УДК 519.8

И.В. Козин, С.И. Полюга
Запорожский национальный університет

НАСЛЕДСТВЕННЫЕ СТРУКТУРЫ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Розглянуто задачу опису бінарних операцій, що зберігають певні властивості елементів множини. Доведено зв'язок цієї задачі з властивостями метрики і метричною опуклістю, введено поняття геометричної операції. Досліджено спадкові властивості геометричних операцій для різних метричних просторів. Показано зв'язок спадкових операцій з еволюційними моделями.

Рассмотрена задача описания бинарных операций, сохраняющих определенные свойства элементов множеств. Доказана связь этой задачи со свойствами метрики и метрической выпуклостью, введено понятие геометрической операции. Исследованы наследственные свойства геометрических операций для разных метрических пространств. Показана связь наследственных операций с эволюционными моделями.

The problem of describing of binary operations which save certain properties of sets' elements is considered. The relationship between this problem and metric's properties and metric convexity was proven; the notion of geometric operation was introduced. Inharitance properties of geometric operations were investigated for the various metric spaces. The relationship between inharitance operations and evolutionary models was shown.

Ключевые слова: наследственное свойство, геометрическая операция, метрический отрезок, метрическая выпуклость, эволюционная модель, кроссовер.

Введение. Постановка проблемы. Пусть задано произвольное непустое множество X и бинарная операция $Kr : X \times X \to X$ на этом множестве. Свойством ε на множестве X будем называть произвольное отображение $\varepsilon : X \to \{0,1\}$. Будем говорить, что элемент $x \in X$ обладает свойством ε в том и только в том случае, когда $\varepsilon(x) = 1$. Свойство ε называется невырожденным, если $\{x \in X : \varepsilon(x) = 1\} \neq \varnothing$ и $\{x \in X : \varepsilon(x) = 0\} \neq \varnothing$. В дальнейшем будем рассматривать лишь невырожденные свойства.

Определение 1. Свойство ε будем называть наследственным относительно бинарной операции *Kr*, если

1) из условий $\varepsilon(x) = \varepsilon(y) = 1$ следует, что $\varepsilon(Kr(x, y)) = 1$;
2) из условий $\varepsilon(x) = \varepsilon(y) = 0$ следует, что $\varepsilon(Kr(x, y)) = 0$.

Другими словами, свойство является наследственным для операции *Kr*, если из того что оба аргумента *x,y* бинарной операции *Kr* обладают свойством ε вытекает, что результат $Kr(x, y)$ также обладает этим свойством. Наоборот, если оба аргумента отображения *Kr* не обладают свойством ε, то и результат применения бинарной операции не обладает этим свойством.

Интересен следующий вопрос: при каких условиях на бинарную операцию *Kr* заданное свойство (или система свойств) является наследственным. Наоборот, можно ли для заданного отображения *Kr* указать систему наследственных свойств. В частности, этот вопрос возникает при постро-ении эволюционных моделей и тесно связан с проблемой накопления свойств [1].

Наследственные структуры

Определение 2. Наследственной структурой будем называть пару (X, Θ), где X – множество, а Θ – функция, которая каждой паре точек $x, y \in X$, ставит в соответствие подмножество $\Theta_{xy} \subseteq X$, причем:

$$
\begin{aligned}
&1)\ \forall x, y \in X,\ x \in \Theta_{xy}, y \in \Theta_{xy};\\
&2)\ \forall x, y \in X,\ \ \Theta_{xy} = \Theta_{yx};\\
&3)\ \forall x, y \in X,\ \ \forall z \in \Theta_{xy},\ \ \Theta_{xy} \supseteq \Theta_{xz} \cup \Theta_{zy}.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Множество Θ_{xy} называется множеством потомков точек $x, y \in X$. Таким образом, наследственная структура определяется совокупностью множеств потомков $\{\Theta_{xy}\}_{x,y \in X}$ со свойствами (1).

Приведем теперь некоторые свойства наследственных структур.

Теорема 1. *Пусть задана наследственная структура* (X, Θ). *Тогда для любого точки* $x \in X$ *и любой точки* $y \in \Theta_{xx}$ *справедливо равенство* $\Theta_{xx} = \Theta_{xy}$.

Доказательство. Пусть $y \in \Theta_{xx}$. Тогда, в соответствии с определением (1), получаем, что и $\Theta_{xy} \cup \Theta_{yx} \subseteq \Theta_{xx}$ и, соответственно, $\Theta_{xy} \subseteq \Theta_{xx}$. С другой стороны, в соответствии с тем же определением, $\Theta_{xx} \cup \Theta_{xy} \subseteq \Theta_{xy}$. Следовательно, $\Theta_{xx} = \Theta_{xy}$.

В частности, $\forall y \in \Theta_{xx}$ выполняется равенство $\Theta_{yy} = \Theta_{xx}$.

Теорема 2. *Пусть задана наследственная структура* (X, Θ). *Тогда для любого множества потомков* Θ_{xy} *и для любой точки* $z \in \Theta_{xy}$ *из условия* $y \in \Theta_{xz}$ *следует, что* $\Theta_{xz} = \Theta_{xy}$.

Доказательство. Пусть $z \in \Theta_{xy}$. Тогда, в соответствии с (1), получаем, что и $\Theta_{xz} \subseteq \Theta_{xy}$. Если точка $y \in \Theta_{xz}$, то $\Theta_{xy} \subseteq \Theta_{xz}$. Следовательно, $\Theta_{xz} = \Theta_{xy}$.

Заметим, что наличие наследственной структуры на множестве *X* позволяет определить на этом множестве структуры выпуклости [2].

Выпуклым подмножеством называется подмножество в *X*, которое вместе с любыми двумя своими точками содержит множество потомков этих точек. Пустое множество, по определению, считается выпуклым. Очевидно следующее утверждение: пересечение любого числа выпуклых подмножеств выпукло.

Определение 3. Пусть задана наследственная структура (X, Θ). Выпуклой оболочкой подмножества $Y \subseteq X$ называется пересечение всех выпуклых подмножеств множества *X*, содержащих подмножество *Y*.

Другими словами – выпуклая оболочка подмножества $Y \subseteq X$ это наименьшее по включению выпуклое подмножество в *X*, содержащее *Y*.

Один из тривиальных примеров наследственной структуры – это разбиение множества. Пусть множество *X* разбито на *k* подмножеств $X_1, X_2, ..., X_k$, причем:

$$1) \bigcup_{i=1}^{k} X_k = X;$$
$$2) \forall i, j, \ \ i \neq j \ \ X_i \cap X_j = \varnothing;$$
$$3) \forall i \quad X_i \neq \varnothing.$$

Каждый элемент $x \in X$ принадлежит ровно одному элементу разби-ения, который будем обозначать X_x. Множество всевозможных объединений элементов разбиения является наследственной структурой. Причем $\forall x, y \in X \quad [x, y] = X_x \cup X_y$.

Наследственные структуры и метрика

В метрическом пространстве $R^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n)\}$ с канонической эвклидовой метрикой естественным образом определяется наследственная структура. А именно: множествами потомков являются обычные (геометрические) отрезки в этом пространстве. Оказывается, наследственную структуру можно определить на любом метрическом пространстве.

Напомним, что метрическим пространством называется пара (X, ρ), где *X* – множество, $\rho : X \times X \to R^1$ – функция, со следующими свойствами:

$$\begin{aligned} &1) \quad \forall x, y \in X, \ \ \rho(x, y) \geq 0; \ \ \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y; \\ &2) \quad \forall x, y \in X, \ \ \rho(x, y) = \rho(y, x); \\ &3) \quad \forall x, y, z \in X, \ \ \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y). \end{aligned} \tag{2}$$

Метрическим отрезком (в дальнейшем – отрезком), соединяющим две точки *x* и *y* метрического пространства *X*, будем называть множество $[x, y] = \{z \in X \mid \rho(x, y) = \rho(x, z) + \rho(z, y)\}$.

Теорема 3. *Множество отрезков метрического пространства* (X, ρ) *образуют наследственную структуру.*

Доказательство. Свойства 1) и 2) определения 2 для метрических отрезков с очевидностью вытекают из определения метрики. Докажем теперь свойство 3) наследственных структур. Пусть *x*,*y* – две произвольные точки пространства *X*. Возьмем произвольную точку $z \in [x, y]$. Покажем, что $[x, y] \supseteq [x, z] \cup [z, y]$. Пусть $u \in [x, z]$. В соответствии с определением отрезка $\rho(x, z) = \rho(x, u) + \rho(u, z)$. По определению расстояния $\rho(x, y) \leq \rho(x, u) + \rho(u, y)$. С другой стороны имеем

$\rho(x,y)=\rho(x,z)+\rho(z,y)=\rho(x,u)+\rho(u,z)+\rho(z,y)\geq\rho(x,u)+\rho(u,y)$. Таким образом $\rho(x,y)=\rho(x,u)+\rho(u,y)$ и, следовательно, $[x,z]\subseteq[x,y]$. Аналогично можно показать, что $[z,y]\subseteq[x,y]$ и потому $[x,z]\cup[z,y]\subseteq[x,y]$.

Свойства 1) и 2) определения 2 для метрических отрезков с очевидностью вытекают из определения метрики. Докажем теперь свойство 3) наследственных структур. Пусть *x,y* – две произвольные точки пространства *X*. Возьмем произвольную точку $z\in[x,u]$. Покажем, что $[x,y]\supseteq[x,z]\cup[z,y]$. Пусть $u\in[x,z]$. В соответствии с определением трезка $\rho(x,u)=\rho(x,z)+\rho(z,u)$. По определению расстояния $\rho(x,y)\leq\rho(x,u)+\rho(u,y)$ С другой стороны, имеем соотношения $\rho(x,y)=\rho(x,z)+\rho(z,y)=\rho(x,u)+\rho(u,z)+\rho(z,y)\geq\rho(x,u)+\rho(u,y)$. Таким образом $\rho(x,y)=\rho(x,u)+\rho(u,y)$ и, следовательно, $[x,z]\subseteq[x,y]$. Аналогично можно показать, что $[z,y]\subseteq[x,y]$ и потому $[x,z]\cup[z,y]\subseteq[x,y]$.

Таким образом, на метрическом пространстве всегда определена наследственная структура, состоящая из всего множества отрезков.

Многочисленные примеры метрических пространств и их свойства подробно исследованы в [3]. Рассмотрим лишь некоторые из этих примеров и опишем отрезки в соответствующих метрических пространствах.

Эвклидово пространство с канонической метрикой

В векторном пространстве $R^n=\{(x_1,x_2,...,x_n)\}$ стандартная (эвклидова) метрика задается следующим равенством:

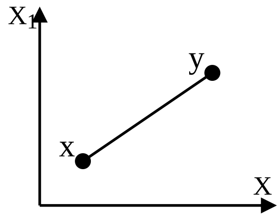

Рис.1 Отрезок между двумя точками в

Рис.1. Отрезок между двумя точками в R^n

$$\forall x=(x_1,x_2,...,x_n),\;\; y=(y_1,y_2,...,y_n)\in R^n$$

эвкл

$$\rho_{эвкл}(x,y)=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+...+(y_n-x_n)^n}$$

В этой метрике отрезок между точками выглядит как обычный отрезок прямой (рис.1). Выпуклые множества определяются обычным образом – это множества, которые вместе с каждыми своими двумя точками содержат отрезок, соединяющий эти точки.

Пространство с манхеттенской метрикой

Приведем другой пример метрики в векторном пространстве R^n. Манхеттенская метрика (метрика городских кварталов) определяет расстояние между точками $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ и $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ формулой

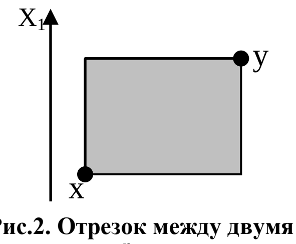

Рис.2. Отрезок между двумя точками в R^n в манхеттенской

$$\rho_{manh}(x,y)=|y_1-x_1|+|y_2-x_2|+...+|y_n-x_n|.$$

Пример отрезка [*x*,*y*] в этой метрике изображен на рис.2. Интересно, что выпуклыми множествами в такой метрике являются прямоугольные параллелепипеды различных размерностей и только они.

Бинарное n-мерное пространство и метрика Хэмминга

Рассмотрим теперь бинарное *n*-мерное пространство $B^n=\{(x_1,x_2,...,x_n)\}$, где $x_i\in\{0,1\}\quad\forall i=1,2,...,n$. Стандартная метрика в этом пространстве – метрика Хэмминга. Расстояние между точками $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ и $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ определяется, как количество позиций, в которых различаются координаты этих точек

$$\rho_{Hem}(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|y_i-x_i|.$$

Например, расстояние Хэмминга между точками (1,0,1,1,0,1) и (0,1,1,0,1,0) в шестимерном бинарном пространстве равно 5.

Определение 4. Схемой Холланда [1] называется слово вида $s=s_1s_2...s_N$, где $s_i\in\{0,1,*\}$. Каждая схема определяет некоторое подмножество $A_s=\{a_1,a_2,...,a_N\}\subseteq\{0,1\}^N$,

где $$a_i=\begin{cases}0, \text{ если } s_i=0;\\ 1, \text{ если } s_i=1;\\ 0 \text{ или } 1, \text{ если } s_i=*.\end{cases}$$

Это подмножество также будем называть схемой. Таким образом, схема – это определенный шаблон для бинарных последовательностей. Если N=6, то примерами схем будут следующие строки: 1**1**, **101*, 1001*0 и так далее. Знаки схемы, отличные от «*» называются значащими.

Теорема 4. *Любой отрезок между двумя точками бинарного пространства – является схемой Холланда. Наоборот, всякая невырожденная (имеющая значащие знаки) схема Холланда является отрезком.*

Доказательство. Пусть x,y – две произвольные точки пространства B^n. Построим схему s следующим образом: на месте с номером i в схеме ставится значащий элемент (0 или 1), если этот элемент присутствует на месте с номером i как в x, так и в y. В противном случае в схеме ставится знак «*». Расстояние от любого элемента z этой схемы до элемента x равно числу отличий между x и z в позициях соответствующих знаку «*» в схеме. Но если в позиции i знаки в x и z различны, то в этой же позиции знаки в y и z совпадают (по определению схемы s). Таким образом, $\rho_{Hem}(x,y)=\rho_{Hem}(x,z)+\rho_{Hem}(z,y)$ и, следовательно, схема s содержится в отрезке $[x,y]$. С другой стороны, в соответствии с определением расстояния Хемминга, для каждой точки отрезка $z\in[x,y]$ в позиции каждого значащего знака схемы s знак z совпадает со знаками x и y. Таким образом, отрезок $[x,y]$ содержится в схеме s и, следовательно, совпадает с этой схемой.

Пример: Для точек (1,0,1,1,0,1) и (0,1,1,0,1,0) отрезок между ними задается схемой (*,*,1,*,*,*).

Отметим одно из свойств схем Холланда. Объединение любых двух схем также является схемой. Из этого очевидного свойства вытекает, что в бинарном пространстве выпуклыми множествами являются отрезки и только они.

Пространство перестановок

Следующий интересный пример метрического пространства это пространство перестановок S_n. Каждый элемент этого пространства описывается перестановкой $s=(s_1,s_2,...,s_n)$, где все координаты попарно различные числа из множества $\{1,2,\ldots,n\}$.

Расстояние между точками пространства S_n может быть определено различными способами. Приведем некоторые из них.

1) расстояние Хэмминга – расстояние между перестановками определяется как количество позиций перестановок, в которых элементы перестановок различаются;

2) метрика Кэли – минимальное количество транспозиций элементов, которые необходимо выполнить, чтобы перевести одну перестановку в другую;

3) метрика Кэндалла – минимальное количество транспозиций соседних элементов, которые необходимо выполнить, чтобы перевести одну перестановку в другую.

Пусть $s=(s_1,s_2,...,s_n)\in S_n$. Запись $i<_s j$ будет означать, что в перестановке s элемент i предшествует элементу j. Определим порядковую матрицу (a_{ij}^s) перестановки s следующим образом:

$$a_{ij}^s=\begin{cases}1 \quad \text{если } i<_s j;\\ -1 \ \text{ если } j<_s i;\\ 0 \quad \text{если } i=j.\end{cases}.$$

Теорема 5. *Пусть* $u=u_1u_2...u_n$ *и* $v=v_1v_2...v_n$. *Расстояние Кэндалла между перестановками* u *и* v *определяется формулой*

$$\rho(u,v)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}^v-a_{ij}^u|. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $u \neq v$. Тогда в перестановке v найдутся два соседних элемента i,j такие, что

$$i <_u j \text{ è } j <_v j. \qquad (4)$$

Действительно, пусть таких элементов в перестановке v нет. Выберем в перестановке v наиболее близкие элементы i, j обладающие указанным свойством. Выберем элемент k между элементами j и i в перестановке v. Тогда имеем $i <_u j$, $j <_v k <_v i$. Но это означает, что в перестановке u либо $k <_u i$, либо $j <_u k$. В любом случае i, j не являются ближайшими, обладающими свойством (4), в перестановке v. Следовательно, обязательно найдутся соседние элементы i, j в перестановке v, обладающие свойством (4). Последовательно меняя местами в перестановке v соседние элементы, обладающие свойством (4) можно перейти к перестановке u за минимальное число шагов, равное $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}^{v} - a_{ij}^{u}|$. Это и будет расстояние Кэндалла между перестновками.

Попытаемся теперь описать отрезок межу двумя перестановками в метрике Кэндалла.

Теорема 6. *В метрике Кэндалла отрезком, соединяющим перестановки, является множество всех перестановок, сохраняющих относительный порядок между элементами в u, и v, а именно:* $[u,v] = \{w \in S_n : i <_u j \text{ è } i <_v j \Rightarrow i <_w j\}$.

Доказательство. Обозначим через $W = \{w \in S_n : i <_u j \text{ è } i <_v j \Rightarrow i <_w j\}$. Тогда, в соответствии с (3), для всякой перестановки $w \in W$ имеет место равенство $\rho(u,v) = \rho(u,w) + \rho(w,v)$ и потому $W \subseteq [a,b]$. Пусть перестановка w принадлежит отрезку $[u,v]$, соединяющему перестановки $u = u_1u_2...u_n$ и $v = v_1v_2...v_n$. Тогда если $i <_u j$ и $i <_v j$, то этот же порядок элементов i, j присутствует и в перестановке w. В противном случае удалось бы уменьшить число транспозиций соседних элементов, позволяющих перейти от u к v. Следовательно, $[a,b] \subseteq W$ и теорема доказана.

Можно показать, что любое выпуклое множество в метрике Кэндалла является отрезком. Отметим одно интересное свойство: шар в этой метрике, т. е. множество элементов вида $\{u \in S_n \mid \rho(u_0,u) \le r\}$ вообще говоря, не является выпуклым множеством [4]

Геометрические операции

Пусть множество X является метрическим пространством с метрикой $\rho : X \times X \to R_+^1$. Рассмотрим бинарную операцию $Kr : X \times X \to X$.

Определение 5. Бинарная операция на метрическом пространстве (X,ρ) называется геометрической, если для любых $x, y \in X$ результат этой операции $Kr(x,y)$ принадлежит отрезку [x, y], соединяющему точки x и y. Другими словами, $\forall x,y \in X \quad \rho(x,y) = \rho(x,Kr(x,y)) + \rho(Kr(x,y),y)$.

Напомним, что на метрическом пространстве определена структура наследственности, которая состоит из множества всех отрезков пространства. Таким образом, для геометрической операции имеют место свойства наследования. Наследуется принадлежность элементов одному отрезку.

В [5] доказан ряд необходимых условий геометричности операции. Приведем их с небольшими изменениями в виде теорем.

Теорема 7. (Свойство чистоты) *Для того, чтобы бинарная операция* $Kr : X \times X \to X$ *была геометрической необходимо, чтобы* $\forall x \in X \quad Kr(x,x) = x$.

Теорема 8. (Свойство конвергенции) *Для того, чтобы бинарная операция* $Kr : X \times X \to X$ *была геометрической необходимо, чтобы* $\forall x,y,z \in X$ è $z = Kr(Kr(x,y),y)$ *из условия* $z = x$ *следовало, что* $Kr(x,y) = x$

Теорема 9. (Свойство делимости) *Для того, чтобы бинарная операция* $Kr : X \times X \to X$ *была геометрической необходимо, чтобы* $z \in [x,y]$ è $w \in [x,z] \cap [z,y]$ *следовало, что* $z = x$ èëè $z = y$.

Полные системы наследственных свойств

Определение 6. Система свойств $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_s$ называется полной системой свойств, если эти свойства попарно различны, то есть

$$\forall x,y \in X \quad \exists k \in \{1,2,...,s\} \quad \varepsilon_k(x) \neq \varepsilon_k(y).$$

Заметим, что в соответствии с определением, полные системы наследственных свойств могут существовать лишь на конечных множествах. Однако это понятие легко обобщается и на случай бесконечных множеств.

Теорема 10. *Для того чтобы существовала полная система наследственных свойств* $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_s$ *на* *конечном множестве X с бинарной операцией* $Kr: X \times X \to X$ *, необходимо и достаточно, чтобы на множестве X существовала метрика, в которой операция* Kr *была бы геометрической.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_s$ - полная система наследственных свойств на множестве *X*. Определим метрику

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{s} |\, \varepsilon_k(y) - \varepsilon_k(x)\,| . \quad (5)$$

Свойства метрики (2) проверяются непосредственно.

Для произвольных элементов $x, y \in X$ обозначим $z = Kr(x,y)$. Так как операция Kr является наследственной по отношению к свойствам ε_k $k = 1,2,...,s$, то $\varepsilon_k(z) = \varepsilon_k(x)$, при $\varepsilon_k(x) = \varepsilon_k(y)$ и $|\varepsilon_k(x) - \varepsilon_k(y)| = |\varepsilon_k(x) - \varepsilon_k(z)| + |\varepsilon_k(y) - \varepsilon_k(z)|$, в том случае, когда $\varepsilon_k(x) \neq \varepsilon_k(y)$. Таким образом, $\rho(x,y) = \rho(x,z) + \rho(z,y)$ и, следовательно, кроссовер является геометрическим в метрике (5).

Достаточность. Для каждой пары точек $a, b \in X$ определим свойство P_{ab} – принадлежит выпуклой оболочке отрезка, соединяющему точки a и b. Эта система свойств является полной. Действительно, если $x \neq y$, то элемент *x* обладает свойством P_{xx}, а элемент *y* свойством P_{xx} не обладает.

Покажем, что свойство P_{ab} является наследственным для геометрической операции. Пусть два элемента $x, y \in X$ обладают свойством P_{ab}. Обозначим $z = Kr(x,y)$. В силу геометричности операции, точка z принадлежит отрезку $[x,y]$ и, следовательно, точка *z* обладает свойством P_{ab}. Таким образом, любое из свойств P_{ab} является наследственным.

Использование в эволюционных моделях

Среди эвристических подходов к поиску приближенных решений оптимизационных задач достойное место занимают эволюционные модели [1; 6–8]. На сегодня особенно актуальным является вопрос о сходимости эволюционного алгоритма и оценки качества приближенных решений, получаемых с его помощью. Одним из немногих значимых результатов в этой области является классическая теорема схем для эволюционной модели на бинарном пространстве[1; 8]. Теорема схем показывает, что при работе генетического алгоритма происходит накопление элементов тех схем, для которых среднее значение критерия отбора выше среднего значения критерия для всего множества решений. Это, в какой-то степени, дает теоретическое обоснование сходимости эволюционного алгоритма. Однако вопрос о более точных оценках и гарантиях сходимости остается открытым. Теорема схем может быть легко обобщена на другие эволюционные модели с другими пространствами поиска при наличии наследственных свойств для операции кроссовера. Имеет место следующая те-орема, с очевидностью вытекающая из вышеизложенных результатов.

Теорема 11. *Для того, чтобы эволюционная модель обладала наследственными свойствами достаточно, чтобы оператор кроссовера для этой модели был геометрическим.*

Таким образом, можно рекомендовать следующую методику постро-ения эволюционных моделей прикладных задач: на первом шаге выбирается подходящее базовое пространство, элементы которого кодируют решения оптимизационной задачи, далее выбирается метрика в этом пространстве, определяются отрезки и выпуклые множества, после этого строится оператор кроссовера, который является геометрическим в выбранной метрике. Такой подход гарантирует сходимость в среднем для эволюционного алгоритма и позволяет получать решения задачи близкие к оптимальным. На первом этапе эволюционного моделирования можно сформировать покрытие базового пространства выпуклыми множествами и строить начальные популяции в рамках элементов этого покрытия. Это позволяет значительно расширить пространство поиска и, соответственно, улучшить качество эволюционной модели.

Выводы. В работе доказано, что наследственные структуры на произвольном множестве могут быть построены с помощью задания метрики на этом множестве. При этом, наследственная структура задается семейством выпуклых оболочек отрезков в заданной метрике. Показано, что наличие полной системы наследственных, относительно некоторой бинарной операции на конечном множестве, определяет метрику на этом множестве, в которой операция является геометрической. Наоборот, наличие геометрической бинарной операции на множестве автоматически определяет полную систему наследственных свойств. Показано, как полученные результаты могут быть применены при построении эволюционных моделей для поиска оптимальных решений в прикладных задачах. В частности, доказано достаточное условие наличия наследственных свойств в эволюционных моделях – геометричность операции кроссовера.

Библиографические ссылки

1. **Holland J. H.** Adaptation in Natural and Artificial Systems / J. H. Holland. – Boston, – 1992. – 288 p.
2. **Солтан В.П.** Введение в аксиоматическую теорию выпуклости / В.П.Солтан. – Кишенев, 1984. – 224 с.
3. **Деза Е. И**. Энциклопедический словарь растояний. / Е. И. Деза, М. М. Деза – М., 2008. – 432 с.

4. **Козин И. В**. Об оценке мощности шарового покрытия пространства перестановок/ И. В. Козин, А. С. Бондаренко, С. И. Полюга // Вісник Запорізького наці-онального університету. Фізико-математичні науки. с 009. – № 1. – С. 134 – 138
5. **Moraglio A.** Inbreeding Properties of Geometric Crossover and Non-geometric Recombinations / A. Moraglio, R. Poli //Foundations of Genetic Algorithms, 2007, P. 1– 14.
6. **Mitchel M**. An Introduction to Genetic Algorithms / M. Mitchel. – Cambridge, 1998. – 158 p.
7. **Емельянов В. В**. Теория и практика эволюционного моделирования./ В. В. Емельянов, В. В. Курейчик, В. М. Курейчик. – М., 2003. – 432 с.
8. **Скобцов Ю.А.** Основы эволюционных вычислений : учеб. пособ. / Ю.А. Скоб-цов. – Донецк, 2008. – 326 с.

Надійшла до редколегії 21.05.2012