УДК 532.516 doi: 10.15421/322121

І.С. Тонкошкур
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОМАСООБМІНУ В ПЛІВКОВИХ ТЕЧІЯХ РІДИНИ

Розглянуто задачу про тепломасообмін в плівці в'язкопластичної рідини, що стікає по поверхні тіла обертання під дією сили тяжіння. Пропонується методика наближеного розв'язання рівнянь руху і тепломасопереносу в рідкій плівці, що основана на методах малого параметра і локальної подібності.

Ключові слова: рідка плівка, метод малого параметра, в'язкопластична рідина, тепломасообмін.

I.S. Tonkoshkur
Oles Honchar Dnipro National University

MATHEMATICAL MODELING OF HEAT AND MASS TRANSFER IN FILM FLOWS OF A LIQUID

The problem of heat and mass transfer in a liquid film flowing down the surface of a solid is considered. The film flows usage of liquid in technical devices makes it possible to increase the intensity of heat and mass transfer processes. In such devices, spatial flows of rheologically complex fluids are often realized. In this paper, we propose a method for the approximate calculation of spatial flows of a viscoplastic fluid over the surface of a revolution body, taking into account the processes of heat and mass transfer.

The viscous fluid movement over the surface of a revolution body under the gravitation is considered. The body is located at a certain angle to the vertical. It is assumed that the main changes in the temperature and diffusion fields occur in thin boundary layers near a solid wall or in the vicinity of a free surface separating the liquid and gas phases.

To describe the flow of a liquid film, a viscous incompressible liquid model is used, which is based on the equations of continuity and momentum. The conditions of adhesion on the surface of a solid, as well as the conditions for the continuity of stresses and the normal component of the velocity vector, on the surface separating the liquid and gas, are used as boundary conditions. The system of equations is supplemented by a rheological Shulman's viscoplastic fluid model. To simulate the processes of heat and mass transfer in a liquid film, the equations of the boundary layer are used.

The system of differential equations is simplified using the small parameter method, which is taken as the relative film thickness. The solution to the dynamic part of the problem is obtained in an analytical form. To determine the unknown film thickness, a boundary value problem for a first-order partial differential equation is formulated. When solving this problem, the difference scheme of the running counting is applied. To solve the equations of the boundary layer, the local similarity method is used, which makes it possible to reduce the original spatial problem to a two-dimensional one, in which the longitudinal coordinate is included as a parameter. To integrate the obtained equations, a finite-difference method is used.

Keywords: liquid film, small parameter method, viscoplastic liquid, heat and mass transfer.

И.С. Тонкошкур

Днипровский национальный университет имени Олеся Гончара

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОМАССООБМЕНА В ПЛЕНОЧНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ЖИДКОСТИ

Рассмотрена задача о тепломассообмене в пленке вязкопластической жидкости, стекающей по поверхности тела вращения под действием силы тяжести. Предлагается методика приближенного решения уравнений движения и тепломассопереноса в жидкой пленке, основанная на методах малого параметра и локального подобия.

Ключевые слова: жидкая пленка, метод малого параметра, вязкопластическая жидкость, тепломассообмен.

Вступ. Течії в'язкої рідини з вільними межами застосовуються в багатьох технологічних процесах в хімічній, металургійній, харчовій та інших галузях промисловості. Використання плівкових течій рідини в технічних пристроях дозволяє збільшувати інтенсивність процесів тепломасообміну. У таких пристроях часто реалізуються просторові течії реологічно складних рідин.

Дослідженню процесів тепломасообміну в рухомих рідких плівках присвячено значну кількість публікацій (наприклад, [1, 4, 5, 7]). У цих роботах вивчалися в основному двовимірні течії рідини. В роботі [2] запропонована методика наближеного розрахунку просторових течій нелінійно-в'язкої рідини Оствальда де Віля по поверхні тіла обертання з урахуванням процесів тепломасообміну. У даній роботі ця методика поширюється на більш загальний випадок моделі в'язкопластичної рідини Шульмана [5].

Постановка задачі. Розглядається задача про гідродинаміку та тепломасообмін в рідкій плівці, що стікає по поверхні тіла обертання під дією сили тяжіння. Вісь тіла розташована під кутом γ до вертикалі. Вводиться криволінійна ортогональна система координат (ξ, η, ζ) (ξ направлена вздовж твірної тіла обертання, η – в поперечному напрямку, ζ – по нормалі до поверхні). Рівняння поверхні тіла задається у вигляді $r = r_w(\xi)$, де r_w – відстань від точки поверхні до осі тіла.

Система рівнянь нерозривності й імпульсу, яка описує течію в'язкої рідини, у векторній формі має вигляд

$$\rho \frac{d\overline{V}}{dt} = -\,grad\ p + Div\,\overset{=}{\tau} + \rho\overline{g}, \tag{1}$$

$$div\,\overline{V} = 0, \tag{2}$$

де $\overline{V}$ – вектор швидкості руху рідини, p – тиск, ρ – густина рідини, $\overset{=}{\tau}$ – тензор в'язких напружень, $\overline{g}$ – інтенсивність сили тяжіння.

На поверхні твердого тіла, як крайові умови, задаються умови прилипання; на вільній поверхні, що розділяє рідину і газ – умови неперервності напружень і нормальної складової вектору швидкості

$$\bar{V} = 0 \qquad \text{при } \zeta = 0, \tag{3}$$

$$\bar{\bar{\tau}}\bar{N} - (p - p_0)\bar{N} = 2\sigma\chi\bar{N} + \nabla_\Gamma\sigma, \tag{4}$$

$$\bar{V}\,\bar{N} = 0 \qquad \text{при } \zeta = F. \tag{5}$$

Тут $F = F(\xi,\zeta)$ – рівняння вільної поверхні, p_0 – атмосферний тиск в газі, $\bar{N} = \bar{N}(\xi,\eta)$ – одинична нормаль до Γ, χ – середня кривизна поверхні Γ, σ – коефіцієнт поверхневого натягу, $\nabla_\Gamma\sigma$ – поверхневий градієнт коефіцієнта σ.

Система рівнянь (1)-(5) доповнюється реологічною моделлю в'язкопластичної рідини Шульмана [5]:

$$\tau_{ij} = 2\left[\frac{\tau_0^{1/n}}{A} + \mu_p\right]^n A^{n-1}\dot{e}_{ij} \qquad \text{при } |\tau| > \tau_0 ,$$

$$\dot{e}_{ij} = 0 \qquad \text{при } |\tau| \le \tau_0 ,$$

де τ_{ij} – компоненти тензора в'язких напружень $\bar{\bar{\tau}}$, τ_0 – граничне напруження зсуву, μ_p – коефіцієнт пластичної в'язкості, $A=\sqrt{2I_2}$, I_2 – другий інваріант тензора швидкостей деформацій $\dot{e}_{ij}$, n – параметр нелінійності.

Для опису процесу стаціонарного теплопереносу в рідкій плівці використовується рівняння просторового примежового шару на поверхні тіла обертання

$$\frac{u}{h_1}\frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{w}{h_2}\frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{v}{h_3}\frac{\partial T}{\partial \zeta} = a\frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2}, \tag{6}$$

де u, w, v – компоненти вектору швидкості $\bar{V}$ уздовж координат ξ,η,ζ , T – температура рідини, h_i – коефіцієнти Ламе, a – коефіцієнт температуропровідності.

Крайові умови

$$T = T_w \quad \text{або} \quad \frac{\partial T}{\partial \zeta} = q_w \quad \text{при } \zeta = 0, \tag{7}$$

$$T \to T_E \qquad \text{при } \zeta \to F. \tag{8}$$

Аналогічна задача для моделювання масопереносу має вигляд:

$$\frac{u}{h_1}\frac{\partial C}{\partial \xi} + \frac{w}{h_2}\frac{\partial C}{\partial \eta} + \frac{v}{h_3}\frac{\partial C}{\partial \zeta} = D\frac{\partial^2 C}{\partial \zeta^2}, \tag{9}$$

$$C = C_E \qquad \text{при } \zeta = F, \tag{10}$$

$$C \to C_W \quad \text{при } \zeta \to 0, \tag{11}$$

де C – концентрація домішок в рідині, D – коефіцієнт дифузії, індекси «W» і «E» належать до поверхні твердого тіла і вільної границі відповідно.

Метод розв'язання. Для спрощення системи диференціальних рівнянь (1) - (2) з крайовими умовами (3)-(5) застосовується метод малого параметра, за який береться відносна товщина плівки $\varepsilon = h_0 / l_0$, де h_0, l_0 – характерні поперечний і поздовжній розміри. Припускається, що узагальнене число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \rho h_0^n U_0^{2-n} / \mu^n$ (U_0 – характерна швидкість, μ – коефіцієнт динамічної в'язкості) має порядок одиниці (тобто ε Re << 1) [3]. Поверхня $\zeta = F_1(\xi, \eta)$, яка розділяє в'язку і пластичну області течії рідини, визначається параметром пластичності $S = \tau_0 h_0^n / (\mu^n U_0^n)$.

Розв'язок динамічної частини задачі (в нульовому наближенні) може бути поданий у вигляді:

у в'язкій області течії (при $\zeta < F_1$)

$$u = \varphi_1 \cdot B \cdot \left\{ \beta \left[(F - \zeta)^{\alpha+1} - F^{\alpha+1} \right] + \bar{S}^\alpha \zeta \right\},$$

$$w = \varphi_2 \cdot B \cdot \left\{ \beta \left[(F - \zeta)^{\alpha+1} - F^{\alpha+1} \right] + \bar{S}^\alpha \zeta \right\}, \tag{12}$$

$$v = \left(\varphi_1 \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\varphi_2}{r_w} \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) \cdot B \cdot F^{\alpha+1} \left[\frac{\zeta}{F} + \beta \left[\left(1 - \frac{\zeta}{F} \right)^{\alpha+1} - 1 \right] \right] +$$

$$+ \beta \varphi_3 F^{\alpha+2} \left[\frac{\zeta}{F} + \left[\left(1 - \frac{\zeta}{F} \right)^{\alpha+2} - 1 \right] \gamma \right] + \varphi_6 \bar{S}^\alpha \frac{\zeta^2}{2},$$

у пластичній області (при $\zeta \ge F_1$)

$$u = \varphi_1 \cdot B \cdot \left\{ \beta \left(\bar{S}^{\alpha+1} - F^{\alpha+1} \right) + \bar{S}^\alpha (F - \bar{S}) \right\},$$

$$w = \varphi_2 \cdot B \cdot \left\{ \beta \left(\bar{S}^{\alpha+1} - F^{\alpha+1} \right) + \bar{S}^\alpha (F - \bar{S}) \right\}, \tag{13}$$

$$v = \left(\varphi_1 \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\varphi_2}{r_w} \frac{\partial F}{\partial \eta} \right) \cdot B \cdot \left[F^\alpha (F - \bar{S}) + \left(\bar{S}^{\alpha+1} - F^{\alpha+1} \right) \beta \right] +$$

$$+ \beta \varphi_3 \left[F^{\alpha+1} (F - \bar{S}) + \left(\bar{S}^{\alpha+2} - F^{\alpha+2} \right) \gamma \right] + \varphi_6 \bar{S}^\alpha \frac{(F - \bar{S})^2}{2},$$

Невідома товщина плівки визначається в результаті розв'язання крайової задачі

$$\varphi_1 \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\varphi_2}{r_w} \frac{\partial F}{\partial \eta} + f(\xi, \eta, F) = 0, \tag{14}$$

$$F(1, \eta) = 1, \quad F(\xi, 0) = F_0(\xi), \tag{15}$$

де $F_1 = F - \bar{S}$ – товщина в'язкого шару, $f(\xi, \eta, F)$, $\varphi_i(\xi, \eta)$, $B(\xi, \eta)$ – відомі функції, α, β, γ – сталі величини, $\bar{S} = S / (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^\alpha$.

Система рівнянь (14)–(15) розв'язується чисельно з використанням скінченно-різницевого методу. Функція $F_0(\xi)$ знаходиться в результаті розв'язання задачі на лінії розтікання η=0, на якій виконується умова $\varphi_2 = 0$.

Відзначимо, що в примежових шарах поблизу твердої поверхні або вільної границі вирази для компонентів вектору швидкості, які входять в рівняння (6), (9) можна значно спростити, провівши лінеаризацію при малих або великих значеннях координати ζ. Так, в лінійному наближенні (для малих значень ζ), вирази (12) приймають вигляд

$$u=\varphi_1\cdot B\cdot\left(\bar{S}^{\alpha}-F^{\alpha}\right)\cdot\zeta,\quad w=\varphi_2\cdot B\cdot\left(\bar{S}^{\alpha}-F^{\alpha}\right)\cdot\zeta,\quad v=0.$$

Для розв'язання крайових задач (6)-(8) й (9)-(11) застосовується метод локальної подібності [6], що дозволяє звести вихідну просторову задачу до двовимірної, в яку координата ξ входить як параметр.

Введемо заміну незалежних змінних

$$\xi_1=\xi,\quad \eta_1=\eta,\quad \zeta_1=\frac{\zeta}{\delta(\xi)},$$

де $\delta(\xi)$ – деяка задана функція.

Умова локальної подібності $\partial A/\partial\xi_1=0$ приводить до наступного співвідношення між похідними для шуканої функції $\mathrm{A}(\xi,\eta,\zeta)$:

$$\frac{\partial A}{\partial\xi}=-\frac{\zeta}{\delta(\xi)}\frac{d\delta}{d\xi}\frac{\partial A}{\partial\zeta}. \tag{16}$$

В розрахунках функція $\delta(\xi)$ обиралась у вигляді $\delta=\xi^k$, де k=const.

Введемо нову безрозмірну функцію θ і змінну подібності λ

$$\theta=\frac{T-T_E}{T_W-T_E}\ ,\qquad \lambda=\left(\frac{U_0}{ah_0}\right)^{1/3}\frac{\zeta}{\xi^{1/3}}\ ,$$

Тоді крайова задача (6)-(8) для кругового конуса с урахуванням співвідношення (16) може бути приведена до вигляду (при k=1/3):

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\lambda^2}+\frac{A_1}{3}\lambda^2\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}-\frac{A_2}{\cos\alpha}\lambda\frac{\partial\theta}{\partial\eta}=0,$$

$$\theta(\eta,0)=1,\quad \theta(\eta,\lambda_E)=0,\quad \theta(0,\lambda)=\theta_0(\lambda),$$

де

$$A_0=-B\left(\frac{F}{h_0}\right)^{\frac{1}{n}}+\frac{S^{\frac{1}{n}}}{\cos\alpha\sqrt{\varphi_1^2+\varphi_2^2}}\quad A_1=\varphi_1A_0,\ A_2=\varphi_2A_0.$$

Функція $\theta_0(\lambda)$ знаходиться при розв'язанні даної задачі на лінії розтікання, на якій A_2=0.

Крайова задача (9)-(11) перетворюється аналогічним чином. Для інтегрування отриманих рівнянь з відповідними крайовими умовами застосовується скінченно-різницевий метод.

На рис. 1. наведені результати розрахунків за описаною методикою для конуса з кутом розкриття α=30° при куті скоса потоку γ=10° й значеннях фізичних параметрів: Re=1, n=1, θ_w=0.05, S=0, 0.1, 0.25, 0.5. На рис. 1.а представлені профілі температури $\theta(\lambda)$ у примежовому шарі навколо твердої поверхні для точки з координатами (ξ=2; η=0°) при різних значеннях параметра пластичності S. На рис. 1.б показані розподіли похідної $\theta'(0)$, яка характеризує теплові потоки на твердій поверхні, вдовж твірної η=0.

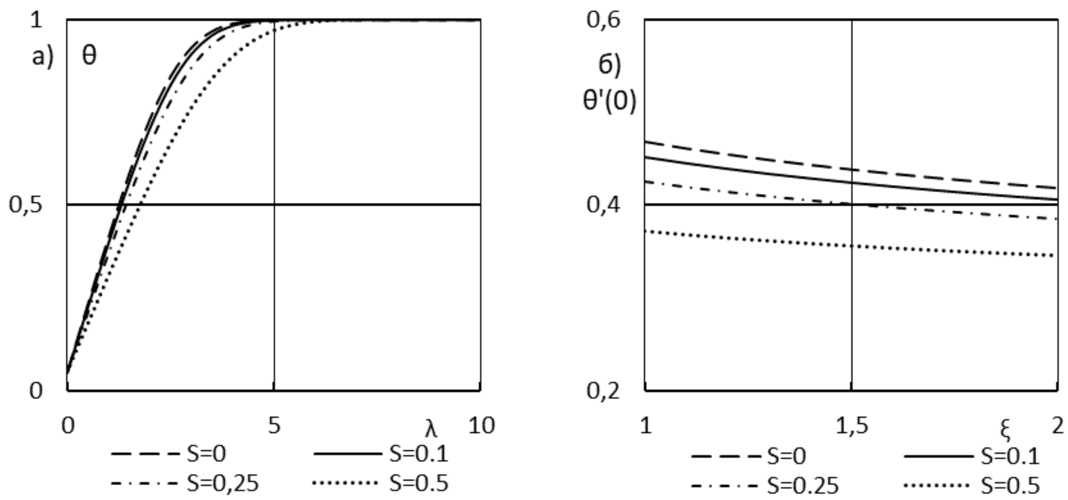

Рис. 1. Характеристики теплообміну в рідкій плівці

Висновки. Запропоновано методику розв'язання задачі про тепломасообмін в рухомій плівці в'язкопластичної рідини, яка базується на застосуванні методів малого параметра та локальної подібності. Сформульовано спрощені крайові задачі для визначення динамічних і теплових характеристик плівкових течій рідини.

Бібліографічні посилання

1. Бояджиев Х., Бешков В. Массоперенос в движущихся пленках жидкости. М.: Мир, 1988. 136 с.
2. Тонкошкур І.С. Моделювання процесів тепломасообміну в плівкових течіях нелінійно-в'язкої рідини. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. Д.: ДНУ, 2019. С. 153-158.
3. Тонкошкур І.С. Математичне моделювання плівкових течій рідини по поверхні тіла обертання. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. Д.: ДНУ, 2018. С. 164-169.
4. Холпанов Л.П., Шкадов В.Я. Гидродинамика и тепломассообмен с поверхностью раздела. М.: Наука, 1990. 271 с.
5. Шульман З.П., Байков В.Н. Реодинамика и тепломассообмен в пленочных течениях. З.П. Шульман. Минск: Наука и техника, 1979. 296 с.
6. Kaups K., Cebeci T. Prediction of turbulent boundary layers on cones at incidence. *AIAA Journal*. 1977. Vol. 15, No. 5. P. 727-730.
7. Shevchuk I.V. Convective Heat and Mass Transfer in Rotating Disk Systems. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009, XIX. 236 p.

Надійшла до редколегії 31.08. 2021.