УДК 519.8

О.М. Кісельова, П.В. Сьомчина
Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

НЕПЕРЕРВНА НЕЧІТКА ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИНИ З РОЗТАШУВАННЯМ ЦЕНТРІВ

Представлена неперервна задача оптимального розбиття множини без обмежень з відшуканням центрів в умовах невизначеності. В якості невизначеності розглядається нечітке розбиття. Реалізовано алгоритм розв'язання задачі, наведено приклади.

Представлена непрерывная задача оптимального разбиения множества без ограничений с отысканием центров в условиях неопределенности. В качест-ве неопределенности рассматривается нечеткое разбиение. Реализован алгоритм решения задачи, приведены примеры.

The continuous set partitioning problem without constrains and with centers' searching in conditions of uncertainty was presented. Fuzzy partition was considered as an uncertainty. Algorithm solving this problem was implemented, examples were shown.

Ключові слова: оптимальне розбиття множин, функція приналежності, нечітке розбиття.

Вступ. Вимога знаходження однозначного (чіткого) розбиття елементів множини Ω з E_N може виявитися досить грубою і жорсткою при вирішенні задач з погано або слабо структурованою вихідною інформацією, тобто задач, в яких невизначеність має нечітко-ймовірносну природу. Ослаблення цієї вимоги здійснюється за рахунок введення в розгляд нечіт-ких підмножин множини і відповідних їм функцій приналежності, що приймають значення з відрізка [0; 1] [1; 4; 8].

Постановка задачі. Нехай Ω з E_N – обмежена, вимірна за Лебегом, опукла множина. Через $\Re_\Omega^N$ позначимо клас усіх можливих нечітких розбиттів $\Re_\Omega^N$ чіткої множини Ω на N нечітких підмножин. Введемо на множині можливих нечітких розбиттів цільовий функціонал $(F:\Re_\Omega^N \to R^1)$ у вигляді

$$F(\Omega_1,\ldots,\Omega_N)=\sum_{k=1}^{N}\int_{\Omega_k}(c(x,\tau_k)+a_k)\rho(x)dx$$

де функції $c(x, \tau_i)$ – задані, дійсні, обмежені, визначені на $\Omega \times \Omega$, вимірні за x при будь-якому фіксованому $\tau_i = (\tau_i^{(1)},..., \tau_i^{(n)})$ з Ω для всіх i = 1 ,..., N; ρ (x) – задана, обмежена, вимірна на Ω функція; a_1 ,..., a_n – задані невід'єм-ні числа.

Під неперервною однопродуктовою задачею оптимального нечіткого розбиття множини з n-мірного евклідового простору E_N на нечіткі під-множини із заданим положенням «центрів» підмножин без обмежень будемо розуміти таку задачу.

Нехай заданий початковий вектор $\tau=(\tau_1,\ldots,\tau_N), \quad \tau_i \in \Omega, \forall i=\overline{1,N}$, який будемо інтерпретувати як вектор центрів N нечітких підмножин деякого нечіткого розбиття з $\Re_\Omega^N$. Знайти таке нечітке розбиття $\Re(\Omega)=\{\Omega_i: \Omega_i \subseteq \Omega, \quad \forall i=\overline{1,N}\}$ множини Ω з безлічі розбиттів $\Re_\Omega^N$, яке є рішенням наступної задачі оптимального нечіткого розбиття:

$$F(\Omega_1,\ldots,\Omega_N)=\sum_{k=1}^{N}\int_{\Omega_k}(c(x,\tau_k)+a_k)\rho(x)dx \to \min_{(\Omega_1,\ldots,\Omega_N)\in\Re_\Omega^N}$$

Тут під «мінімізацією» будемо розуміти вибір нечіткого розбиття, якому відповідає в деякому сенсі найкраще нечітке значення цільового функціонала.

Для того, щоб мати можливість ідентифікувати нечітке розбиття $(\Omega_1,\ldots,\Omega_N)$ множини Ω, потрібно знати вектор-функцію приналежності виду:

$$\mu(x)=(\mu_1(x),\ldots,\mu_N(x)), \quad x\in\Omega$$

Переформулюємо задачу в термінах функцій приналежності.

Знайти пару елементів $(\mu^*(x),\tau^*)$, таку, що:

$$I(\mu_1(x),\ldots,\mu_N(x),\tau_1,\ldots,\tau_N)=$$

$$=\int_\Omega\sum_{k=1}^{N}(\mu_k(x))^m(c(x,\tau_k)+a_k)\rho(x)dx \to \min_{\mu(x)\in M,\tau_k\in\Omega}, \qquad (1)$$

де

$$\sum_{k=1}^{N} \mu \;(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega\}$$

m – параметр, який називається експоненціальною вагою. Чим більше m, тим кінцева матриця нечіткого розбиття стає більш «розмазаною», і при m→∞ вона прийме вигляд μ=[1/N], що є дуже поганим рішенням, тому що всі об'єкти належать до всіх підмножин з однаковим ступенем. На сьогодні не існує теоретично обґрунтованого правила вибору значення експонен-ціальної ваги. Зазвичай встановлюють m=2.

Для інтерпретації отриманих результатів, а саме віднесення кожного вузла сітки до якої-небудь підмножини, або до нечіткого кордону, введемо наступне допоміжне поняття ступеня недовіри СН.

Ступінь недовіри $CH \in [0;1]$ – це мінімальне значення функції приналежності деякої нечіткої множини, при якому дана точка може бути з упевненістю віднесена до цієї нечіткої множини, іншими словами, при якому ми вважаємо, що дана точка належить даній множині [2; 3; 6].

Очевидно,

$$I(\mu_1(x),..., \mu_N(x), \tau_1,..., \tau_N) = \min_{\tau \in \Omega^N}\left(\min_{\mu(\bullet)\in M} I(\mu(\bullet), \tau)\right). \qquad (2)$$

Зауважимо, що при кожному фіксованому $\tau \in \Omega^N$, внутрішня задача – це задача $\mathcal{A}1$, яка, як встановлено в [6], може бути глобально вирішена (М – замкнута, обмежена й опукла множина гільбертого простору L^2_Ω, функціонал $F(\mu(x)) = \int_\Omega \sum_{k=1}^{N} (\mu(x))^m (c(x, \tau_k) + a_k)\rho(x)dx$ – безперервний і для m=2 опуклий на М, тоді в силу узагальненої теореми Вейєрштрасса F досягає на М своєї нижньої межі) [5].

Зауважимо, що зовнішня задача (2) є кінченновимірною задачею по τ, в той час, як внутрішня задача з (2) - нескінченновимірна по μ.

Підводячи підсумки, рішення для першої компоненти $\mu_*(\bullet)$ оптимального рішення $(\mu_*(\bullet), \tau_*)$ задачі $\mathcal{A}2$ отримано для кожного фіксованого τ (див. рис. 1). Для відшукання ж другої компоненти $\tau_* = (\tau_{*1},..., \tau_{*N})$ оптимального рішення будемо вирішувати задачу кінченновимірної оптимізації, цільова функція якої є в загальному випадку багатоекстремальною недиференційною функцією.

Сформулюємо алгоритм рішення однопродуктової нечіткої задачі оптимального розбиття множини (ОРМ) без обмежень з відшуканням центрів підмножин, тобто задачу $\mathcal{A}2$, в основі якої лежать алгоритм вирішення безперервної нечіткої задачі ОРМ з фіксованими центрами і один з варіантів методу узагальнених градієнтів (або так званий r-алгоритм), орієнтований у загальному випадку на відшукання локальних мінімумів недиференційної багатоекстремальної цільової функції задачі $\mathcal{A}2$.

Формула для розрахунку градієнта по τ для випадку, коли Ω - двовимірний простір

$$grad_\tau = \begin{pmatrix} \int_\Omega \rho(x) \frac{-(x-\tau_1^x)}{\sqrt{(x-\tau_1^x)^2 + (y-\tau_1^y)^2}} \mu_1^m(x) \\ ... \\ \int_\Omega \rho(x) \frac{-(y-\tau_N^y)}{\sqrt{(x-\tau_N^x)^2 + (y-\tau_N^y)^2}} \mu_N^m(x) \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

На рисунках 1, 2 представлено алгоритми розв'язання задач $\mathcal{A}1$ та $\mathcal{A}2$.

Результати роботи. Опишемо результати чисельних експерементів рішення задачі $\mathcal{A}2$ для одиничного квадрата з E_2 з евклідовою метрикою, з сіткою 50 х 50. Алгоритм було реалізовано на мові програмування С++, графічна інтерпретація результатів виконана засобами Matlab [7].

На рисунках, наведених нижче, центр підмножини, який було знайдено, позначений «+».

Приклад 1. Розбиття одиничного квадрата на три нечітких підмножини при рівних між собою a_i, i = 1, 2 та рівномірному попиті ρ.

Таблиця 1

Початкові дані для розбиття на дві підмножини

№ підмножини	a_i	Точність
1	0	0,001
2	0	

Таблиця 2

Результати розбиття на дві підмножини

Значення центрів підмножин		Значення функціонала	Кількість ітерацій
0,25	0,5	0,1884	26
0,75	0,5		

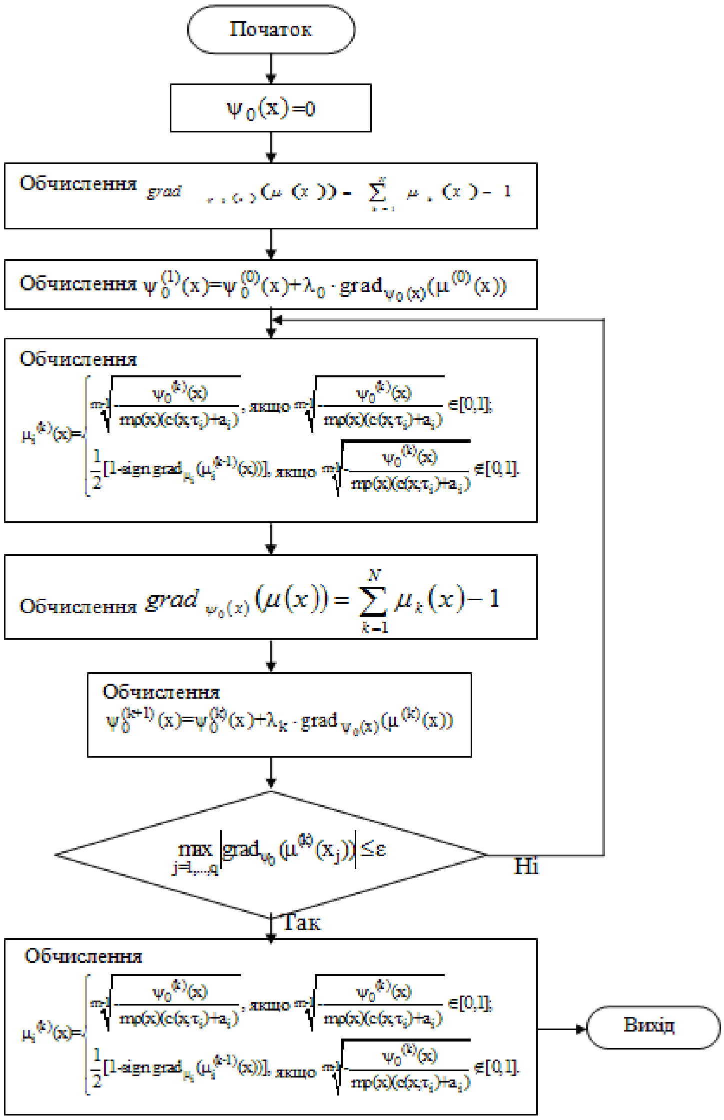


Рис. 1. Алгоритм розв’язання неперервної нечіткої задачі оптимального розбиття множини з фіксованими центрами підмножин

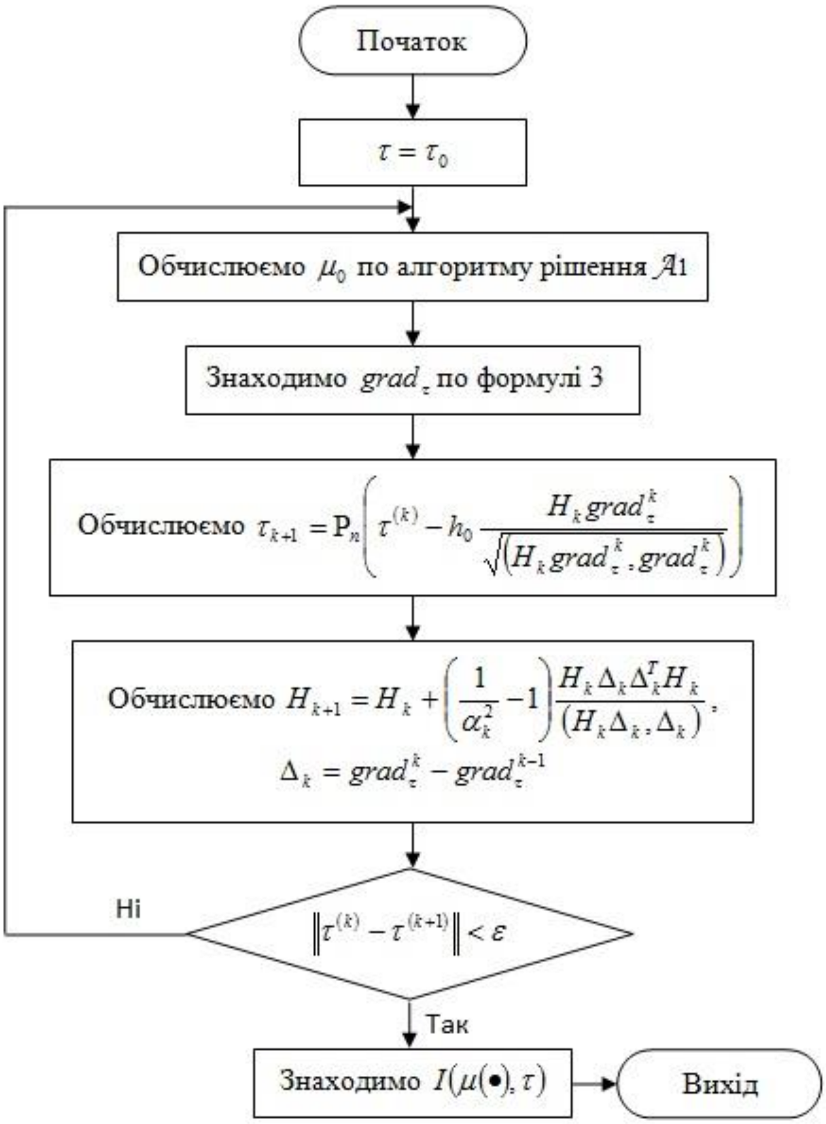


Рис. 2. Алгоритм розв'язання неперервної нечіткої задачі оптимального розбиття множини з відшуканням центрів підмножин

Графічна ілюстрація:

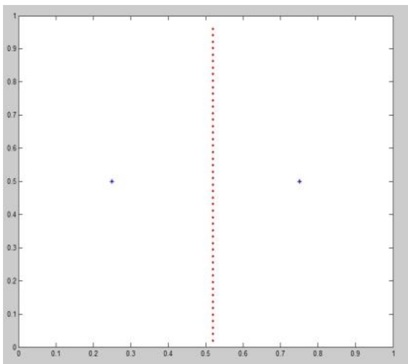


Рис. 3. Нечітке розбиття на дві підмножини (CH=0,0)

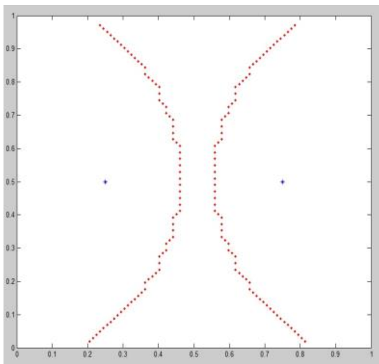


Рис. 4. Нечітке розбиття на дві підмножини (CH=0,6)

Як видно з рисунка 3, нечітке розбиття при CH=0,0 співпадає з чітким. При підвищенні ступеня недовіри (рис. 4) рамки нечіткого кордону розширюються, форма чітких областей наближається до кола. Це можна пояснити логічно: чим ближче вузол до центру, тим з більшою ймовірністю його можна віднести до даної підмножини. Ця думка підтверджується тим, що знайдені значення функцій приналежності дійсно збільшуються за мірою наближення до центру.

Приклад 2. Розбиття одиничного квадрата на три нечітких підмножини при нерівних між собою a_i, $i = 1, 2, 3$ та рівномірному попиті ρ.

Таблиця 3

Початкові дані для розбиття на три підмножини

№ підмножини	a_i	Точність
1	0	0,001
2	0,2	
3	0	

Таблиця 4

Результати розбиття на дві підмножини

Значення центрів підмножин		Значення функціонала	Кількість ітерацій
0,503	0,206	0,1512	40
0,766	0,694		
0,229	0,691		

Графічна ілюстрація:

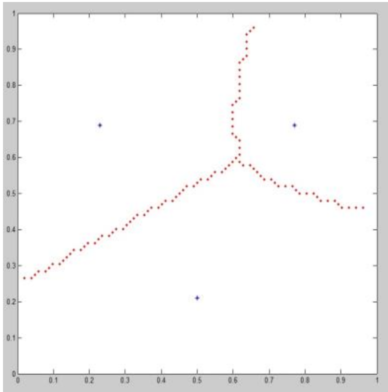


Рис. 5. Нечітке розбиття на три підмножини (CH=0,0)

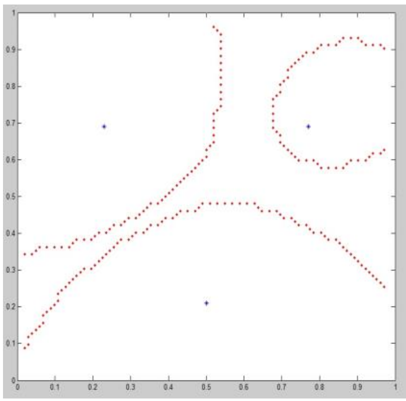


Рис. 6. Нечітке розбиття на три під-множини (CH=0,45)

Цікавими є відозміни форми областей підмножин. Тепер на їх конфігурацію впливає дві криві: коло та гіпербола одночасно.

Приклад 3. Розбиття одиничного квадрата на десять нечітких підмножин при нерівних між собою a_i=0, i = 1, ..., 10, a_2=0,2, a_9=0,25 та рівномірному попиті ρ.

Таблиця 5

Результати розбиття на три підмножини

Значення центрів підмножин		Значення функціонала	Кількість ітерацій
0,839	0,500	0,0414	121
0,500	0,628		
0,500	0,362		
0,499	0,883		
0,840	0,165		
0,160	0,500		
0,840	0,835		
0,161	0,165		
0,160	0,834		
0,500	0,112		

Графічна ілюстрація:

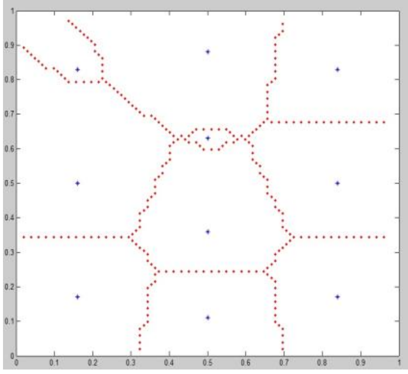


Рис. 7. Нечітке розбиття на десять підмножин (СН=0,0)

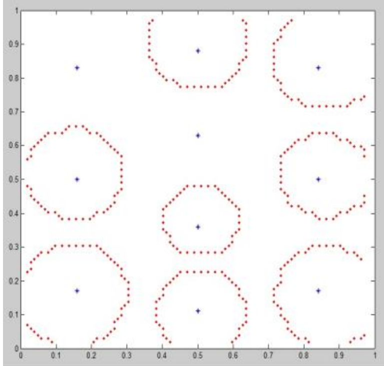
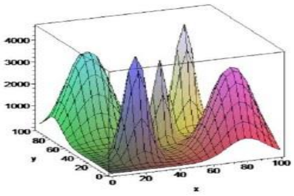


Рис. 8. Нечітке розбиття на десять підмножин (СН=0,3)

Як видно з рисунка 8, при підвищенні ступеня недовіри до підмножин 2 та 9 не увійшло жодної точки, що можна пояснити значеннями параметра а.

Приклад 4. Розбиття одиничного квадрата на п'ятнадцять нечітких під-множин при рівних між собою a_i, і = 1, ..., 15 та нерівномірному попиті ρ.

Попит задано функцією:



$$\rho(x) = K_0 + \frac{920623413}{2000000} \sum_{t=1}^{5} K_{1t} \exp[-\frac{1}{1000} \times$$
$$\times \left(K_{2t}\|x - x_t\| - K_{3t}\right)\|x - x_t\|]$$
$$K_0 = 5, K_1 = [10,10,8,8,8], K_3 = [20,30,10,10,10].$$
$$x_t = [(75,75),(25,25),(50,50),(20,80),(80,20)].$$

Таблиця 6

Результати розбиття на п'ятнадцять підмножин

Значення центрів підмножин		Значення функціонала	Кількість ітерацій
1	2	3	4
0,87	0,294	15,55	164
0,352	0,834		
0,715	0,281		
0,111	0,891		
0,242	0,911		
0,872	0,134		
0,088	0,762		
0,162	0,649		
0,212	0,269		
0,715	0,128		
0,212	0,788		
0,303	0,695		
0,75	0,75		
0,5	0,499		
0,291	0,23		

Закінчення таблиці 6

Графічна ілюстрація:

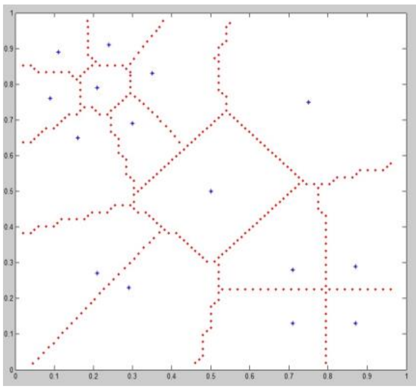


Рис. 9. Нечітке розбиття на п’ятнадцять підмножин (СН=0,0)

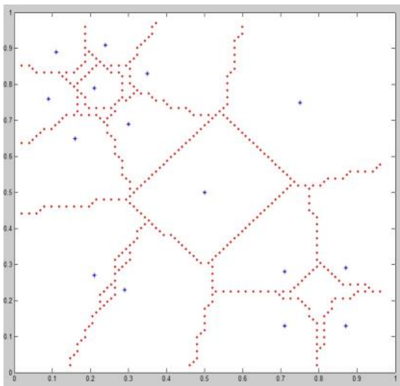


Рис. 10. Нечітке розбиття на п’ят-надцять підмножин (СН=0,06)

Висновки. Реалізовано алгоритм рішення неперервної нечіткої задачі оптимального розбиття множини без обмежень з відшуканням центрів. Для різних значень коефіцієнтів a_i проведені чисельні експерименти. Також представлені результати для рівномірного та нерівномірного попиту ρ.

При підвищенні ступеня недовіри рамки нечіткого кордону розширюються, форма чітких областей наближається до кола.

Розбиття, представлені на рис. 3, 5, 7, 9 (ступінь недовіри дорівнює 0), повторює результат, отриманий для випадку чіткого розбиття. Відзначимо, що це досить вагомий результат, адже ні метод рішення, ні сам функціонал, який є нелінійним, не повторюють ідейно задання і методів для чіткого розбиття. При підвищенні ступеня недовіри області підмножин деформуються.

При досить низькому ступеню недовіри, першими в область нечіткого кордону потрапили точки, що знаходяться між всіма множинами відразу.

Коефіцієнт a впливає на нечітке розбиття: чим більше значення коефіцієнта a_i, тим менша область належить даній підмножині.

Попит ρ впливає на положення шуканих центрів: скупчення цетрів під-множин відповідають максимальним значенням ρ.

Бібліографічні посилання

1. **Бочарников В.П.** Fuzzy-технология: Математические основы. Практика моделирования в экономике / В.П. Бочарников. – СПб., 2001. – 328 с.
2. **Васильев Ф.П.** Лекции по методам решения экстремальных задач / Ф.П. Васильев. – М., 1974. – 376 с.
3. **Васильев Ф.П.** Методы решения экстремальных задач / Ф.П. Василь-ев. – М., 1981. – 400 с.
4. **Заде Л.А.** Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближённых решений /Л.А. Заде. – М., 1976. – 167 с.
5. **Канторович Л.В.** Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М., 1977. – 742 с.
6. **Киселева Е.М.** Математические методы и алгоритмы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств и их приложения: автореф. дис. на здобуття наукового ступеня д-ра физ.-мат. наук: 01.01.09 / Е.М. Киселева // Ин-т кибернетики АН Украины им. В.М. Глушкова. – К. – 1991. – 33 с.
7. **Леоненков А.В.** Нечёткое моделирование в среде MATLAB и fuzzy TECH /А.В. Леоненков. – СПб., 2003. – 736 с.
8. **Орловский С.А.** Проблемы принятия решений при нечёткой исходной информации /С.А. Орловский. – М., 1981. – 206 с.

Надійшла до редколегії 25.04.2012