УДК 519.8 doi: 10.15421/322202

А.Ф. Булат[1], **О.М. Кісельова**[2], **Л.Л. Гарт**[2], **О.М. Притоманова**[2]
[1] *Інституті геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України,*
[2] *Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДВОЕТАПНИХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗМІЩЕННЯ-РОЗБИТТЯ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Досліджено математичні моделі та підходи до розв'язання двоетапних задач оптимального розміщення-розбиття з нечіткими початковими даними. Ці задачі узагальнюють, з одного боку, класичні скінченновимірні транспортні задачі на випадок, коли обсяги виробництва (зберігання, переробки) в заданих пунктах невідомі заздалегідь та відшукуються як розв'язок відповідної неперервної задачі оптимального розбиття множини споживачів (постачальників неперервно розподіленого ресурсу) на сфери обслуговування їх цими пунктами; з іншого боку, вони узагальнюють дискретні двоетапні виробничо-транспортні задачі на випадок неперервно розподіленого ресурсу.

Ключові слова: нескінченновимірна транспортна задача, задача оптимального розподілу-розбиття, нечіткі параметри, нейронечіткі технології.

A.F. Bulat[1], **O.M. Kiselyova**[2], **L.L. Hart**[2], **O.M. Prytomanova**[2]
[1] *M.S. Polyakov Institute of Geotechnical Mechanics, NAS of Ukraine,*
[2] *Oles Honchar Dnipro National University*

MATHEMATICAL MODELS OF TWO-STAGE PROBLEMS OF OPTIMAL LOCATION-PARTITIONING UNDER UNCERTAINTY

Currently, the term logistics is widely used in business and economic activity. It defines the theory and practice of moving raw materials, materials, production, labor and financial resources, finished products from source to consumer. Most logistical problems are usually studied under conditions of certainty; however, real situations for which logistical models are created are most often characterized by a certain degree of uncertainty. In these options, the quality of decisions made in the optimization logistic models is directly dependent on the completeness of taking into account all uncertain causes. Therefore, it is relevant to study logistical problems in cases where some parameters included in the description of the model are fuzzy, inaccurate, underdetermined, or there is an unreliable mathematical description of some dependencies in the model, and the like.

In this paper, the most common logistical problems are considered: transportation and optimal location-partitioning ones. Particular attention is paid to mathematical models and approaches to solving two-stage continuous-discrete problems of optimal location-partitioning. These problems are characterized by the presence of two stages and consist in determining the zones of collecting a continuously allocated resource (raw materials) by the enterprises of the first stage and the volume of transportation of the processed product from the enterprises of the first stage to consumers (points of the second stage) in order to minimize the total cost of transporting the resource from suppliers through processing (collection, storage) points to consumers. Two-stage continuous-discrete problems of

optimal partitioning-allocation, on the one hand, generalize the classical finite-dimensional transportation problems for the case when the volumes of production (storage, processing) at given points are unknown in advance and are found as a solution to the corresponding continuous problem of optimal partitioning of the set of consumers (suppliers of a continuously allocated resource) into areas served by these points; on the other hand, they generalize discrete two-stage production-transportation problems to the case of a continuously allocated resource.

The paper studies two-stage continuously discrete optimal partitioning-allocation problems with fuzzy initial data. The solution of two-stage problems of optimal partitioning-allocation is based on a unified approach, which consists in reducing the original infinite-dimensional problems of optimal partitioning-allocation to non-smooth, as a rule, finite-dimensional optimization problems, for the numerical solution of which effective methods of undifferentiated optimization – Shor's algorithms – are used. The method and algorithm for solving a two-stage continuous-discrete problem of optimal partitioning-allocation with fuzziness in the objective functional are based on the principle that first, to restore the exact values of fuzzy parameters in the objective functional, the neurolinguistic identification method is used. Then the optimal partition is found using the methods of the theory of optimal set partitioning and the method of potentials for solving the transportation problem.

Keywords: infinite-dimensional transportation problem, optimal partitioning-allocation problem, fuzzy parameters, neuro-fuzzy technologies.

А.Ф. Булат[1], Е.М. Киселева[2], Л.Л. Гарт[2], О.М. Притоманова[2]
[1] *Институт геотехнической механики им. М.С. Полякова НАН Украины,*
[2] *Днипровский национальный университет имени Олеся Гончара*

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВУХЭТАПНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ-РАЗБИЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Исследованы математические модели и подходы к решению двухэтапных задач оптимального размещения-разбиения с нечеткими исходными данными. Эти задачи обобщают, с одной стороны, классические конечномерные транспортные задачи на случай, когда объемы производства (хранения, переработки) в заданных пунктах неизвестны заранее и отыскиваются как решение соответствующей непрерывной задачи оптимального разбиения множества потребителей (поставщиков непрерывно распределенного ресурса) на сферы обслуживания их этими пунктами; с другой стороны, они обобщают дискретные двухэтапные производственно-транспортные задачи на случай непрерывно распределенного ресурса.

Ключевые слова: бесконечномерная транспортная задача, задача оптимального распределения-разбиения, нечеткие параметры, нейронечеткие технологии.

Вступ. В даний час термін *логістика* широко використовується в бізнесі та визначає теорію і практику переміщення сировини, матеріалів, виробничих, трудових та фінансових ресурсів, готової продукції від їхнього джерела до споживача. Основна мета логістики – забезпечити наявність необхідного продукту у необхідній кількості, у необхідному стані, у необхідному місці, у необхідний час та за прийнятною для споживача ціною і з мінімальними для підприємства витратами. У ряді випадків задачу зниження витрат у конкретній області можна формалізувати шляхом зведення її до однієї з відомих логістичних моделей із застосуванням математичних методів розв'язання задач такого класу і таким чином отримати її оптимальний розв'язок.

До найбільш застосовуваних на практиці логістичних моделей належать транспортні моделі. Метою розв'язання транспортної задачі є знаходження такого плану перевезень продукції, за якого загальні транспортні витрати були б найменшими. Така задача та її математична модель вперше була сформульована у 1942 р. Ф. Хічкоком у його статті «Distribution of a product from several sources to numerous localities». З часом сфера застосування транспортної моделі розширювалася, а сама модель вдосконалювалася та інтегрувалася з іншими моделями, передусім з моделями сфери виробництва. Йдеться, наприклад, про виробничо-транспортні задачі, як задачі планування розвитку та розміщення підприємств [1]; про багатоетапні транспортні задачі, коли продукція від постачальників до споживачів надсилається через деякі проміжні пункти [2]; про нескінченновимірні транспортні задачі, тощо.

Відзначимо, що переважна більшість логістичних задач досліджувалася в умовах визначеності. Однак реальні ситуації, для яких створюються логістичні моделі, найчастіше характеризуються деяким ступенем невизначеності. У цих випадках якість прийнятих рішень в оптимізаційних логістичних моделях знаходиться в прямій залежності від повноти урахування всіх невизначених факторів, суттєвих для наслідків від прийнятих рішень. Тому актуальною є розробка логістичних задач не тільки в умовах визначеності, а й у випадках, коли або окремі параметри, що входять до опису моделі, є нечіткими, неточними, недовизначеними, або є недостовірний математичний опис деяких залежностей в моделі та ін.

У цій статті розглянуто окремі постановки логістичних транспортних задач, задач розміщення-розбиття (location-allocation), у тому числі й в умовах невизначеності, а також підходи до їх розв'язання із застосуванням синтезу теорії оптимального розбиття множин (ОРМ) та нейронечітких технологій.

Постановка задачі. Транспортні моделі часто описують переміщення (перевезення) будь-якого товару з пункту відправлення (початковий пункт, наприклад, місце виробництва) до пункту призначення (склад, магазин, сховище). Призначення транспортної задачі – визначити обсяг перевезень із пунктів відправлення до пунктів призначення з мінімальною сумарною вартістю перевезень. При цьому повинні враховуватися обмеження, що накладаються на обсяги вантажів, що є у пунктах відправлення (пропозиції), та обмеження, що враховують потребу вантажів у пунктах призначення (попит). У транспортній моделі передбачається, що вартість перевезення за будь-яким маршрутом прямо пропорційна обсягу вантажу, що перевозиться цим маршрутом. У загальному випадку транспортну модель можна використовувати для опису ситуацій, пов'язаних з управлінням запасами, управлінням рухом капіталів, складанням розкладів, призначенням персоналу та ін.

На рис. 1 зображено загальне подання транспортної задачі у вигляді мережі з m пунктами відправлення і n пунктами призначення, які показані у вигляді вузлів мережі. Дуги, що з'єднують вузли мережі, відповідають маршрутам, що зв'язують пункти відправлення та призначення. З дугою (i, j), що з'єднує пункт відправлення i з пунктом призначення j, співвідносяться два види даних: вартість c_{ij} перевезення одиниці вантажу з пункту i в пункт j і кількість x_{ij} вантажу, що перевозиться. Обсяг вантажів у пункті відправлення i дорівнює a_i, а обсяг вантажів у пункті призначення j дорівнює b_j $(i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n)$. Задача полягає у визначенні величин x_{ij}, що мінімізують сумарні транспортні витрати $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ та задовольняють обмеження, що накладаються на обсяги вантажів у пунктах відправлення (пропозиції) та пунктах призначення (попит).

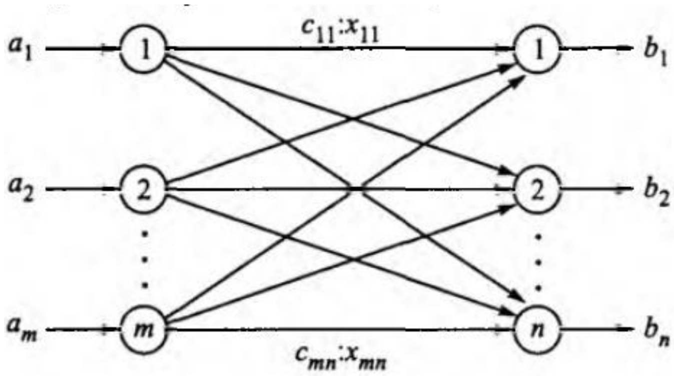

Рис. 1. Схема класичної транспортної задачі

Наведемо формальну постановку класичної транспортної задачі.

Задача 1 (*класична транспортна задача*) [3]. Знайти x_{ij}, $i=1,2,...,m$; $j=1,2,...,n$, які забезпечують

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \tag{1}$$

за обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, \quad i=1,2,...,m, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, \quad j=1,2,...,n, \tag{3}$$

$$x_{ij} \ge 0, \quad i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n, \tag{4}$$

де наведені формули мають такий сенс: цільова функція транспортної задачі прямує до мінімуму (1); загальний обсяг вантажу, що вивозиться від кожного постачальника, не повинен перевищувати його запасу (2); обсяг вантажу, який надходить кожному споживачеві, не повинен бути менше від його потреб (3); обсяги вантажу на кожному з маршрутів мають бути невід'ємними (4).

Вочевидь, транспортна задача є задачею лінійного програмування з $m \times n$ змінними і $m+n$ непрямими обмеженнями. Ідеальний випадок, коли сума можливих поставок точно дорівнює сумі потреб

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = d\ , \qquad (5)$$

приводить до так званої *закритої транспортної задачі*. В цьому випадку задача (1)-(5) допустима і розв'язувана. Хоча транспортна задача може бути розв'язана як звичайна задача лінійного програмування, її спеціальна структура дозволяє розробити алгоритм зі спрощеними обчисленнями, що базується на симплексних відносинах двоїстості, наприклад, метод потенціалів [4].

Якщо перевезення продукції виконується не безпосередньо від постачальника до споживача, а через деякі проміжні пункти, то застосовується двоетапна транспортна задача. Відповідну схему функціонування перевезень вантажу наведено на рис. 2. Проміжними пунктами можуть бути посередницькі фірми та різного роду сховища (склади).

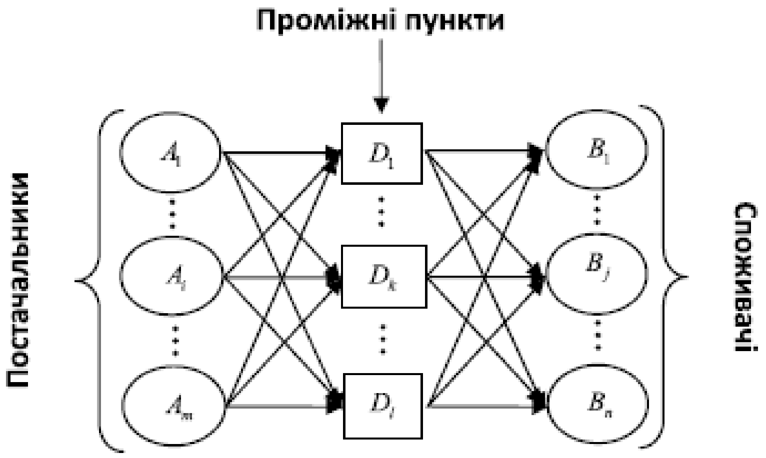

Рис. 2. Система «постачальники – проміжні пункти – споживачі» у двоетапній транспортній задачі

Нехай, як і для задачі 1, в m пунктах постачання $A_1,...,A_m$ є відповідно $a_1,...,a_m$ одиниць продукції, яку потрібно перевезти до n споживачів $B_1,...,B_n$, задовольнивши їх потреби $b_1,...,b_n$, але для транспортування продукції від постачальників для споживачів можна задіяти p проміжних пунктів $D_1,...,D_p$.

Позначимо через $x_{ik}^{(1)}$ $(i=1,2,...,m;\ \ k=1,2,...,p)$ кількість продукції, яка перевозиться від i-го пункту постачання A_i до k-го проміжного пункту D_k, а через $c_{ik}^{(1)}$ – витрати на перевезення одиниці цієї продукції. Кількість продукції, яка перевозиться з k-го проміжного пункту D_k до j-го споживача B_j позначимо через $x_{kj}^{(2)}$ $(k=1,2,...,p;\ \ j=1,2,...,n)$, витрати на перевезення одиниці цієї продукції позначимо через $c_{ik}^{(2)}$ та запишемо математичну модель задачі.

Задача 2 (*двоетапна транспортна задача*) [2]. Знайти $x_{ik}^{(1)},\ x_{kj}^{(2)},\ i=1,2,...,m;\ k=1,2,...,p;\ j=1,2,...,n$, які забезпечують

$$\min\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}c_{ik}^{(1)}x_{ik}^{(1)} + \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}c_{kj}^{(2)}x_{kj}^{(2)} \tag{6}$$

за обмежень

$$\sum_{k=1}^{p}x_{ik}^{(1)}=a_i,\quad i=1,2,...,m, \tag{7}$$

$$\sum_{k=1}^{p}x_{kj}^{(2)}=b_j,\quad j=1,2,...,n, \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ik}^{(1)}-\sum_{j=1}^{n}x_{kj}^{(2)}=0,\quad k=1,2,...,p, \tag{9}$$

$$x_{ik}^{(1)}\ge 0,\ \ x_{kj}^{(2)}\ge 0,\ \ i=1,2,...,m;\ \ k=1,2,...,p;\ \ j=1,2,...,n. \tag{10}$$

Задача (6)-(10) є задачею лінійного програмування, яка містить $m\times p+p\times n$ змінних $x_{ik}^{(1)},\ x_{kj}^{(2)}$ та $m+n+p$ непрямих обмежень. Цільова функція (6) задає сумарні витрати на транспортування продукції від постачальників до споживачів через проміжні пункти. Обмеження (7) означають транспортування усієї продукції $a_1,...,a_m$ з пунктів постачання до проміжних пунктів, а обмеження (8) означають транспортування продукції $b_1,...,b_n$, яку потрібно доставити з проміжних пунктів до споживачів. Обмеження (9) задають умови на те, щоб уся продукція, яка надходить від постачальників до кожного проміжного пункту, була обов’язково відправлена споживачам. Це визначає умови на сумісність системи обмежень лінійних рівностей та лінійних нерівностей (7)-(10). Для розв’язання двоетапної транспортної задачі застосовують різного роду спеціалізовані алгоритми [2, 3].

Необхідно відзначити, що задачі 1 і 2 є скінченновимірними. Необхідність постановки нескінченновимірних транспортних задач виникає у випадках, коли споживачів "дуже багато" і формулювання транспортної задачі як дискретної математичної моделі стає недоцільною через труднощі, пов’язані з розв’язанням задач надмірно великої розмірності. Існують також задачі, у яких множина, що розбивається на підмножини, вже від самого початку континуальна за своєю структурою.

Нескінченновимірна транспортна задача та неперервна задача оптимального розміщення-розбиття. Перші теоретичні результати та методи розв’язання нескінченновимірної транспортної задачі були опубліковані Л.В. Канторовичем у 1942 році у зв’язку з розв’язанням класичної проблеми Г. Монжа (задача про рови та насипи), сформульованою ним ще у 1784 році. У подальшому модифікації та узагальнення задачі про переміщення мас досліджувалися Л.В. Канторовичем та Г.Ш. Рубінштейном за допомогою розвиненого ними функціонально-аналітичного методу [5].

Більш загальними ніж нескінченновимірні транспортні задачі є нескінченновимірні задачі розміщення (location) підприємств з одночасним розбиттям даного регіону (множини), неперервно заповненого споживачами, на області споживачів (підмножини), кожна з яких обслуговується одним підприємством, з метою мінімізації транспортних і виробничих витрат. Оптимізаційні задачі виробничо-транспортного планування відносяться до найбільш поширеного типу логістичних задач, що виникають під час аналізу питань як довгострокового, так і поточного планування [1]. Такі задачі розміщення-розбиття (location-allocation problems) розглядаються як у неперервній, так і в дискретній постановках. У ролі споживачів тут можуть виступати й телефонні абоненти, школярі, виборці, точки зрошуваної території, пацієнти для діагностики захворювань тощо. Особливий інтерес викликають неперервні нескінченновимірні задачі розміщення-розбиття, у яких споживчий попит у сфері розміщення задається неперервною функцією щільності.

З розв'язання наступної спрощеної моделі нескінченновимірної задачі розміщення виробництва починалась розробка математичної теорії оптимального розбиття множин [6]. Нехай споживач деякої однорідної продукції рівномірно розподілений в області $\Omega \subset E_2$. Скінченна кількість N виробників цієї продукції розташовані в ізольованих точках $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}),\ i = 1,...,N$, області Ω. Вважаються заданими: $\rho(x)$ – попит на продукцію споживача з координатами $x = (x^{(1)}, x^{(2)})$; $c(x,\ \tau_i)$ – вартість транспортування одиниці продукції від виробника $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)})$ споживачеві $x = (x^{(1)}, x^{(2)})$. Передбачається, що прибуток виробника залежить тільки від його витрат, які є сумою виробничих і транспортних витрат. Для кожного i-го виробника задана функція $\varphi_i(Y_i)$, що описує залежність вартості виробництва від його потужності Y_i, яка визначається за формулою $Y_i = \int\limits_{\Omega_i} \rho(x)dx$, і зведені капітальні витрати на реконструкцію i-го виробника для збільшення його потужності від існуючої до проєктної Y_i. Множину споживачів Ω можна розбивати на зони обслуговування Ω_i споживачів i-м виробником так, щоб

$$\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega,\ \ \mathrm{mes}(\Omega_i \cap \Omega_j) = 0,\ \ i, j = 1,...,N\ (i \neq j), \tag{11}$$

де $\mathrm{mes}(\cdot)$ означає міру Лебега (не виключається, що деякі з підмножин Ω_i виявляться порожніми). При цьому потужність i-го виробника визначається сумарним попитом споживачів з Ω_i, і не перевищує заданих обсягів:

$$\int\limits_{\Omega_i} \rho(x)dx \le b_i,\quad i = 1,...,N\,. \tag{12}$$

Тут і надалі інтеграли розуміються в сенсі Лебега, а міра множини межових точок підмножин $\Omega_i,\ i = 1,...,N$ вважається рівною нулю.

Задача 3 (*нескінченновимірна задача розміщення виробництва*) [6]. Потрібно розбити множину споживачів Ω на зони обслуговування їх N виробниками, тобто на підмножини $\Omega_i,\ i = 1,...,N$, і розмістити цих виробників в Ω так, щоб мінімізувати функціонал сумарних витрат на виробництво продукції і доставку її до споживачів:

$$F(\{\Omega_1,...,\Omega_N\},\{\tau_1,...,\tau_N\}) = \sum_{i=1}^{N}\left\{ \int_{\Omega_i} c(x,\ \tau_i)\rho(x)dx + \varphi_i\left(\int_{\Omega_i} \rho(x)dx \right)\right\} \tag{13}$$

за умов (11), (12).

У більшості практичних задач вартість виробництва продукції на промисловому підприємстві потужності Y_i дорівнює добутку собівартості цієї продукції на її кількість. В силу цього маємо:

$$\varphi_i(Y_i) = d_i + a_i Y_i,\ \ i = 1,...,N\,. \tag{14}$$

Підставляючи вираз (14) в (13) отримаємо

$$F(\{\Omega_1,...,\Omega_N\},\{\tau_1,...,\tau_N\}) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} (c(x,\ \tau_i) + a_i)\rho(x)dx\,. \tag{15}$$

Задача (11)-(15) при $a_i = 0,\ i = 1,...,N$, *є нескінченновимірною транспортною задачею*. Фундатор теорії оптимального розбиття множин О.М. Кісельова отримала необхідні умови оптимальності для задачі (11)-(15) та розробила метод і алгоритм її розв'язання [7].

Основні результати математичної теорії неперервних задач ОРМ n-вимірного евклідового простору, які є некласичними задачами нескінченновимірного математичного програмування з булевими змінними, розробленої протягом останніх п'ятдесяти років О.М. Кісельовою та її учнями, викладені в більш ніж 400 наукових працях, серед яких шість монографій. Структуру сформованої до теперішнього часу теорії оптимального розбиття множин можна знайти в [6]. Створена теорія ґрунтується на єдиному підході, що полягає у зведенні видних нескінченновимірних задач оптимізації (зазвичай, через функціонал Лагранжа) до негладких, як правило, скінченновимірних задач оптимізації, для чисельного розв'язання яких застосовуються сучасні ефективні методи недиференційованої оптимізації – різні варіанти r-алгоритму, розроблені в Інституті кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України під керівництвом Н.З. Шора [8]. Теорія оптимального розбиття множин ефективно застосовується для розв'язання широкого спектру різних за своєю природою теоретичних і практичних класів оптимізаційних задач, які зводяться в математичній постановці до неперервних моделей оптимального розбиття множин.

Наведемо математичну постановку лінійної багатопродуктової задачі оптимального розбиття множин за обмежень у формі рівностей та нерівностей з відшуканням координат центрів підмножин. Необхідно відзначити, що ця задача є узагальненням задачі (11), (12), (15) на випадок, коли кожний i-й виробник з координатою $\tau_i,\ i = 1,...,N$, виробляє продукцію декількох видів.

Задача 4 (*лінійна багатопродуктова задача оптимального розбиття множини* Ω *з n-вимірного евклідового простору* E_n *на її підмножини* $\Omega_1,...,\Omega_N$, *що не перетинаються, з відшукуванням координат центрів*

$\tau_1,\ldots,\tau_N$ *цих підмножин, за обмежень у формі рівностей та нерівностей*). Знайти

$$\min_{\left(\{\Omega_1^1,\ldots,\Omega_i^j,\ldots,\Omega_N^M\},\ \{\tau_1,\ldots,\tau_N\}\right)} \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i^j}(c^j(x,\tau_i)+a_i^j\rho^j(x))dx$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{M}\int_{\Omega_i^j}\rho^j(x)dx=b_i,\ \ i=1,\ldots,p;\quad \sum_{j=1}^{M}\int_{\Omega_i^j}\rho^j(x)dx\le b_i,\ \ i=p+1,\ldots,N;$$

$$\{\Omega_1^1,\ldots,\Omega_i^j,\ldots,\Omega_N^M\}\in\Sigma_\Omega^{NM},\quad \tau=(\tau_1,\ldots,\tau_N)\in\underbrace{\Omega\times\ldots\times\Omega}_{N}\in\Omega^N,$$

де $x=(x^{(1)},\ldots,x^{(n)})\in\Omega$; $\tau_i=(\tau_i^{(1)},\ldots,\tau_i^{(n)})\in\Omega_i$, $i=1,\ldots,N$; $a_1^1,\ldots,a_N^M$; $b_1,\ldots,b_N$ – задані невід'ємні числа, причому виконуються умови розв'язуваності задачі:

$$S=\int_\Omega\sum_{j=1}^{M}\rho^j(x)dx\le\sum_{i=1}^{N}b_i;\quad 0\le b_i\le S,\ \ i=1,\ldots,N.$$

Окремими випадками задачі 4 є задача оптимального розбиття множини як із заданими координатами центрів підмножин, так і з невідомими заздалегідь; як без обмежень, так і з обмеженнями. Класичним прикладом таких задач є задача розміщення підприємств з одночасним розбиттям території на області, що обслуговуються одним підприємством. В даній задачі, як правило, критерієм якості розміщення і розбиття виступають сумарні витрати на виробництво і доставку продукції до споживача. У випадку, коли кожне підприємство виробляє декілька видів продукції, отримуємо багатопродуктову задачу оптимального розбиття множин.

Двоетапна неперервно-дискретна задача оптимального розміщення-розбиття із заданими центрами підмножин у множині, яка підлягає розбиттю. Зазначена задача, з одного боку, узагальнює класичну скінченновимірну транспортну задачу 1 на випадок, коли обсяги виробництва (зберігання, переробки) в заданих пунктах невідомі заздалегідь та відшукуються як розв'язок відповідної неперервної задачі оптимального розбиття множини споживачів (постачальників неперервно розподіленого ресурсу) на сфери обслуговування їх цими пунктами, а з іншого боку, вона узагальнює дискретну двоетапну виробничо-транспортну задачу 2 на випадок неперервно розподіленого ресурсу.

Прикладні задачі, що зводяться до двоетапних неперервно-дискретних задач оптимального розбиття-розподілу характеризуються наявністю двох етапів і полягають у визначенні зон збору неперервно розподіленого ресурсу (сировини) підприємствами першого етапу і обсягів перевезень переробленого продукту від підприємств першого етапу до споживачів (пунктів другого етапу) з метою мінімізації сумарних витрат на транспортування ресурсу від постачальників через пункти переробки (збору, зберігання) до споживачів. Такі задачі часто зустрічаються на практиці: роль неперервно-розподіленого ресурсу в них може відігравати, наприклад, природна сировина (нафта, газ, руда) або урожай сільськогосподарських культур; задачі з організації збору деревних відходів для виробництва палива з подальшим розподілом їх між пунктами виробництва теплової енергії з метою мінімізації сумарних транспортних витрат; задачі оптимізації депозитно-кредитної діяльності відділень банку з метою залучення депозитів від фізичних осіб з подальшим розподілом залучених коштів між позичальниками та ін. [1].

Нехай Ω – обмежена, замкнена, вимірна за Лебегом множина в n-вимірному евклідовому просторі E_n. Позначимо клас всіх можливих розбиттів множини Ω на підмножини $\Omega_1,...,\Omega_N$, що не перетинаються, через $\sum_{\Omega}^{N}$, тобто

$$\textstyle\sum_{\Omega}^{N}=\{\{\Omega_1,...,\Omega_N\}:\ \bigcup_{i=1}^{N}\Omega_i=\Omega,\ \ \mathrm{mes}(\Omega_i\cap\Omega_j)=0,\ \ i,j=1,...,N\ (i\neq j)\}.$$

Задача 5 (*двоетапна неперервно-дискретна лінійна однопродуктова задача оптимального розміщення-розбиття із заданим розташуванням центрів підмножин, за обмежень у формі рівностей*). Знайти таке розбиття множини Ω на N вимірних за Лебегом підмножин $\Omega_{*1},...,\Omega_{*N}$ і такий невід'ємний вектор $v_*=(v_{*11},...,v_{*NM})\in E_{NM}$, які забезпечують

$$\min_{(\{\Omega_1,...,\Omega_N\},\ \{v_{11},...,v_{NM}\})} F(\{\Omega_1,...,\Omega_N\},\{v_{11},...,v_{NM}\}),$$

$$F(\{\Omega_1,...,\Omega_N\},\{v_{11},...,v_{NM}\})=\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i}c_i^I(x,\tau_i^I)\rho(x)dx+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}c_{ij}^{II}(\tau_i^I,\tau_j^{II})v_{ij} \qquad (16)$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{M}v_{ij}=\int_{\Omega_i}\rho(x)dx,\ \ i=1,...,N;\quad \sum_{i=1}^{N}v_{ij}=b_j^{II},\ \ j=1,...,M;$$

$$\{\Omega_1,...,\Omega_N\}\in\textstyle\sum_{\Omega}^{N};\quad v_{ij}\geq 0,\ \ i=1,...,N;\ \ j=1,...,M;$$

$$x=(x^{(1)},...,x^{(n)})\in\Omega;\ \ \tau^I=(\tau_1^I,...,\tau_N^I)\in\underbrace{\Omega\times...\times\Omega}_{N}=\Omega^N,\ \ \tau^{II}=(\tau_1^{II},...,\tau_M^{II})\in\Omega^M.$$

Тут b_j^{II}, $j=1,...,M$, – задані невід'ємні числа, причому виконуються умови

$$S=\int_{\Omega}\rho(x)dx=\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i}\rho(x)dx=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}v_{ij}=\sum_{j=1}^{M}b_j^{II};\quad 0\leq b_j^{II}\leq S,\ \ j=1,...,M.$$

Зауважимо, що в термінах класичної транспортної задачі вектор $v=(v_{11},...,v_{NM})$ має сенс обсягів транспортування продукції з пунктів першого етапу τ_i^I, $i=1,...,N,$ до пунктів τ_j^{II}, $j=1,...,M$, кінцевого споживання (другого етапу). Функції $c_i^I(x,\tau_i^I)$ – визначені на $\Omega\times\Omega$, дійсні, обмежені, вимірні за аргументом $x=(x^{(1)},...,x^{(n)})$ при будь-якому фіксованому $\tau_i^I=(\tau_i^{I(1)},...,\tau_i^{I(n)})$ з Ω для усіх $i=1,...,N$; функція $\rho(x)$ – дійсна, обмежена, вимірна, невід'ємна на Ω; $\tau_i^I=(\tau_i^{I(1)},...,\tau_i^{I(n)})$, $i=1,...,N$, – деяка задана еталонна точка для підмножини Ω_i, звана центром цієї підмножини; $\tau_j^{II}=(\tau_j^{II(1)},...,\tau_j^{II(n)})$, $j=1,...,M$, – деяка задана точка множини Ω; $c_{ij}^{II}(\tau_i^I,\tau_j^{II})$, $i=1,...,N;$ $j=1,...,M$, – визначена на $\Omega \times \Omega$ обмежена функція «відстані» у відповідній метриці між точками τ_i^I і τ_j^{II}.

У роботі [9] розроблено та обґрунтовано метод та алгоритм розв'язання задачі 5. Доведено теорему, яка визначає вид оптимального розв'язку двоетапної неперервно-дискретної задачі оптимального розбиття-розподілу із заданим положенням центрів підмножин при обмеженнях у вигляді рівностей.

Двоетапна неперервно-дискретна задача оптимального розбиття-розподілу з нечіткими параметрами в цільовому функціоналі. Розглянемо у цільовому функціонали задачі 5 такі функції $c_i^I(x,\tau_i^I),\ i=1,...,N$, що задають відстань між точками x і τ_i^I для I-го етапу і визначаються як одна з метрик [7]:

$$c(x,\tau_i) = \| x-\tau_i \|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x^{(k)}-\tau_i^{(k)})^2} \text{ – евклідова;} \tag{17}$$

$$c(x,\tau_i) = \| x-\tau_i \|_1 = \sum_{k=1}^{n}| x^{(k)}-\tau_i^{(k)} | \text{ – манхеттенська;} \tag{18}$$

$$c(x,\tau_i) = \| x-\tau_i \|_0 = \max_{1\le k\le n}| x^{(k)}-\tau_i^{(k)} | \text{ – Чебишова,} \tag{19}$$

і такі функції $c_{ij}^{II}(\tau_i^I,\tau_j^{II}),\ i=1,...,N;\ j=1,...,M$, що задають відстань між точками τ_i^I і τ_j^{II} для II-го етапу і визначаються аналогічно функціям відстані I-го етапу.

Для практичних задач відстані між споживачами і підприємствами I-го етапу, а також відстані між підприємствами I-го та II-го етапів можуть істотно відрізнятися від відстаней, що розраховуються за допомогою «формальних» метрик (17)-(19). Ці відмінності можуть бути задані нечітко за допомогою множника – вектора нечітких параметрів $\tilde{a}=(\tilde{a}_1,...,\tilde{a}_N)$ для кожної функції $c_i^I(x,\tau_i^I),\ i=1,...,N$ та вектора нечітких параметрів $\tilde{w}=(\tilde{w}_{11},...,\tilde{w}_{NM})$ для кожної функції $c_{ij}^{II}(\tau_i^I,\tau_j^{II}),\ i=1,...,N;\ j=1,...,M$. Тоді функціонал (16) набуває вигляду

$$\begin{aligned} &F(\{\Omega_1,...,\Omega_N\},\{v_{11},...,v_{NM}\},\tilde{a},\tilde{w}) = \\ &= \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i}\tilde{a}_i c_i^I(x,\tau_i^I)\rho(x)dx + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}\tilde{w}_{ij}c_{ij}^{II}(\tau_i^I,\tau_j^{II})v_{ij}, \end{aligned} \tag{20}$$

де параметри $\tilde{a}=(\tilde{a}_1,...,\tilde{a}_N)$ і $\tilde{w}=(\tilde{w}_{11},...,\tilde{w}_{NM})$ можна розглядати як лінгвістичні змінні, які, в свою чергу, можуть залежати від впливаючих на них факторів [10].

У роботі [11] запропоновано метод розв'язання сформульованої задачі, який базується на використанні методу нейролінгвістичної ідентифікації невідомих залежностей для відновлення чітких значень тих параметрів задачі, які задані нечітко, методів теорії оптимального розбиття множин та методу потенціалів розв'язання транспортної задачі.

Двоетапна неперервно-дискретна задача оптимального розбиття-розподілу з нейролінгвістичною ідентифікацією функцій, що входять до цільового функціоналу, явний аналітичний вигляд яких невідомий. Відмітимо, що в математичній постановці задачі 3 та в різних узагальненнях цієї задачі [12] в цільовий функціонал входять функції $c(x,\tau_i)$, $i=1,...,N$, і $\rho(x)$, які, наприклад, в термінах нескінченновимірних транспортних задач і задач розміщення мають наступний зміст: $c(x,\tau_i)$ − вартість транспортування одиниці продукції з пунктів виробництва τ_i, $i=1,...,N$, в пункт споживання з координатою $x=(x_1,...,x_n)$, а $\rho(x)$ − функція попиту споживача x на продукцію, що виробляється пунктом виробництва τ_i.

В задачах 4 і 5 припускалося, що для функцій $c(x,\tau_i)$, $i=1,...,N$, та $\rho(x)$ відома явна аналітична залежність від їх аргументів. Однак на практиці ця залежність (як правило, складна і нелінійна) невідома. Крім того, часто неможливо врахувати в явному аналітичному вигляді вплив деяких реальних факторів або через брак інформації про модельовану залежність, або складності обліку різноманіття чинників, що впливають на характер цієї залежності. Для нескінченновимірної транспортної задачі, наприклад, на попит $\rho(x)$ можуть впливати такі чинники, як зміна рівня доходу споживача, коливання валютного курсу або нестабільність політичної обстановки, коливання цін на бензин та багато інших. У випадках, коли такі залежності мають не ймовірнісний, а нечітко-множинний характер пропонується застосовувати нейронечіткі технології для ідентифікації залежності функції $\rho(x)$ від її аргументів [13].

У роботі [14] розроблено та обґрунтовано метод ідентифікації залежності функції $\rho(x)$, що входить до цільового функціоналу задач 4, 5, від її аргументів із застосуванням нейронечіткої технології.

Висновки. У роботі розглянуто математичні моделі двоетапних неперервно-дискретних задач оптимального розміщення-розбиття та зазначені підходи до їх розв'язання. Загальна схема відшукання розв'язків двоетапних неперервно-дискретних задач оптимального розбиття-розподілу заснована на єдиному підході, який полягає у зведенні вихідних нескінченновимірних задач оптимального розбиття-розподілу до негладких, як правило, скінченновимірних задач оптимізації, до чисельного розв'язання яких застосовуються ефективні методи недиференційованої оптимізації – різні варіанти r-алгоритму Шора. Метод і алгоритм розв'язання двоетапної неперервно-дискретної задачі оптимального розбиття-розподілу з нечіткістю в цільовому функціоналі базується на тому принципі, що спочатку для відновлення точних значень нечітких параметрів у цільовому функціоналі застосовується метод нейролінгвістичної ідентифікації, а потім оптимальне розбиття знаходиться за допомогою методів теорії оптимального розбиття множин та методу потенціалів розв'язання транспортної задачі.

Бібліографічні посилання

1. Михалевич В.С., Трубин В.А., Шор Н.З. Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования: модели, методы, алгоритмы. М.: Наука., 1986. 264 с.
2. Стецюк П.І., Ляшко В.І., Мазютинець Г.В. Двоетапна транспортна задача та її AMPL-реалізація. *Наукові записки НаУКМА. Комп'ютерні науки*. 2018. Т. 1. С. 14–20.
3. Taha H.A. Operations Research: An Introduction. 10th edition. Global Edition. Pearson Education Ltd., 2017. 848 p.
4. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Задачи линейного программирования транспортного типа. М.: Наука, 1969. 382 с.
5. Канторович Л.В., Рубинштейн Г.Ш. Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах. *ДАН СССР*. 1957. 115(6). С. 1058-1061.
6. Киселева Е.М. Становление и развитие теории оптимального разбиения множеств *n*-мерного евклидова пространства. Теоретические и практические приложения. *Проблемы управления и информатики*. 2018. № 5. С. 114-135.
7. Киселева Е.М., Шор Н.З. Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения. К.: Наукова думка, 2005. 564 с.
8. Shor N.Z. Minimization methods for non-differentiable functions. Springer series, Computational mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 1985. Vol. 3. 162 p.
9. Kiseleva E.M., Prytomanova O.M., Us S.A. Solving a two-stage continuous-discrete optimal partitioning-distribution problem with a given position of the subsets centers. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020. 56(1). Pp. 3-15.
10. Kiseleva E., Prytomanova O., Hart L. Solving a two-stage continuous-discrete problem of optimal partitioning-allocation with the subsets centers placement. *Open Computer Science*. De Gruyter, 2020. Vol 10. Pp. 124-136.
11. Кісельова О.М, Притоманова О.М., Дзюба С.В., Падалко В.Г. Розв’язання двоетапної неперервно-дискретної задачі оптимального розбиття-розподілу з нечіткими параметрами. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. 2019. Вип. 19. С. 106-116.
12. Kiseleva E.M., Shor N.Z. Analysis of algorithms for a class of continuous partition problems. *Cybernetics and Systems Analysis*, 1994. 30(1). Pp. 64-74.
13. Кісельова О.М., Гарт Л.Л., Притоманова О.М, Балейко Н.В. Нечіткі задачі оптимального розбиття множин: теоретичні основи, алгоритми, застосування: монографія. Дніпро: Ліра, 2020. 400 с.
14. Kiseleva E., Prytomanova O., Zhuravel S. Algorithm for solving a continuous problem of optimal partitioning with neurolinguistic identification of functions in target functional. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. 50(3). Pp. 1-20.

Надійшла до редколегії 05.07.2022.