УДК 519.8 doi: 10.15421/322211

O.O. Maliienko, V.A.Turchyna
Oles Honchar Dnipro National University

THE STUDY OF THE INFLUENCE OF COMBINED CHANGES IN THE INITIAL DATA ON THE OCCURRENCE OF ANOMALIES FOR RESOURCE ALLOCATION

This paper considers one of the optimization problems on graphs, namely, the problem of constructing parallel ordering of vertices. Three cases of anomalous deterioration of the value of the objective function with the simultaneous improvement of the two initial parameters are investigated. The obtained results are the basis for further study of subclasses of graphs for which such anomalies will always arise.

Keywords: anomalies, optimal parallel ordering, minimum ordering length, oriented graph.

О.О. Малієнко, В.А. Турчина
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ КОМБІНОВАНИХ ЗМІН ПОЧАТКОВИХ ДАНИХ НА ВИНИКНЕННЯ АНОМАЛІЙ ПРИ РОЗПОДІЛІ РЕСУРСІВ

Питання розподілу ресурсів стало актуальне з появою потужних обчислювальних систем, локальних корпоративних і зовнішніх комунікаційних мереж, технологій пошуку та багатовимірного аналізу даних, розвитком веб-технологій та інформаційних потоків. Застосування методів розподіленої обробки даних стало особливо актуальним для високотехнологічних географічно розподілених компаній, діяльність яких підтримується і супроводжується сучасними інформаційними технологіями і системами. Зокрема, коли на послідовність обробки накладається відношення часткового порядку. У цьому випадку виникають деякі непередбачувані ситуації, які названі у роботі аномаліями.

При моделюванні зв'язків між частково упорядкованими даними ефективно використовувати апарат теорії графів. У таких формулюваннях частковий граф може служити моделлю часткового порядку. Тоді, відповідні задачі оптимізації на таких орієнтованих графах є математичними моделями, аналіз яких дозволяє знайти оптимальні розв'язки.

У даній роботі розглядається одна із оптимізаційних задач на графах, до якої можуть бути зведені деякі практичні проблеми, а саме: задача побудови паралельного упорядкування вершин. Задана скінчена множина робіт, бажана послідовність їх виконання та скінчена множина виконавців. На порядок виконання робіт задані технологічні обмеження та відомий час виконання кожної роботи. Для цієї задачі досліджуються три випадки появи аномального погіршення значення цільової функції при одночасному покращенні двох вихідних параметрів (зменшення часу виконання робіт, послаблення обмежень на порядок робіт, збільшення кількості виконавців або зміна списку пріоритетів). Отримані результати є основою для подальшого дослідження підкласів графів, для яких такі аномалії будуть завжди виникати та випадки, коли вони не матимуть впливу на оптимальність розв'язку.

Ключові слова: аномалії, оптимальне паралельне упорядкування, мінімальна довжина упорядкування, орієнтований граф.

О.О. Малиенко, В.А. Турчина
Днипровский национальный университет имени Олеся Гончара

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ КОМБИНИРОВАННЫХ ИЗМЕНЕНИЙ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ НА ВОЗНИКНОВЕНИЕ АНОМАЛИЙ ПРИ РАСПРЕДЕЛЕНИИ РЕСУРСОВ

В данной работе рассматривается одна из оптимизационных задач на графах, а именно: задача построения параллельного упорядочивания вершин. Для неё исследуются три случая появления аномального ухудшения целевой функции при одновременном улучшении двух исходных параметров. Полученные результаты являются основой дальнейшего исследования подклассов графов, для которых такие аномалии будут всегда возникать.

Ключевые слова: аномалии, оптимальное параллельное упорядочивание, минимальная длина упорядочивания, ориентированный граф.

Introduction. The question of determining the optimal order of execution of a certain number of partially ordered tasks in the presence of certain restrictions is of both theoretical and practical interest. Restrictions can relate to the availability of certain resources (performers, processors, etc.) and the time to complete tasks. Such problems arise in many application areas, which include: research of communication networks, management systems, design of complex communication systems, research of transport and information flows and such human spheres of life as determination of the sequence of work performed by employees, issues of assembly line management, etc.

A partial graph can serve as a partial order model. Then the corresponding optimization problems on such oriented graphs are mathematical models, the analysis of which allows to find optimal solutions.

In the classical formulation, this task corresponds to the definition of the order of work that requires the same amount of time, a certain number of performers (and it is believed that each performer can perform any work). But in practice, this situation is quite rare. It is much more common to determine the optimal order of the same type of work, which requires different amounts of time to be performed, or have the same number of performers at each time, or when the work is not of the same type and can be divided into several groups. In addition, along with the partial order ratio, additional desirable preferences for the order of execution may be set, which do not violate this relationship. Such practical tasks correspond to the generalization of classical formulations of problems.

One of the problems in solving classical and generalized problems is the presence of situations that can be considered as anomalies. That is, such cases when the change of input parameters of the problem, which for logical reasons should reduce the optimal value of the objective function, or at least not worsen it, leads to its increase. For example, increasing the total execution time by reducing the execution time of individual tasks, or the presence in the digression of transitive, uninformative arcs, which affect the optimality of the solution obtained by some algorithm.

Problem Statement. We can formulate some of these problems in the language of graph theory. Suppose you have a set V consisting of a finite number of elements $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Definition 1. The linear order S of the elements of the set $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ is the arrangement of these elements in n places that are arranged in the linear order, in which each element is only in one place (some places may be empty) [3].

Denote by $S[i]$ the set of vertices that are in order S in the i th place.

Definition 2. The width of the ordering S is called the value $h(S) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} |S[i]|$.

Since, by definition, some places in the order may be empty, let`s suppose they are located to the right of non-empty spaces.

Definition 3. The length of the ordering S is a value $l(S)$ equal to the number of non-empty spaces in the ordering.

The oriented graph $G = \{V, U\}$ is given. The following definitions can be formulated.

Definition 4. The parallel ordering of vertices of an oriented graph $G = \{V, U\}$ is a linear ordering S of elements of a set of the vertices $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, in which it follows from the fact that from the vertex v_i there is an arc to the vertex v_j, is the fact that the vertex v_i is in the order to the left of the vertex v_j. As follows, if $(v_i, v_j) \in U$ and $v_i \in S[p]$ and $v_j \in S[q]$, then $p < q$ [3].

Obviously, in order for a parallel order to exist, it is necessary that the oriented graph is acyclic.

Among the optimization problems associated with the construction of the optimal orderings, the most studied problem is the one of construction on a given graph G and a given width h, a parallel ordering of the minimum length l. Denote it as problem 1.

In applied problems, the execution time of tasks is often different, so consider the generalization of problem 1, when a weighted graph is given. The weight of the vertex is the time τ_i of the corresponding work with the number i. Denote this problem as problem 2.

Definition 6. We call the generalized parallel ordering, built up with fixed given parameters of the problem, the initial ordering S^*. We will say that there is an anomaly in solving a problem, if after changing the input parameters, which should intuitively improve the solution, the length of the obtained ordering is greater than the length of the initial ordering.

For problem 2, consider the following input data:

1) an oriented graph $G = \{V, U\}$ that specifies the connections between the vertices;

2) h width of the ordering under construction;

3) $T = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$ scales of vertices;

4) L list of priorities.

The result obtained in the problem under consideration is the value of the objective function, namely the length of the constructed parallel ordering.

In analyzing this problem, Ronald Graham [1] considered the anomalies that can be detected by the following changes in the parameters:

1) Reducing the weights of all vertices $T = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$ or the weight of a number of vertices (arbitrarily or by a certain constant);

2) removing the arc from the oriented graph $G = \{V, U\}$. In practice, this corresponds to the case when the dependence between works weakens. That is, restrictions on the order of performance of a certain number of works are removed;

3) increasing the width h of the order under construction. In practice, this corresponds to the case when an additional resource is used to perform the work (worker, machine, etc.);

4) changing the list of priorities L. Note that the list of priorities is the most ambiguous parameter of the problem, because there are no restrictions on its task, while the optimality of solving the problem to some extent depends on how successful this choice will be.

In [2], the emergence of anomalies in improving the above parameters was illustrated by example. And also, the generalization of several cases is considered, namely rising of anomalies at simultaneous realization of several conditions:

1) increasing the width h and changing the list of priorities L;

2) reducing the weight of some vertices from $T = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$ and removing the arc from the original oriented graph;

3) removing the arc from the original oriented graph and increasing the width h.

Consider now other cases:

1) increasing the width h and decreasing the weights of the vertices $T = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$;

2) changing the list of priorities L and reducing the weights of the vertices $T = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$;

3) removing the arc from the original graph and changing the priority list L.

Example 1. A graph G_1 (fig. 1) is given, a list of priorities L=(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10), h=3. The weight of each vertex is τ_i. Each vertex in the figure is denoted as "i/τ_i"
("a vertex number/a vertex weight").

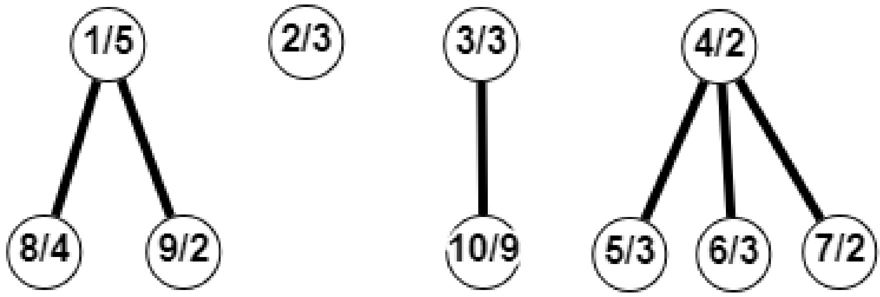

Figure 1. Graph G_1

The optimal ordering is given in table 1.

Table 1

Optimal ordering for graph G_1

1	1	1	1	1	5	5	5	7	7	9	9
2	2	2	4	4	6	6	6	8	8	8	8
3	3	3	10	10	10	10	10	10	10	10	10

The length of the optimal ordering l = 12.

1) Let $h' = h + 1$. We reduce the time of work. Set the weight of some vertices as follows:

$$\tau_i' = \tau_i - 1,$$

where τ_i' is the new weight of each vertex. Denote the graph as G_2 (fig. 2).

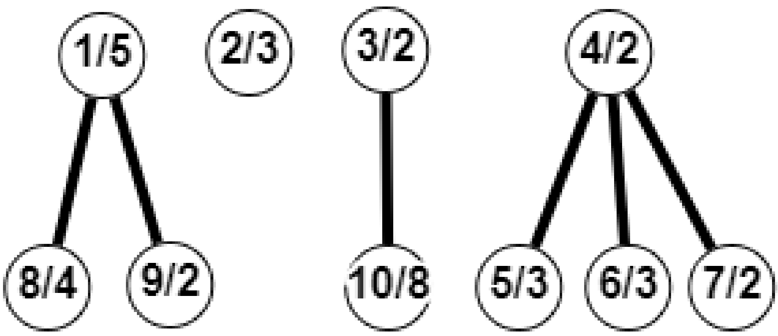

Figure 2. Graph G_2

Find the optimal ordering (table 2):

Table 2

Optimal ordering for graph G_2

1	1	1	1	1	8	8	8	8				
2	2	2	7	7	9	9						
3	3	5	5	5	10	10	10	10	10	10	10	10
4	4	6	6	6								

The length of this ordering l = 13. That is, with the reduction of the time of some works and the increase in the number of performers, the total time of all works increased.

2) Let L'=(1,2,4,3,5,6,7,8,9,10). We reduce the time of all works. Denote the graph as G_3 (fig. 3).

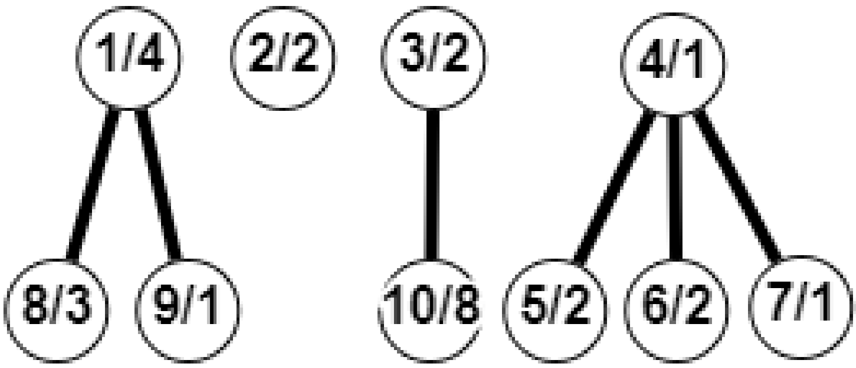

Figure 3. Graph G_3

The optimal ordering is given in table 3.

Table 3

Optimal ordering for graph G_3

1	1	1	1	7	9							
2	2	5	5	8	8	8						
4	3	3	6	6	10	10	10	10	10	10	10	10

The length of the ordering increases, l = 13.

3) Let L'=(1,2,3,5,4,6,7,8,9,10). Weaken technological constraints by removing the arc (fig. 4). Denote the graph as G_4.

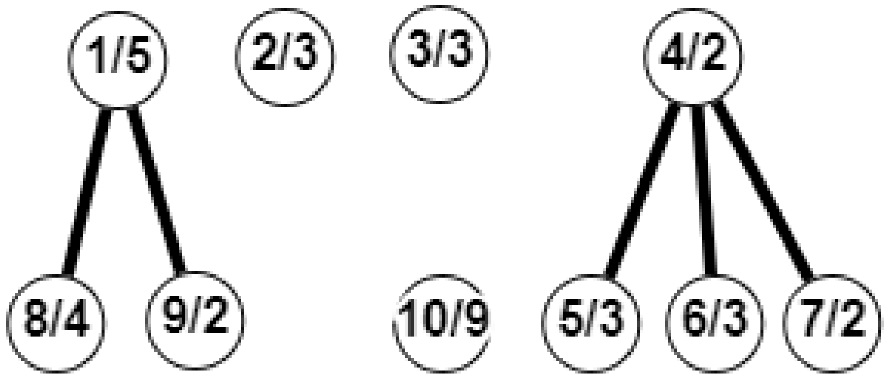

Figure 4. Graph G_4

Find the optimal ordering (table 4):

Table 4

Optimal ordering for graph G_4

1	1	1	1	1	6	6	6	10	10	10	10	10	10	10	10	10
2	2	2	5	5	5	8	8	8	8							
3	3	3	4	4	7	7	9	9								

The length l = 17, that is 41.7% worse than the optimal result.

Further research is needed to obtain the conditions imposed on the graphs and parameters under which anomalies will always arise. As well as obtaining a priori quantitative estimates of the deterioration of the solution.

References

1. Graham R. L. Bounds on multiprocessing timing anomalies. *SIAM J. Appl. Math*. 1969. V. 17. P. 416–429.

2. Турчина В. А., Федоренко Н. К. Исследование влияния транзитивных дуг на оптимальность некоторых алгоритмов параллельного упорядочения. *Проблемы управления и информатики*. 2012. №1. С. 62-69.

3. Челпанова О.О., Турчина В.А. Узагальнення аномальних випадків у задачах упорядкування. *Питання прикладної математики та математичного моделювання*. Д., 2021. С. 220-226.

Received 05.09.2022.