions in the jobs' execution is considered. In classical formulation, interruptions are not allowed, the jobs' duration is implied as equal and as follows the digraph is unweighted. At the same time in parallel sequencing problems with interruptions jobs' execution times may not be equal. It may contain only equal weight vertices. However, in any case, the digraph in this problem subclass is weighted. It was shown that interruptions can really affect the optimality of the solutions for some graphs classes.

The parallel sequencing problems of the complete bipartite digraph vertices are considered for cases where interruptions are allowed and cases where they are forbidden. The dependence analysis between the objective function values at certain ratios and the initial

---

data was carried out. An analytical view of the profit estimate with allowed interruptions was obtained for parameters arbitrary values.

Keywords: complete bipartite graphs, parallel sequencing of vertices, interruptions.

В.А. Турчина, Е.А. Коваленко

Днипровский национальный университет имени Олеся Гончара

ВЛИЯНИЕ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ ЗАДАЧИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО УПОРЯДОЧЕНИЯ С ПРЕРЫВАНИЯМИ НА ОПТИМАЛЬНОСТЬ РЕШЕНИЯ

Рассматриваются задачи параллельного упорядочения вершин полного двудольного орграфа с прерываниями и без них. Проведен анализ зависимости значений целевой функции при определенных соотношениях между исходными данными. Получен аналитический вид оценки выигрыша при условии прерываний для произвольных значений параметров.

Ключевые слова: полные двудольные графы, параллельное упорядочение вершин, прерывания.

Вступ. В узагальненому вигляді на виробництві технологічний процес передбачає виконання деякої встановленої кількості робіт за допомогою наявних приладів та робітників у встановлених часових термінах. Окрім цього, зазвичай наявні певні умови та особливості виконання робіт. Задачі паралельного упорядкування формулюються на основі скінченних множин робіт та виконавців, заданого критерію оптимальності та обмежень на порядок виконання робіт. Їх зручно розглядати у вигляді оптимізаційних задач на орграфах, де роботам ставляться у відповідність вершини, а обмеження задаються дугами.

Серед питань оптимізації розв’язку виділяють доцільність дозволу переривань при виконанні робіт. Було показано, що переривання дійсно можуть впливати на оптимальність розв'язків для деяких класів графів. Результати дослідження у випадках, коли орграф містить лише ізольовані вершини, наведено в [1]. Результати для паралельно-послідовних графів було наведено в [2]. Для повних дводольних графів було отримано результати при рівній кількості вершин в долях [3].

В даній статті розглядаються задачі для повних дводольних графів $K_{m,r}$, $m,r \in N$, де m та r — відповідно кількість вершин у першій та другій долях. Тривалість виконання кожної роботи будь-яким із виконавців є однаковою, тому приймається за 1.

Постановка задачі. Нехай задано скінченну множину виконавців B і скінченну множину робіт A, на порядок виконання яких накладаються певні технологічні обмеження. Необхідно знайти такий розподіл робіт між виконавцями, при якому без порушення технологічних обмежень виконання усіх робіт завершується за мінімальний час. При цьому в будь-який момент часу конкретний виконавець не може виконувати більше однієї роботи. Для таких прикладних задач зручно подавати множину робіт як множину вершин V орграфа $G=(V,U)$, а технологічні обмеження — відповідно як множину дуг U. Тоді задачу можна сформулювати як задачу побудови паралельного упорядкування вершин орграфа мінімальної довжини при заданій ширині [4].

В класичній постановці цієї задачі переривання при виконанні робіт не передбачаються. В даній роботі досліджується питання впливу переривань на оптимальність розв'язку.

Аналіз переривань для часткових випадків.

Означення 1. Перериваннями називатимемо випадки, коли виконання роботи призупиняється в певний момент часу, коли робота ще не виконана в повному обсязі, а пізніше продовжується або до наступного переривання, або до повного завершення.

Для порівняння довжини упорядкувань із перериваннями та без них скористаємося оцінкою виграшу W, введеною в [стаття 2021]:

$$W=\left(1-\frac{l_{П}^{*}}{l^{*}}\right)\cdot 100\%\,, \tag{1}$$

де l^{*} — довжина оптимального упорядкування без переривань, $l_{П}^{*}$ — довжина оптимального упорядкування з перериваннями.

Задано граф $K_{m,r}$ та ширина упорядкування h. Розглянемо спочатку випадки, де $m < r$. Очевидно, що якщо $m = qh$, $q \in N$ то розв'язок тривіальний і довжина оптимального упорядкування $l=q+\left\lceil \frac{r}{h}\right\rceil$. Розглянемо який вплив можуть мати переривання на наступних прикладах.

Приклад 1. Задано граф $K_{4,5}$ та ширина упорядкування $h = 3$. Знайти упорядкування мінімальної довжини для випадків дозволених та заборонених переривань.

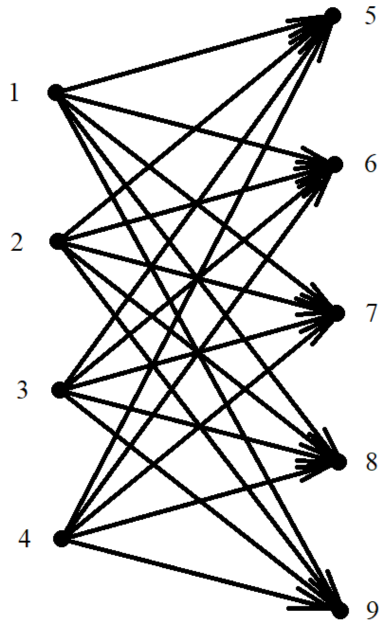

Рис. 1. Граф $K_{4,5}$

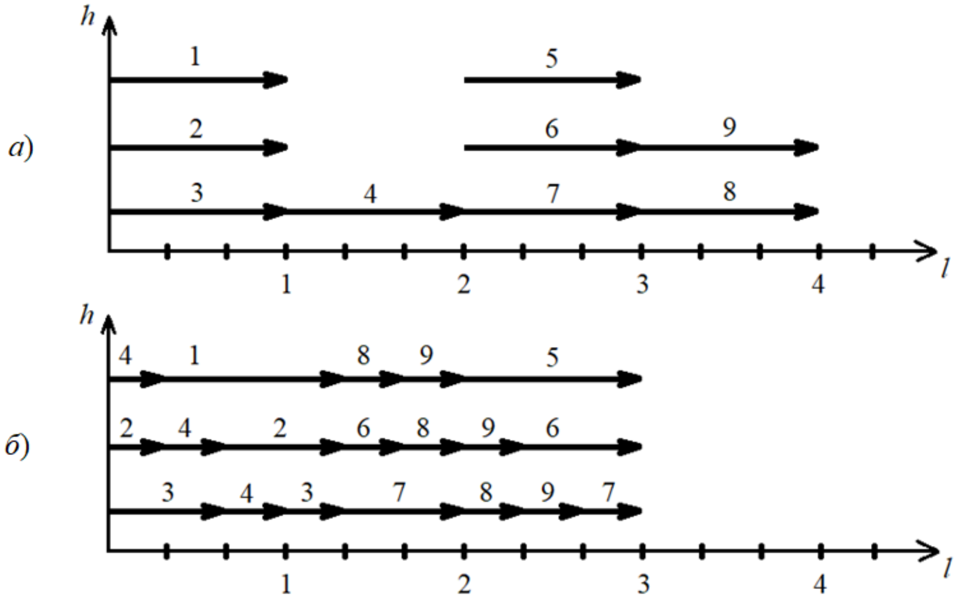

Рис. 2. Схема розподілу вершин графа $K_{4,5}$ без перериваньа) та з периваннями б) при h = 3

Виграш від використання переривань становить $W = \left(1 - \frac{9}{12}\right) \cdot 100\% = 25\%$. Так само, як і в випадках $m = r$, довжина оптимального упорядкування з перериваннями є меншою за довжину без переривань за рахунок того, що вершини під номерами 4, 8 та 9 розподіляються між місцями упорядкування.

Тепер при $h = 3$, як і в прикладі 1, розглянемо граф із більшою кількістю вершин у долях —та побудуємо його упорядкування.

Приклад 2. Задано граф $K_{7,8}$ та ширина упорядкування h = 3. Знайти упорядкування мінімальної довжини для випадків, коли переривання заборонені та дозволені.

Для спрощення рисунку відмітимо, що із кожної вершини 2 – 7 першої долі йдуть дуги в кожну вершину 8 – 15 другої долі.

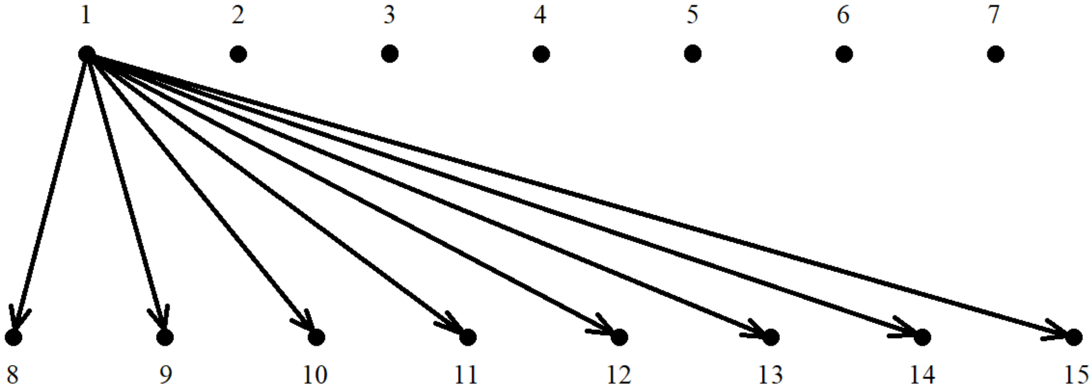

Рис. 3. — Граф $K_{7,8}$

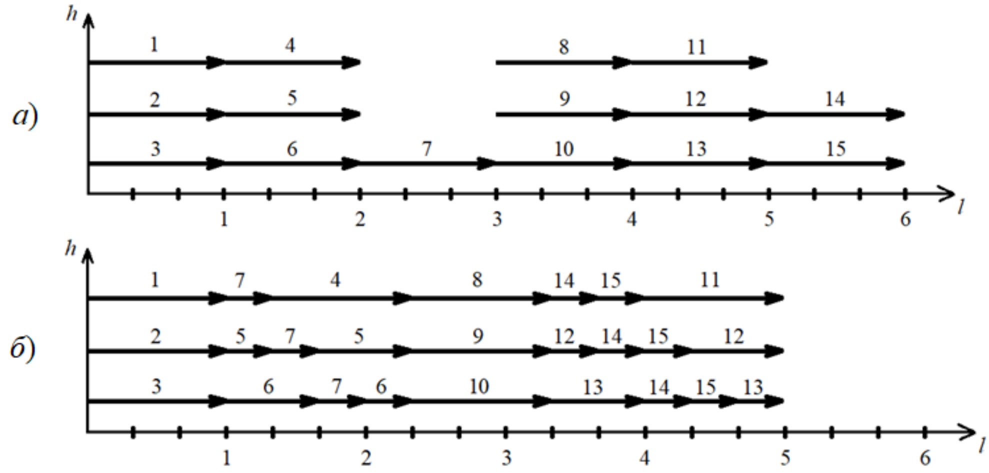

Рис. 4. Схема розподілу вершин графа $K_{7,8}$ без переривань *а*) та з перериваннями *б*) при *h* = 3

Виграш від використання переривань становить $W = \left(1-\frac{15}{18}\right)\cdot 100\% \approx 17\%$. В оптимальному упорядкуванні вершин графа $K_{7,8}$ з перериваннями вершини під номерами 7, 14 та 15 розподіляються між місцями в упорядкуванні, через що довжина є меншою за довжину оптимального упорядкування без переривань. Далі розглянемо упорядкування вершин цього ж графа $K_{7,8}$ при $h = 4$.

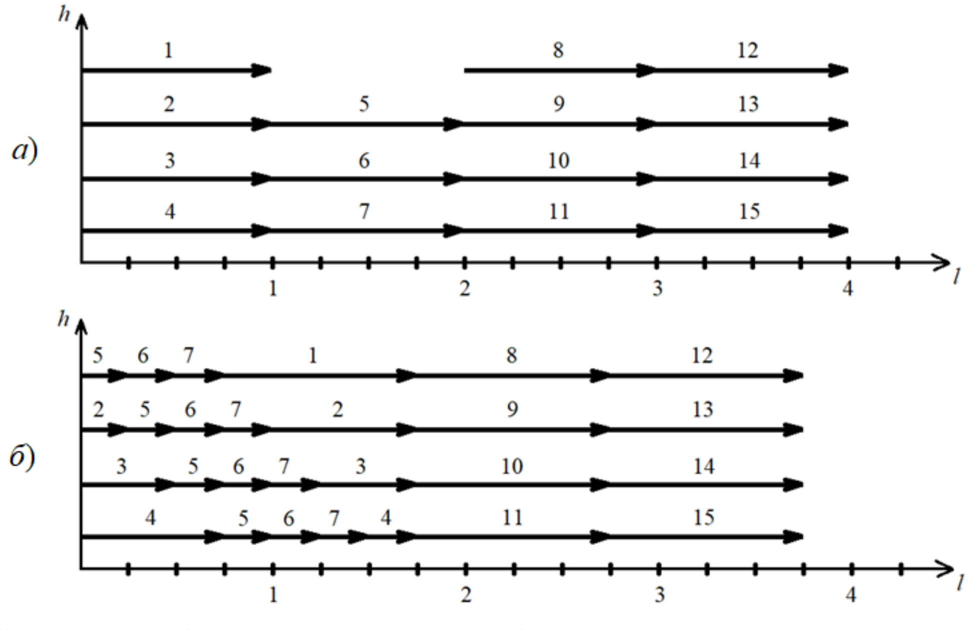

Рис. 5. Схема розподілу вершин графа $K_{7,8}$ без переривань *а*) та з перериваннями *б*) при *h* = 4

Тут виграш від використання переривань становить $W = \left(1-\frac{17}{18}\right)\cdot 100\% \approx 6\%$, тобто він зменшився порівняно з випадком коли $h = 3$. В цьому прикладі так само перериваються і розподіляються між місцями упорядкування робіт, що відповідають трьом вершинам графа, але всі вони тепер належать першій долі. Переривати роботи, що відносяться до другої долі графа, тут виявилося недоцільним.

Щоб перевірити, чи завжди при збільшенні ширини упорядкування виграш від переривань зменшується, розглянемо ще випадок $h = 5$ для того ж орієнтованого графа $K_{7,8}$.

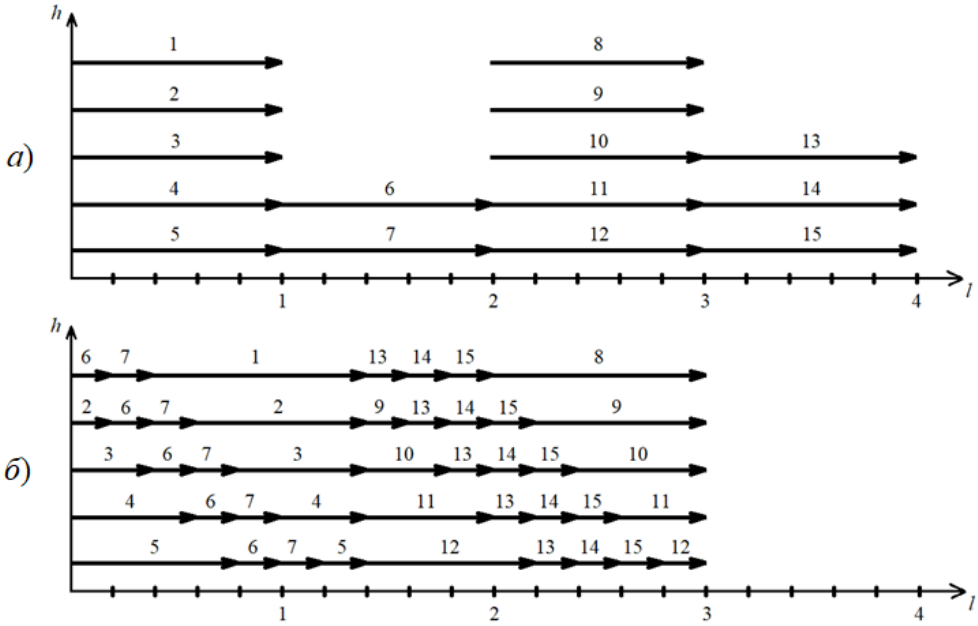

Рис. 6. Схема розподілу вершин графа $K_{7,8}$ без переривань *а*) та з перериваннями *б*) при $h = 5$

Як видно з упорядкувань при $h = 5$ виграш становить $W = \left(1-\frac{15}{20}\right)\cdot 100\% = 25\%$, тобто він значно зріс порівняно з випадком $h = 4$. Із наведеного вище випливає, що при збільшенні ширини h виграш від переривань може як збільшуватися, так і зменшуватися.

Тепер розберемо випадки, коли $m > r$. Почнемо з розгляду графа $K_{5,4}$.

Приклад 3. Задано граф $K_{5,4}$ та ширина упорядкування $h = 3$. Знайти упорядкування з перериваннями та без них мінімальної довжини.

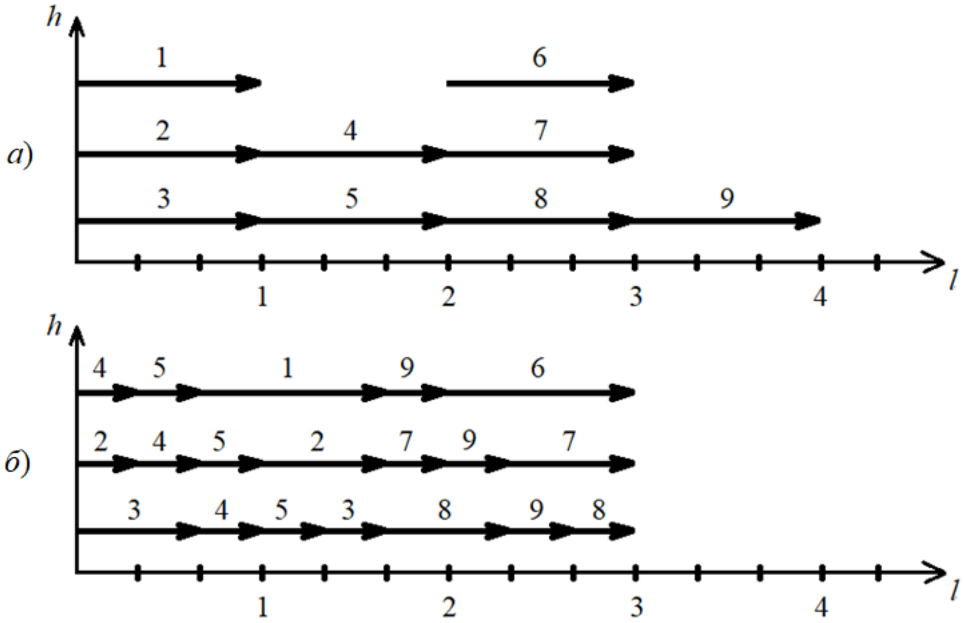

Рис. 7. Схема розподілу вершин графа $K_{5,4}$ без переривань *а*) та з перериваннями *б*) при $h = 3$

Якщо порівняти упорядкування графів $K_{4,5}$ та $K_{5,4}$, то стає видно, що довжина оптимальних упорядкувань як з перериваннями, так і без переривань є однаковими. Внаслідок чого і виграш від використання переривань так само дорівнює $W=\left(1-\frac{9}{12}\right)\cdot 100\%=25\%$.

Далі розглянемо граф $K_{8,7}$ і порівняємо довжини його оптимального упорядкування та графа $K_{7,8}$.

Приклад 4. Задано граф $K_{8,7}$ та ширина упорядкування h = 3. Знайти упорядкування для випадків дозволених та заборонених переривань мінімальної довжини.

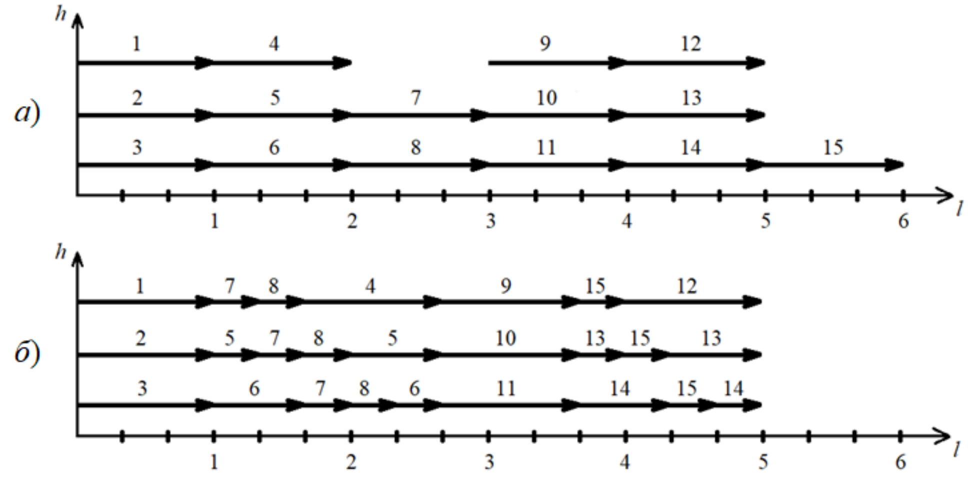

Рис. 8. Схема розподілу вершин графа $K_{8,7}$ без переривань *а*) та з перериваннями *б*) при h = 3

Так само, як і для графів $K_{4,5}$ і $K_{5,4}$, для графів $K_{7,8}$ та $K_{8,7}$ довжини оптимального упорядкування без переривань та з перериваннями є рівними. Виграш від використання переривань становить $W=\left(1-\frac{15}{18}\right)\cdot 100\%\approx 17\%$.

Легко бачити, що в усіх наведених прикладах зменшення довжини упорядкування відбувається за рахунок переривання при розподілі вершин саме цієї долі. Враховуючи, що розглядаються повні дводольні графи, упорядкування вершин кожної долі можна розглядати окремо.

Умова впливу переривань для загального випадку. На основі наведених міркувань сформулюємо наступне твердження.

Твердження 1. Для довільних m,r: $m>1$, $r>1$, $m,r\in N$ довжини оптимального упорядкування без переривань та з перериваннями орграфів $K_{m,r}$ та $K_{r,m}$ є однаковими $\forall\, h>1,\ h\in N$.

Доведення.

Очевидно, що твердження є вірним для випадку, коли $m=r$ оскільки ми маємо граф $K_{m,m}$.

Тепер доведемо справедливість твердження при $m\neq r$. Як було зазначено, упорядкування вершин кожної долі графа можна розглядати окремо. Тоді позначимо довжину оптимального упорядкування без переривань та з перериваннями вершин першої долі відповідно l_m^* та $l_{Пm}^*$, а другої — відповідно l_r^*

та $l^*_{\textit{П}r}$. Також уведемо позначення довжини оптимального упорядкування всіх вершин графа $K_{m,r}$ без переривань:

$$l^*_{m,r} = l^*_m + l^*_r \tag{2}$$

та з перериваннями:

$$l^*_{\textit{П}m,r} = l^*_{\textit{П}m} + l^*_{\textit{П}r}\,. \tag{3}$$

Аналогічно для графа $K_{r,m}$:

$$l^*_{r,m} = l^*_r + l^*_m\,; \tag{4}$$

$$l^*_{\textit{П}r,m} = l^*_{\textit{П}r} + l^*_{\textit{П}m}\,. \tag{5}$$

Оскільки у загальному випадку $l^*_{m,r}, l^*_{r,m} \in N$, $l^*_{\textit{П}m,r}, l^*_{\textit{П}m,r} \in Q$ то операція додавання є комутативною, тобто:

$$l^*_m + l^*_r = l^*_r + l^*_m\,; \tag{6}$$

$$l^*_m + l^*_r = l^*_r + l^*_m\,. \tag{7}$$

Підставивши (2)-(5) у (6) та (7), отримуємо, що $l^*_{m,r} = l^*_{r,m}$ та $l^*_{\textit{П}m,r} = l^*_{\textit{П}r,m}$. Твердження доведено.

У виразі (1) бачимо, що виграш від використання переривань передусім залежить від відношення довжин оптимальних упорядкувань заданого графа, тобто від значення дробу

$$\frac{l^*_{\textit{П}}}{l^*}\,. \tag{8}$$

Розглянемо розподіл m вершин при ширині h. Проаналізуємо можливі випадки.

I. При значеннях m кратних h очевидно виграш буде нульовим, адже в такому випадку всі $m = kh$ вершин ($k \in N$) розміщуються на k позиціях і переривання є недоцільними.

II. Якщо $m < h$, то в упорядкуванні без переривань вершини будуть займати першу позицію, тобто $l^*_m = 1$.

III. Розглянемо випадки, коли $h < m < 2h$. Нехай c — остача від ділення m на h, $0 < c < h, c \in N$. Тоді, враховуючи відсутність зв'язків між вершинами однієї долі, $l^*_m = \left\lceil \frac{m}{h} \right\rceil$, або

$$l^*_m = \left\lceil \frac{h+c}{h} \right\rceil. \tag{9}$$

Тут округлення вгору необхідне через те, що $l^*_m \in N$. Враховуючи величину константи c, чисельник дробу (9) завжди буде меншим за $2h$, тобто незалежно від значень h та c за рахунок округлення будемо мати $l^*_m = 2$.

На відміну від l^*_m, у загальному випадку $l^*_{\textit{П}m} \in Q$. Це означає, що вираз для розрахунку довжини упорядкування з перериваннями є аналогічним до (9) за винятком округлення, тобто

$$l_{П}^{*} = \frac{h+c}{h} = 1 + \frac{c}{h}. \qquad (10)$$

Підставивши (9) та (10) у (8), маємо

$$\frac{\left(1+\frac{c}{h}\right)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{c}{2h}. \qquad (11)$$

Нарешті, підставивши (11) у (1) одержуємо

$$W = \left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{c}{2h}\right)\right) \cdot 100\%,$$

а спростивши цей вираз, отримуємо

$$W = \left(\frac{1}{2} - \frac{c}{2h}\right) \cdot 100\%. \qquad (12)$$

IV. У випадку $(k\text{-}1)h < m < kh$ маємо

$$l_{m}^{*} = \left\lceil \frac{(k-1)h+c}{h} \right\rceil = k, \qquad (13)$$

і відповідно

$$l_{Пm}^{*} = \frac{(k-1)h+c}{h} = k - 1 + \frac{c}{h}. \qquad (14)$$

Тоді відношення матиме вигляд

$$\frac{\left(k-1+\frac{c}{h}\right)}{k} = 1 - \frac{1}{k} + \frac{c}{kh}, \qquad (15)$$

що при підставленні в (1) дає

$$W = \left(1 - \left(1 - \frac{1}{k} + \frac{c}{kh}\right)\right) \cdot 100\%,$$

або при спрощенні

$$W = \left(\frac{1}{k} - \frac{c}{kh}\right) \cdot 100\%. \qquad (16)$$

Із (16) легко бачити, що виграш дійсно не залежить безпосередньо від кількості вершин m, натомість залежить від частки k при діленні $\frac{m}{h}$ націло та числа c, яке є остачею від цього ділення. У тому, що (16) є узагальненням легко переконатися, адже при підставленні $k = 2$ одержимо випадок ІІІ.

Висновки. В результаті проведеного дослідження для повних дводольних орграфів було визначено, від яких вхідних даних задачі паралельного упорядкування залежить величина виграшу за умови дозволу переривань. Для довільних значень кількості вершин графа та ширини упорядкування також було виведено формулу оцінки цього виграшу в аналітичному вигляді.

Бібліографічні посилання

1. Коваленко Є.О., Турчина В.А. Аналіз структури графів в задачах паралельного упорядкування з перериваннями. Кропивницький: ПП «Ексклюзив-Систем». 2021. С.86-90.
2. Коваленко Є.О., Турчина В.А. Аналіз впливу структури графів на оптимальність розв'язку задач паралельного упорядкування з перериваннями. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. Дніпро, 2021. С. 94-104.
3. Турчина В.А., Коваленко Є.О. Паралельні упорядкування для повних дводольних графів. Кропивницький: ПП «Ексклюзив-Систем», 2022. С.82-86.
4. Бурдюк В.Я., Турчина В.А. Алгоритмы параллельного упорядочения: учебное пособие. Д.: ДГУ, 1985. 84 с.

Надійшла до редколегії 03.10.2022.