УДК 519.21 doi: 10.15421/322213

Н.І. Пославйко
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРЕХІДНОГО РЕЖИМУ В СИСТЕМІ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ ТИПУ $M/M/m$ З УРАХУВАННЯМ ЕКОНОМІЧНОГО ЕФЕКТУ ВІД ОБСЛУГОВУВАННЯ ЗАЯВОК

Пропонується підхід до розрахунку ймовірностей станів в перехідному режимі неоднорідної за часом системи масового обслуговування типу $M/M/m$. Процес обслуговування представлений у вигляді двовимірного марковського процесу, перша компонента якого співпадає з числом заявок у системі в кожен момент часу t, а друга – з величиною доходу, отриманого до моменту t.

Ключові слова: система масового обслуговування, марковський процес, перехідний режим, інтегральне перетворення, твірна функція.

N.I. Poslaiko
Oles Honchar Dnipro National University

RESEARCH OF THE TRANSITION MODE IN A QUUE SERVICE SYSTEM OF THE TYPE $M/M/m$ WITH CONSIDERING THE ECONOMIC EFFECT FROM SERVICE OF APPLICATIONS

The paper considers a generalization of a system with an unlimited queue for the case when applications entering the system bring some economic effect, for example, income. The incoming flow of requirements is an extraordinary non-stationary Poisson process. Applications are processed in the order in which they are received. Since the flow of applications is not ordinary, applications can come in groups, and not just one at a time. It is assumed that the order of arrival for service of applications that arrived in one group is arbitrary. Each device can serve only one request at a time. Applications are serviced according to an exponential law with a parameter that is a continuous function of time. If an order occupies the device at the moment t of time and $\Delta t \downarrow 0$, then the probability that it will release the device by the moment $t+\Delta t$ is equal to $\mu(t)\Delta t + o(\Delta t)$. The basic assumption about the nature of the service is that the "revenues" that are received from the service of different requests are independent

The service process is represented by a two-dimensional Markov process $\delta(t) = (\xi(t), \eta(t))$, where $\xi(t)$ it coincides with the number of applications in the system (in the queue and in service) at the time moment t, and $\eta(t)$ – with the amount of income received by this moment, $\eta(t) \in R^l$. Service process state probabilities $P_k(t, A) = P(\xi(t) = k, \eta(t) \in A)$, where $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, A is the Borel set from R^l,

the integral transformations are put in correspondence $q_k(t,z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(z,x)}P_k\left(t,dx\right)$**. Using the total probability formula, differential equations are derived that are satisfied by** $q_k(t,z)$ **. Using the generating function** $q(t,z,\theta)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} q_k\left(t,z\right)\theta^k \quad \left(0<\left|\theta\right|\le 1\right)$ **the system of differential equations for** $q_k(t,z)$ **is reduced to one differential equation. To find its solution through the given characteristics of the system, an auxiliary process is used** $\delta^*(t)$**, which, in contrast** $\delta(t)$**, is homogeneous not only in the second, but also in the first component. The generating function** $\delta^*(t)$ **is known. It is used to find expressions for** $q_k(t,z)$**.**

Key words: queuing system, Markov process, transitional regime, integral transformation, generating function.

Н.И. Послайко

Днипровский национальный университет имени Олеся Гончара

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРЕХОДНОГО РЕЖИМА В СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ТИПА $M/M/m$ С УЧЕТОМ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА ОТ ОБСЛУЖИВАНИЯ ЗАЯВОК

Предлагается подход к расчету вероятностей состояний в переходном режиме неоднородной по времени системы массового обслуживания типа $M/M/m$**. Процесс обслуживания представлен в виде двумерного марковского процесса, первая компонента которого совпадает с числом требований в системе в каждый момент времени** t**, а вторая – с величиной дохода, полученного к моменту** t**.**

Ключевые слова: система массового обслуживания, марковский процесс, переходной режим, интегральное преобразование, производящая функция.

Вступ. В математичних моделях систем масового обслуговування ефективність їх роботи характеризується різними показниками в залежності від типу систем – це в першу чергу пропускна здатність системи (абсолютна і відносна), середня довжина черги та середній час перебування заявок в черзі, ймовірність відмови в обслуговуванні та багато інших [1]. В реальних системах масового обслуговування іноді виникають ситуації, коли при обслуговуванні заявок отримують певний економічний ефект, дохід, який належало б враховувати при математичному описанні системи. Так, наприклад, у нафтопереробній промисловості на переробні підприємства нафта надходить порціями, які певним чином обробляються. Внаслідок цієї переробки одержують різноманітні нафтопродукти, такі як мазут, бензин, гас, авіаційне паливо та інші. Переробка нафти приносить переробним підприємствам певний прибуток, який залежить від обсягів нафти, яка надходить на ці підприємства. Процес надходження нафти та її переробки не є строго детермінованим, залежить від впливу багатьох факторів. Це призводить до того, що величина прибутку як функція часу теж не є строго детермінованою і при математичному описі її доцільно розглядати як випадковий процес. При побудові математичних моделей реальних процесів використовують різні підходи в залежності від поставлених задач. Наприклад, в [2] деякі економічні процеси моделюються ланцюгами Маркова, в яких кожен перехід із стану в стан супроводжується доходом.

У даній роботі розглядається математична модель системи масового обслуговування з урахуванням економічного ефекту при наступних припущеннях. Потік заявок, які надходять на обслуговування, вважається пуассонівським неординарним. Заявки обслуговуються m приладами; кожен прилад одночасно може обслуговувати тільки одну заявку; якщо заявка надходить, коли всі прилади зайняті обслуговуванням, то вона стає в чергу. Дисципліна черги – в порядку надходження (хто першим прийшов, той першим і обслуговується). Оскільки потік заявок неординарний, то на обслуговування заявки можуть прибувати групами, а не тільки по одній. Припускається, що порядок надходження на обслуговування заявок, які прибули в одній групі, довільний. Обслуговування відбувається згідно з експоненційним розподілом. Число місць очікування і час очікування для заявок, які стоять в черзі, вважаються необмеженими.

Відомо, що в багатьох реальних СМО (економічних, технічних) помітну роль відіграють нестаціонарні явища. У цьому випадку інтенсивність вхідного потоку заявок та інтенсивність обслуговування є функціями часу, часто періодичними. Наприклад, інтенсивність потоків пасажирів, вантажів, заявок на ремонтні роботи змінюються протягом доби, в залежності від сезону і т. і. У пропонованій математичній моделі і інтенсивність надходження заявок, і інтенсивність обслуговування є функціями часу.

Для розглядуваної математичної моделі пропонується підхід для визначення ймовірностей станів процесу обслуговування в перехідному режимі.

Постановка задачі. Позначимо через $\alpha(t,s)$ число заявок , які надійшли в систему в проміжку (t,s). Тоді в припущенні, що вхідний потік неординарний і нестаціонарний, при $\Delta t \to 0$ матимемо:

$$P\left\{\alpha\left(t,t+\Delta t\right)=k\right\}=\lambda_k\left(t\right)\Delta t+o\left(\Delta t\right),\ \ k\geq 1,\ \ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{o\left(\Delta t\right)}{\Delta t}=0. \qquad (1)$$

Тут $\lambda_k\left(t\right)$ – інтенсивність надходження в систему k заявок в момент t.

Нехай функції $\lambda_k\left(t\right)$ є неперервними і ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left(t\right)=\lambda\left(t\right)$

збігається рівномірно на $\left[0,\infty\right)$. Із (1) випливає:

$$M\theta^{\alpha(t,s)}=\sum_{k=0}^{\infty}P\left\{\alpha\left(t,s\right)=k\right\}\theta^k=\exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\theta^k\right)\int_t^s\lambda_k\left(u\right)\right\}\mathrm{d}u\ \ \left(\left|\theta\right|=1\right). \qquad (2)$$

Покладемо

$$p_k\left(t,s\right)=P\left\{\alpha\left(t,s\right)=k\right\},\ \ k\geq 0.$$

Згідно з (2) маємо:

$$p_0(t,s)=\exp\left\{-\int_t^s \lambda(u)\mathrm{d}u\right\},$$

$$p_n(t,s)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\theta|=1}\frac{\exp\left\{-\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\theta^k\right)\int_t^s \lambda_k(u)\mathrm{d}u\right\}}{\theta^{n+1}}\mathrm{d}\theta,\ \ n>0.$$

Будемо вважати також, що обслуговування відбувається згідно з показниковим розподілом, параметр якого є неперервною функцією часу. Якщо заявка береться на обслуговання в момент t і $\Delta t\downarrow 0$, то ймовірність того , що вона звільнить прилад до моменту $t+\Delta t$, дорівнює $\mu(t)\Delta t+o(\Delta t)$.

Заявки, які надходять в систему , в процесі обслуговування приносять деякий дохід. Випадковий процес, що співпадає в кожен момент часу з величиною доходу, отриманого до моменту t, позначимо через η_t. Нехай η_t набуває значень з R^l.

Основне припущення відносно характеру обслуговування буде полягати в тому, що «доходи» , які отримують від обслуговування різних заявок, не залежать один від одного.

Розглянемо двовимірний процес $\delta_t=\{\xi_t,\eta_t\}$, де ξ_t – число заявок в системі в момент t (в черзі і на обслуговуванні), $\xi_t\in N^+=(0,1,2,\ ...)$.

Нехай

$$\varphi^r(t,z)=Me^{i\left(z,\gamma^{(r)}(t)\right)},\ \ r\ge 1,\ \ \varphi_r^-(t,z)=Me^{i\left(z,\gamma_k^-(t)\right)},$$

$$Me^{i\left(z,\sigma_k(s)-\sigma_k(t)\right)}=\exp\left\{\int_t^s \rho_k(u,z)\mathrm{d}u\right\},\ \ k\ge 0$$

$$\left(\varphi_k^-(t,z)=\varphi^-(t,z),\ \ \rho_k(t,z)=\rho(t,z),\ \ k\ge m\right),$$

де $\int_t^s \rho_k(u,z)\mathrm{d}u$ – логарифм характеристичної функції (по z) деякого безмежно подільного розподілу, зосередженого в R^l. Відомо [3], що

$$\int_t^s \rho_k(u,z)\mathrm{d}u=ia_k(t,s)-\frac{1}{2}\left(A_k(t,s)z,z\right)+$$

$$+\int_{R^l}\left(e^{i(z,x)}-1-\frac{i(z,x)}{1+i(x,x)}\right)\frac{1+(x,x)}{(x,x)}G_k(t,s,\mathrm{d}x)$$

(формула Леві-Хінчина).

Тут $a_k(t,s) \in R^l$, $A_k(t,s)$ – невід’ємно визначена $l \times l$ матриця, $G_k(t,s,\mathrm{d}x)$ – скінчена міра на множині всіх l-вимірних борелівських множин.

Покладемо

$$P_k(t,A) = P(\xi(t) = k, \eta(t) \in A),$$

$$q_k(t,z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(z,x)} P_k(t,\mathrm{d}x),$$

де A – борелівська множина із R^l.

Будемо називати марковський процес δ_t, однорідний за другою компонентою, основним процесом обслуговування в системі обслуговування $M_t/M_t/m$ з урахуванням економічного ефекту $(\delta_t \in N^+ \times R^l)$, якщо в проміжку $(t,t+\Delta t)$ для нього можливі переходи:

$$(k,x) \xrightarrow{(t,t+\Delta t)} \begin{cases} (k, x+\sigma_k(t+\Delta t)-\sigma_k(t)) : 1-(\lambda(t)+k\mu(t))\Delta t + o(\Delta t), \\ (k+r, x+\gamma^r(t)) : \quad \lambda_r(t)\Delta t + o(\Delta t), \\ (k-1, x+\gamma_k^-(t)) : \quad k\mu(t)\Delta t + o(\Delta t), \end{cases}$$

$0 \le k \le m-1;$

$$(k,x) \xrightarrow{(t,t+\Delta t)} \begin{cases} (k, x+\sigma_k(t+\Delta t)-\sigma_k(t)) : 1-(\lambda(t)+m\mu(t))\Delta t + o(\Delta t), \\ (k+r, x+\gamma^r(t)) : \quad \lambda_r(t)\Delta t + o(\Delta t), \\ (k-1, x+\gamma^-(t)) : \quad m\mu(t)\Delta t + o(\Delta t), \end{cases} \tag{3}$$

$k \ge m, \quad r \ge 1.$

Тут $\gamma_k^-(t)$, $\gamma^r(t)$ – стрибки неперервної компоненти η_t, які відповідають стрибкам дискретної компоненти ξ_t із стану k вниз та вверх відповідно. Якщо ж ξ_t в $(t,t+\Delta t)$ не змінює свого значення, то дохід, отриманий в процесі обслуговування до моменту t, збільшиться за час Δt на величину $\sigma_k(t+\Delta t)-\sigma_k(t)$ $(\sigma_0(t+\Delta t)-\sigma_0(t)=0)$.

Задача полягає в знаходженні розподілу процесу δ_t .

Розподіл процесу δ_t. За формулою повної ймовірності згідно з (3) маємо:

$$\begin{aligned} q_k(t,z) &= q_k(t-\Delta t,z)\left[1-(\lambda(t)+\min(k,m)\mu(t))\Delta t\right]\left[1+\rho_k(t,z)\Delta t\right]+ \\ &+q_{k+1}(t-\Delta t,z)\min(k+1,m)\mu(t)\varphi_{k+1}^-(t,z)+ \\ &+\Delta t\sum_{j=0}^{k-1} q_j(t-\Delta t,z)\lambda_{k-j}(t)\varphi^{(k-j)}(t,z)+o(\Delta t), \end{aligned} \tag{4}$$

звідки

$$\frac{\partial q_k(t,z)}{\partial t}=\left[\rho_k\left(t,z\right)-\lambda\left(t\right)-\min\left(k,m\right)\mu\left(t\right)\right]q_k(t,z)+$$
$$+\min\left(k+1,m\right)\mu\left(t\right)\varphi_{k+1}^{-}(t,z)q_{k+1}(t,z)+$$
$$+\sum_{j=0}^{k-1}\lambda_{k-j}\left(t\right)\varphi^{(k-j)}(t,z)q_j(t,z),\ \ k\ge 0.$$

Вираз $1+\rho_k\left(t,z\right)\Delta t+o\left(\Delta t\right)$ з'явився в (4) з огляду на такі рівності:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\rho_k\left(u,z\right)\mathrm{d}u=\rho_k\left(t,z\right),$$

$$\exp\left\{\int_t^{t+\Delta t}\rho_k\left(u,z\right)\mathrm{d}u\right\}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\left(\int_t^{t+\Delta t}\rho_k\left(u,z\right)\mathrm{d}u\right)^i=$$
$$=1+\rho_k\left(t,z\right)\Delta t+o\left(\Delta t\right).$$

Введемо твірну функцію

$$q(t,z,\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}q_k\left(t,z\right)\theta^k\quad\left(0<\left|\theta\right|\le 1\right),$$

і будемо вважати, що в початковий момент часу t_0 основний процес знаходиться в стані $\left(j,x_0\right)$. Тоді із (4) для визначення $q(t,z,\theta)$ отримаємо задачу Коші:

$$\frac{\partial q(t,z,\theta)}{\partial t}=h\left(t,z,\theta\right)q(t,z,\theta)+\sum_{k=0}^{m-1}\varepsilon_k(t,z,\theta)q_k\left(t,z\right)\tag{5}$$

з початковою умовою

$$q(t_0,z,\theta)=\theta^j e^{i(z,x_0)}.\tag{6}$$

В (5) функції $h\left(t,z,\theta\right)$ і $\varepsilon_k\left(t,z,\theta\right)$ мають наступний вигляд:

$$h\left(t,z,\theta\right)=\rho\left(t,z\right)-\lambda\left(t\right)-m\mu\left(t\right)+\frac{m\mu\left(t\right)\varphi^{-}\left(t,z\right)}{\theta}+$$
$$+\sum_{r=1}^{\infty}\lambda_r\left(t\right)\varphi^{(r)}\left(t\right)\theta^r,$$
$$\varepsilon_k\left(t,z,\theta\right)=\rho_k\left(t,z\right)-\rho\left(t,z\right)-\left(m-k\right)\mu\left(t\right)+$$
$$+\frac{\mu\left(t\right)}{\theta}\left(k\varphi_r^{-}\left(t,z\right)-m\varphi^{-}\left(t,z\right)\right),\quad 0\le k<m.$$

Описання допоміжного процесу. Основний процес обслуговування $\delta(t)$ є неоднорідним за першою компонентою. Для знаходження ймовірностей станів $\delta(t)$ використаємо допоміжний процес $\delta^*(t)$, який при $\xi\left(t\right)\ge m$ співпадає з $\delta(t)$,але на відміну від $\delta(t)$ є однорідним не тільки за другою компонентою, але і за першою.

Нехай $\delta^*(t)=\left\{\xi_t^*,\eta_t^*\right\}$ –марковський процес, дискретна компонента якого набуває значень з множини $N=\{0,\pm1,\pm2,\ \dots\ ,\ \pm k,\ \dots\}$, а $\eta_t^*\in R^l$, і

$$M\theta^{\xi_s^*-\xi_t^*}e^{i\left(z,\eta_s-\eta_t\right)}=\exp\left\{\int_t^s h\left(u,z\right)\mathrm{d}u\right\}. \tag{7}$$

Якщо позначити

$$M\left(e^{i\left(z,\eta_s^*-\eta_t^*\right)},\xi_s^*-\xi_t^*=k\right)=a_k^{[t,s]},$$

то (7) означає, що

$$a_k^{[t,\Delta t]}\left(z\right)=\lambda_k\left(t\right)\varphi^{(k)}\left(t,z\right)\Delta t+o\left(\Delta t\right),\ k\ge1,$$

$$a_{-1}^{[t,\Delta t]}\left(z\right)=m\mu\left(t\right)\varphi^{-}\left(t,z\right)\Delta t+o\left(\Delta t\right),$$

$$a_0^{[t,\Delta t]}\left(z\right)=\left[1-\left(\lambda\left(t\right)+m\mu\left(t\right)\right)\Delta t\right]\left[1+\rho\left(t,z\right)\Delta t\right]+o\left(\Delta t\right).$$

Враховуючи, що

$$\sum_{k\in N}a_k^{[t,s]}\left(z\right)\theta^k=\exp\left\{\int_t^s h\left(u,z,\theta\right)\mathrm{d}u\right\},$$

функції $q_k(t,z)$ можна знайти з (4)-(5) наступним чином.

Формально проінтегруємо рівняння (4), отримаємо:

$$\begin{gathered}q(t,z,\theta)=\exp\left\{\int_{t_0}^t h\left(u,z,\theta\right)\mathrm{d}u\right\}\left(\theta^j e^{i\left(z,x_0\right)}\right)+\\+\sum_{k=0}^{m-1}\int_{t_0}^t\exp\left\{-\int_{t_0}^{v}h\left(u,z,\theta\right)\mathrm{d}u\right\}\varepsilon_k\left(v,z,\theta\right)q_k\left(v,z\right)\mathrm{dv},\end{gathered} \tag{8}$$

звідки

$$q_r(t,z)=e^{i\left(z,x_0\right)}a_{r-j}^{[t_0,t]}\left(z\right)+$$

$$+\sum_{k=0}^{m-1}\int_{t_0}^t\left\{Q_k\left(v,z\right)a_r^{[v,t]}\left(z\right)+\mu\left(v\right)\left[k\varphi_k^-\left(v,z\right)-m\varphi^-\left(v,z\right)\right]a_{r+1}^{[v,t]}\left(z\right)q_k\left(v,z\right)\right\}\mathrm{dv}, \tag{9}$$

$$Q_k\left(v,z\right)=\rho_{\mathrm{k}}\left(v,z\right)-\rho\left(v,z\right)+\left(m-k\right)\mu\left(v\right).$$

Визначення функцій $q_k(t,z)$. Для повного розв’язання задачі залишається визначити функції $q_k(t,z)$ при $0\le k\le m-1$. Що стосується цих функцій, то вони згідно з (9) задовольняють систему інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду з неперервним ядром (з огляду на передбачену в моделі неперервність інфінітезимальних характеристик та властивості характеристичної функції [4]). Останню систему будемо розв'язувати методом послідовних наближень на деякому відрізку $[t_0, t]$. Покладемо

$$\overline{q}(t,z) = \left(q_0(t,z),\ q_1(t,z),\ \dots,\ q_{m-1}(t,z)\right),$$

$$\overline{a_j}(t_0,t,z) = \left(a^{[t_0,t]}_{-j}(z),\ a^{[t_0,t]}_{-j+1}(z),\ \dots,\ a^{[t_0,t]}_{-j+m-1}(z)\right),$$

$$A(v,t,z) = \left(a_{kr}(v,t,z),\ 0 \le k,r \le m\text{-}1\right),$$

$$a_{kr}(v,t,z) = \left[\rho_k(v,z) - \rho(v,z) + (m-k)\mu(v)\right]a_r^{[v,t]}(z) +$$
$$+\mu(v)\left[k\varphi_k^-(v,z) - m\varphi^-(v,z)\right]a_{r+1}^{[v,t]}(z),$$

тоді із (9) отримаємо:

$$\overline{q}(t,z) = e^{i(z,x_0)}\overline{a_j}(t_0,t,z) + \int_{t_0}^{t}\overline{q}(v,z)A(v,t,z)\mathrm{d}v. \tag{10}$$

Якщо

$$\overline{q_0}(t,z) = e^{i(z,x_0)}\overline{a_j}(t_0,t,z),$$

....

$$\overline{q_n}(t,z) = e^{i(z,x_0)}\overline{a_j}(t_0,t,z) + \int_{t_0}^{t}\overline{q_{n-1}}(v,z)A(v,t,z)\mathrm{d}v,$$

то

$$\overline{q_n}(t,z) = e^{i(z,x_0)}\overline{a_j}(t_0,t,z) +$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\int\ \dots\ \int_{t_0<u_1<\dots u_k<t} e^{i(z,x_0)}\overline{a_j}(t_0,u,z)\prod_{l=1}^{k}A(u_l,u_{l+1},z)\mathrm{d}u_l \quad (u_{k+1}=t).$$

Нехай

$$\overline{X}(v,z) = \left(x_k(t,z),\ 0 \le k \le m\text{-}1\right),$$

$$\left\|\overline{X}\right\| = \sup_{k,v\in[t_0,t]} \left|x_k(t,z)\right|,$$

$$\left\|\overline{A}\right\| = \sup_{k,v\in[t_0,t]} \sum_r \left|a_{kr}(v,t,z)\right| < \infty. \tag{11}$$

За умови (11) границя

$$\lim_{n\to\infty}\overline{q_n}(t,z) = \overline{q}(t,z)$$

існує [5] і задовольняє рівняння (10), причому

$$\left\|\bar{q}-\bar{q}_n\right\| \le e^{\|A\|(t-t_0)} \frac{\left[\|A\|(t-t_0)\right]^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Таким чином, має місце наступне твердження.

Теорема. Якщо інфінітезимальні характеристики процесу δ_t неперервні, то перетворення

$$q(t,z,\theta)=\sum_{k\in N^+}\theta^k\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(z,x)}P_k(t,\mathrm{d}x) \quad \left(0<|\theta|\le 1\right)$$

його перехідних ймовірностей визначається формулою (8), де

$$\left(q_0(t,z),\ \ldots,\ q_{m-1}(t,z)\right)=\bar{q}(t,z)=$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\ \underset{t_0<u_1<\ldots u_k<t}{\int\ \ldots\ \int} e^{i(z,x_0)}\overline{a_j}(t_0,u,z)\prod_{l=1}^{k}A(u_l,u_{l+1},z)\mathrm{d}u_l+ \qquad (12)$$
$$+e^{i(z,x_0)}\overline{a_j}(t_0,t,z) \qquad (u_{k+1}=t).$$

Ряд в правій частині (12) збігається за нормою:

$$\Bigg\|\sum_{k=1}^{\infty}\ \underset{t_0<u_1<\ldots u_k<t}{\int\ \ldots\ \int} e^{i(z,x_0)}\overline{a_j}(t_0,u,z)\prod_{l=1}^{k}A(u_l,u_{l+1},z)\mathrm{d}u_l+$$
$$+e^{i(z,x_0)}\overline{a_j}(t_0,t,z)\Bigg\| \le 1+\sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\frac{\left(\|\mathrm{A}\|(t-t_0)\right)^k}{k!}=\mathrm{e}^{\|\mathrm{A}\|(t-t_0)}.$$

Висновки. У роботі запропонована математична модель системи масового обслуговування з урахуванням економічного ефекту від обслуговування заявок, а також наводиться підхід до знаходження ймовірнісних характеристик процесу обслуговування в перехідному режимі.

Бібліографічні посилання

1. Гнеденко Б.В. Введение в теорию массового обслуживания. М.: URSS, 2013. – 400 с.
2. Соколов Г.А., Чистякова Н.А. Теория вероятностей. Управляемые цепи Маркова. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 248 с.
3. Скороход А.В. Елементи теорії ймовірностей та випадкових процесів. Київ: «Вища школа», 1975. 296 с.
4. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М.: Книжный дом «Либроком», 2011. 488 с.
5. Смирнов В.Л. Курс высшей математики, т.4. М.: «Наука». 1974. 336 с.

Надійшла до редколегії 20.09.2022.