УДК 519.21 doi: 10.15421/322119

Н.І. Послайко
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

ДОСЛІДЖЕННЯ СТАЦІОНАРНОГО РЕЖИМУ В СИСТЕМІ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ ТИПУ $GI/M/1$ ЗІ СЛАБКОЮ ПІСЛЯДІЄЮ

Розглянуто узагальнення системи масового обслуговування $GI/M/1$ на випадок слабкої післядії (ймовірності переходу в певний стан залежать не тільки від стану, в якому система знаходиться в теперішній момент часу, а і від попередньої зміни в системі). З використанням напівмарковських процесів і вкладених ланцюгів Маркова для цього узагальнення знайдені умови існування стаціонарного режиму.

Ключові слова: система масового обслуговування, марковський процес, вкладений ланцюг Маркова, стаціонарний режим, ергодичність процесу.

N.I. Poslaiko
Oles Honchar Dnipro National University

STUDY STATIONARY MODE IN A MASS SERVICE SYSTEM OF A VIEW $GI/M/1$ WITH WEAK AFTER-EFFECT

In this paper, we consider a generalization of the mathematical model of a queuing system $GI/M/1$ with waiting (notation by D. Kendall) for the case when its probabilities of transition to a certain state k (k – the number of customers in the system at a time t) depend not only on the state i in which the system is currently located in time t, but also because of the state from which the state i is reached. That is, the last change in the state of the system is taken into account before the moment t is associated with the end of servicing the customer or with the arrival of a new customer. The queuing system in such assumptions is denoted as $\left(GI/M/1\right)^{\pm}$. This system is dual in relation to the system $\left(M/G/1\right)^{\pm}$ that was investigated in [1]. The service process is presented in the form of a two-dimensional Markov process $\varsigma(t)=\left(\eta(t),\xi(t)\right)$, where $\xi(t)$ – is a discrete component (the number of requests in the system at the moment t, taking into account the history of the process), $\eta(t)$ – the time elapsed since the last moment before the moment t the request arrived. Using nested Markov chains and inhomogeneous Markov chains with semi-Markov intervention of the case, the conditions for the existence of a stationary regime are investigated for the system, that is, the conditions under which the queue of requests for service does not grow indefinitely over time.

The following characteristics of the system are found: the conditional distribution of the time until the first jump of the discrete component, the conditional distribution of the number of claims served in the interval between successive arrivals of claims. The conditions for the existence of a stationary distribution of the embedded Markov chain are investigated and expressions for the limiting probabilities of its states are found.

These characteristics are used to clarify the conditions for the existence of a stationary regime in the system.

Key words: queuing system, Markov process, embedded Markov chain, stationary mode,

ergodicity of the process.

Н.И. Послайко
Днипровский национальный университет имени Олеся Гончара

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА В СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ТИПА $GI/M/1$ СО СЛАБЫМ ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Рассмотрено обобщение системы массового обслуживания $GI/M/1$ на случай слабого последействия (вероятности перехода в определенное состояние зависят не только от состояния, в котором система находится в настоящий момент времени, но и от предыдущего изменения в системе). С использованием полумарковских процессов и вложенных цепей Маркова для этого обобщения найдены условия существования стационарного режима.

Ключевые слова: система массового обслуживания, марковский процесс, вложенная цепь Маркова, стационарный режим, эргодичность процесса.

Вступ. Теорія масового обслуговування протягом останніх десятиліть розвивається досить інтенсивно, що пов’язано з можливістю застосування її методів до розв’язання широкого кола практичних задач.

Як відомо, методи теорії масового обслуговування ґрунтуються на теорії випадкових процесів і насамперед марковських процесів. Так , наприклад, в математичних моделях систем масового обслуговування типу $M/M/n$ (з втратами, з обмеженою та необмеженою чергою, з обмеженим часом очікування та в інших припущеннях) процес обслуговування $\xi(t)$, який співпадає з числом заявок в системі в момент часу t, представляє собою марковський процес з неперервним часом і дискретним простором станів (тут для характеристики систем масового обслуговування використовується символіка, яку запропонував Д. Кендалл [1]).

Однак різноманіття реальних систем масового обслуговування призвело до необхідності побудови математичних моделей, в яких використовуються нові класи марковських процесів та їх модифікації, що дозволяє отримувати розв’язки задач найбільш ефективним способом. До таких процесів відносяться вкладені ланцюги Маркова, лінійчаті процеси, напівмарковські процеси, процеси з напівмарковським втручанням випадку, вкладені напівмарковські процеси та інші [2, 3, 4].

При розгляді класичних систем обслуговування типу $M/M/n$, $GI/M/n$, $M/G/n$ та інших поява нових заявок в системі і закінчення обслуговування заявок, які уже є в системі, припускаються незалежними від характеру попередніх змін станів системи. Таке припущення в деяких ситуаціях, які зустрічаються на практиці, не справджується, що спонукає до побудови нових математичних моделей, в яких попередні зміни станів системи певним чином враховуються.

У даній роботі побудовано узагальнення математичної моделі системи масового обслуговування $GI/M/1$ з очікуванням на випадок «слабкої післядії», коли її ймовірності переходу в деякий стан k (k – число заявок в системі в кожен момент часу) залежать не тільки від стану i, в якому система знаходиться в теперішній момент часу t, а і від того, з якого стану стан i досягнуто. Тобто, враховується – остання перед моментом t зміна стану системи пов'язана з закінченням обслуговування заявки чи з надходженням нової заявки. Система в таких припущеннях позначена як $\left(GI/M/1\right)^{\pm}$.

В [3] І.З. Габровські, І.І. Єжовим, А.М. Захаріним введено клас марковських процесів, дискретна компонента яких представляє собою узагальнення (в певному розумінні) поняття «напівмарковський процес».

У даній роботі з використанням цих процесів і вкладених ланцюгів Маркова досліджуються умови існування стаціонарного режиму в системі масового обслуговування $\left(GI/M/1\right)^{\pm}$, тобто досліджуються умови, за яких черга заявок на обслуговування не зростає необмежено з плином часу.

Аналогічні узагальнення математичних моделей класичних систем розглядались в роботах [5-8].

Постановка задачі. Розглянемо процес $\varsigma(t)=\left(\xi(t),\eta(t)\right)$, де $\xi(t)\in\left\{0^{+},\ 1^{+},\ 1^{-},\ \ldots,\ k^{+},\ k^{-},\ \ldots,\right\}$ (стан 0^{-} – неможливий), $\eta(t)\in[0,\infty)$.

Подія $\left\{\xi(t)=k^{+}\ (k^{-})\right\}$ означає, що в момент часу t величина черги в системі дорівнює k, а перед тим як стати рівною k, вона була більшою (меншою) ніж k. Подія ж $\left\{\eta(t)=x\right\}$ означає, що з моменту останнього перед t надходження заявки пройшов час x.

У випадку $\left\{\xi(t)=0^{+}\right\}$, $\eta(t)$ – час простоювання обслуговуючого приладу.

Означення. Будемо називати розглядувану систему обслуговування системою типу $\left(GI/M/1\right)^{\pm}$, якщо $\varsigma(t)$ є однорідним, неперервним справа марковським процесом з ймовірностями переходів в проміжку $\left(t,t+\Delta t\right)$ $\left(\Delta t\downarrow 0\right)$:

$$
\begin{aligned}
&P\left\{\left(0^{+},x\right)\xrightarrow{\Delta t}\left(0^{+},x+\Delta t\right)\right\}=1-\lambda^{+}(x)\Delta t+o(\Delta t),\\
&P\left\{\left(0^{+},x\right)\xrightarrow{\Delta t}\left(1^{-},\theta\Delta t\right)\right\}=\lambda^{+}(x)\Delta t+o(\Delta t),\\
&P\left\{\left(k^{\pm},x\right)\xrightarrow{\Delta t}\left(k^{\pm},x+\Delta t\right)\right\}=1-\left(\lambda^{\pm}(x)+\mu^{\pm}\right)\Delta t+o(\Delta t),\\
&P\left\{\left(k^{\pm},x\right)\xrightarrow{\Delta t}\left(\left(k-1\right)^{+},x+\Delta t\right)\right\}=\mu^{\pm}\Delta t+o(\Delta t),\\
&P\left\{\left(k^{\pm},x\right)\xrightarrow{\Delta t}\left(\left(k+1\right)^{-},\theta\Delta t\right)\right\}=\lambda^{\pm}(x)\Delta t+o(\Delta t),\ \ k\geq 1,\ \ \theta\in\left[0,1\right]
\end{aligned}
\tag{1}
$$

($\lambda^{+}(x)$, $\lambda^{-}(x)$ – невід'ємні неперервні функції).

Розглядається задача пошуку умов існування стаціонарного режиму в такій системі.

Метод розв'язання задачі.

Процес $\varsigma(t)$ є узагальненням поняття «напівмарковський процес» в розумінні роботи [3]. Його точками регенерації є моменти надходження заявок в систему. При з'ясуванні умов існування стаціонарного режиму в системі знадобляться деякі допоміжні характеристики.

Умовний розподіл часу до першого стрибка дискретної компоненти.

Нехай

$$\tau = \inf_{t \geq 0} \left\{ t : \varsigma(t) \neq \varsigma(t-0) \right\}$$

і

$$P\left\{ \tau \leq u / \varsigma(0) = \left(i^{\pm}, x\right) \right\} = 1 - F_{i^{\pm}}\left(x, x+u\right),\ x, u \geq 0.$$

Функції $F_{i^{\pm}}\left(x, y\right)$ неперервні і диференційовані по y і задовольняють системі диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial F_{0^{+}}\left(x, y\right)}{\partial y} = -F_{0^{+}}\left(x, y\right) \lambda^{+}\left(y\right),$$

$$\frac{\partial F_{i^{\pm}}\left(x, y\right)}{\partial y} = -F_{i^{\pm}}\left(x, y\right)\left[\lambda^{\pm}\left(y\right) + \mu^{\pm}\right],\ i \geq 1,$$

звідки

$$F_{0^{+}}\left(x, y\right) = \exp\left\{ -\int_{x}^{y} \lambda^{+}\left(v\right) dv \right\},$$

$$F_{i^{\pm}}\left(x, y\right) = \exp\left\{ -\int_{x}^{y} \left(\lambda^{\pm}\left(v\right) + \mu^{\pm}\right) dv \right\},\ i \geq 1. \tag{2}$$

Із (2) випливає, що умовний розподіл τ не залежить від i, а залежить лише від того, що було до i: стрибок зверху вниз чи навпаки.

Умовний розподіл числа заявок, обслужених в інтервалі між послідовними надходженнями заявок.

Нехай

$$r_{i^{\pm} j^{+}}\left(x, y\right) = P\left\{ \varsigma\left(y\right) = \left(j^{+}, y\right) / \varsigma\left(x\right) = \left(i^{\pm}, x\right) \right\},\ i \neq 0,\ j \neq 0,\ i \geq j \geq 1$$

$$\left(r_{i^{+} i^{+}}\left(x, y\right) = F_{i^{+}}\left(x, y\right) \right).$$

Використовуючи (1) і формулу повної ймовірності, отримаємо систему диференціальних рівнянь Колмогорова для ймовірностей $r_{i^{+} j^{+}}\left(x, y\right)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_{0^{+} 0^{+}}\left(x, y\right)}{\partial x} &= \lambda^{+}\left(x\right) r_{0^{+} 0^{+}}\left(x, y\right), \\ \frac{\partial r_{i^{+} j^{+}}\left(x, y\right)}{\partial x} &= \left(\lambda^{+}\left(x\right) + \mu^{+}\right) r_{i^{+} j^{+}}\left(x, y\right) - \mu^{+} r_{(i-1)^{+} j^{+}}\left(x, y\right),\ i \geq 1,\ j \geq 0, \end{aligned} \tag{3}$$

з початковими умовами:

$$r_{i^+j^+}(y,y)=\delta_{ij} \quad (\delta_{ij} - \text{символ Кронекера}).$$

Нехай

$$R_j^+(x,y,z)=\sum_{i=j}^{\infty} r_{i^+j^+}(x,y)z^i, \quad |z|\le 1.$$

Тоді (3) перепишеться у вигляді:

$$\frac{\partial R_0^+(x,y,z)}{\partial x}=\left[\lambda^+(x)+\mu^+(1-z)\right]R_0^+(x,y,z)-\mu^+ r_{0^+0^+}(x,y)$$

$$\left(R_0^+(y,y,z)=1\right),$$

$$\frac{\partial R_j^+(x,y,z)}{\partial x}=\left[\lambda^+(x)+\mu^+(1-z)\right]R_j^+(x,y,z),$$

$$\left(R_j^+(y,y,z)=z^j\right),$$

звідки:

$$R_0^+(x,y,z)=\frac{1}{1-z}\left(\exp\left\{\mu^+(y-x)(1-z)\right\}-z\right)\exp\left\{-\int_x^y\left(\lambda^+(v)+\mu^+(1-z)\right)dv\right\},$$

$$R_j^+(x,y,z)=z^j\exp\left\{-\int_x^y\left(\lambda^+(v)+\mu^+(1-z)\right)dv\right\}.$$

Ймовірності $r_{i^-j^+}(x,y)$ $(i\ge j+1)$ знаходимо із системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{\partial r_{i^-j^+}(x,y)}{\partial x}=\left(\lambda^-(x)+\mu^-\right)r_{i^-j^+}(x,y)-\mu^- r_{(i-1)^+j^+}(x,y), \tag{4}$$

де $r_{i^-j^+}(y,y)=0$ для всіх i, j таких, що $i\ge j+1$.

Якщо

$$R_j^-(x,y,z)=\sum_{i=j+1}^{\infty} r_{i^-j^+}(x,y)z^i, \quad |z|\le 1,$$

то система (4) зведеться до рівняння:

$$\frac{\partial R_j^-(x,y,z)}{\partial x}=\left(\lambda^-(x)+\mu^-\right)R_j^-(x,y,z)-\mu^- zR_j^+(x,y,z)$$

з початковою умовою $R_j^-(y,y,z)=0$ $(j\ge 0)$,

звідки

$$R_0^-(x,y,z)=\mu^- z\int_x^y \exp\left\{-\int_x^u\left(\lambda^-(v)+\mu^-\right)dv\right\}R_0^+(u,y,z)\,\mathrm{d}u,$$

$$R_j^-(x,y,z)=z^{j+1}\int_x^y \exp\left\{\mu^+(y-u)z\right\}f(x,u,y)\,\mathrm{d}u,$$

де $f\left(x,u,y\right)=\mu^{-}\exp\left\{-\int\limits_{x}^{u}\left(\lambda^{-}\left(v\right)+\mu^{-}\right)\mathrm{d}v\right\}-\int\limits_{u}^{y}\left(\lambda^{+}\left(v\right)+\mu^{+}\right)\mathrm{d}v.$

У подальшому нам знадобиться явний вираз функцій $r_{i^{\pm}j^{+}}\left(x,y\right)$ при $j\geq 1$. Його ми знаходимо методом математичної індукції, використовуючи формулу

$$r_{i^{\pm}j^{+}}\left(x,y\right)=\frac{1}{i!}\frac{\partial^{i}R_{j}^{\pm}\left(x,y,z\right)}{\partial z^{i}}\Big|_{z=0},$$

звідки

$$r_{(j+k)^{+}j^{+}}\left(x,y\right)=\frac{\left[\mu^{+}\left(y-x\right)\right]^{k}}{k!}\exp\left\{-\int\limits_{x}^{y}\left(\lambda^{+}\left(u\right)+\mu^{+}\right)\mathrm{d}u\right\},$$

$$r_{(j+k)^{-}j^{+}}\left(x,y\right)=\frac{1}{(k-1)!}\int\limits_{x}^{y}\left[\mu^{+}\left(y-u\right)\right]^{k-1}f\left(x,u,y\right)\mathrm{d}u.$$

Дослідження вкладеного ланцюга Маркова.

Нехай $\tau_1<\tau_2<\ \ldots<\tau_n<\ \ldots$ – послідовність випадкових моментів часу така, що $\eta\left(\tau_n-0\right)>0,\ \ \eta\left(\tau_n+0\right)=0.$ Позначимо $\xi_n=\xi\left(\tau_n+0\right)$. Очевидно, послідовність $\left\{\xi_n,\ n\geq 1\right\}$ утворює однорідний ланцюг Маркова з фазовим простором $H^{-}=\left\{1^{-},\ 2^{-},\ \ldots,\ k^{-},\ \ldots\right\}$, який є вкладеним в досліджуваний процес $\varsigma\left(t\right)$.

Теорема 1. Якщо

$$\int\limits_{0}^{\infty}\left[\int\limits_{0}^{u}\left(1+\mu^{+}\left(u-v\right)\right)f\left(0,v,u\right)\exp\left\{\mu^{+}\left(u-v\right)\right\}\right]\lambda^{+}\left(u\right)\mathrm{d}u>1, \tag{5}$$

то граничний розподіл вкладеного ланцюга $\left\{\xi_n,\ n\geq 1\right\}$

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\xi_n=k^{-}\right\}=\rho_{k^{-}} \tag{6}$$

існує і задається формулами

$$\rho_{k^{-}}=\left(1-\omega\right)\omega^{k-1}\quad\left(k\geq 1\right), \tag{7}$$

де ω – єдиний корінь рівняння

$$\begin{aligned}\omega=&\int\limits_{0}^{\infty}\exp\left\{-\int\limits_{0}^{u}\left(\lambda^{-}\left(v\right)+\mu^{-}\right)\mathrm{d}v\right\}\lambda^{-}\left(u\right)\mathrm{d}u+\\&+\omega\int\limits_{0}^{\infty}\left[\int\limits_{0}^{u}\exp\left\{\mu^{+}\left(u-v\right)\omega\right\}f\left(0,v,u\right)\mathrm{d}v\right]\lambda^{+}\left(u\right)\mathrm{d}u,\end{aligned} \tag{8}$$

що лежить в інтервалі $\left(0,1\right)$.

Доведення. Очевидно, ймовірності переходу за один крок для вкладеного ланцюга $\left\{\xi_n,\ n\geq 1\right\}$

$$\rho_{i^{-}j^{-}}=P\left\{\xi_{n+1}=j^{-}/\xi_n=i^{-}\right\},\ i,j\in H^{-}$$

задаються співвідношеннями

$$\rho_{j^-(j+1)^-} = \int_0^\infty r_{j^- j^-}(0,u)\lambda^-(u)\mathrm{d}u,$$

$$\rho_{i^- j^-} = \int_0^\infty r_{i^-(j-1)^+}(0,u)\lambda^+(u)\mathrm{d}u, \;\; i \ge j \ge 1.$$

Границі (6) існують в силу нерозкладності і неперіодичності ланцюга $\{\xi_n,\; n \ge 1\}$ і визначаються з системи рівнянь:

$$\rho_{i^-} = \sum_{k=\max(i-1,1)}^{\infty} \rho_{k^-}\rho_{k^- i^-}, \;\; \sum_{\mathrm{k}=1}^{\infty}\rho_{k^-} = 1. \tag{9}$$

Будемо шукати розв’язок системи (9) у вигляді:

$$\rho_{i^-} = c\omega^{i-2}, \;\; i \ge 2. \tag{10}$$

Підставивши (10) у (9), отримаємо, що ω задовольняє рівняння:

$$\omega = \rho_{(i-1)^- i^-} + \sum_{k=i}^{\infty}\rho_{k^- i^-}\omega^{k-i+1} \;,$$

яке після деяких перетворень можна привести до виду (8).

Позначимо праву частину (8) через $\varphi(\omega)$. Функція $\varphi(\omega)$ володіє наступними властивостями:

$$\varphi(0) = \rho_{(i-1)^- i^-} > 0, \;\; \varphi(1) = \sum_{k=i-1}^{\infty}\rho_{k^- i^-} = 1,$$

$$\varphi''(\omega) = \sum_{k=i+1}^{\infty}\big(k-i+1(k-i)\big)\rho_{k^- i^-}\omega^{k-i-1} > 0 \;\; \forall\omega > 0.$$

Тому, для того щоб в $(0,1)$ для рівняння $\omega = \varphi(\omega)$ існував розв’язок і був єдиним, необхідно і достатньо, щоб

$$\left.\frac{\mathrm{d}\varphi(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega=1} > 1.$$

Ця умова зводиться до умови (5).

Залишається визначити ρ_{1^-} та $c.$ Із співвідношень (9) після нескладних обчислень отримуємо:

$$\rho_{1^-} = \frac{c}{\omega}, \;\; c = (1-\omega)\omega.$$

Таким чином, граничний розподіл вкладеного ланцюга $\{\xi_n,\; n \ge 1\}$ співпадає з геометричним розподілом (7) і теорема доведена.

Наслідок 1. При $\mu^\pm = \mu,\; \lambda^\pm(u) = \lambda(u)$ (система $GI/M/1$**)** умова (5) набуває виду

$$\mu\int_0^\infty u\lambda(u)\exp\left\{-\int_0^u\lambda(v)\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}u>1$$

або, якщо $F(x)$ – функція розподілу довжин інтервалів між надходженнями заявок, отримуємо відомий результат [2]:

$$\mu\int_0^\infty u\mathrm{d}F(u)>1.$$

Ергодичність процесу $\varsigma(t)$.

Система $(GI/M/1)^{\pm}$ є двоїстою по відношенню до системи масового обслуговування $(M/G/1)^{\pm}$, яка була досліджена в роботі [6].

Повторюючи міркування, які використовувались при доведенні теореми 2 для системи $(M/G/1)^{\pm}$, можна отримати аналогічну ергодичну теорему для процесу обслуговування $\varsigma(t)$ в системі $(GI/M/1)^{\pm}$.

Теорема 2. Якщо

1) вкладений ланцюг $\{\xi_n,\ n\ge 1\}$ є ергодичним зі стаціонарним розподілом

$$\left\{\rho_{1^-},\ \rho_{2^-},\ \dots,\ \rho_{k^-},\ \dots\right\}$$

і

2) $$a^{-1}=\int_0^\infty\left[\exp\left\{-\int_0^u\left(\lambda^-(v)+\mu^-\right)\mathrm{d}v\right\}+\frac{1-\omega}{\omega}\sum_{k=0}^\infty R_{k^-}(0,u,\omega)\right]\mathrm{d}u>1,$$

то існують границі

$$\lim_{t\to\infty}P\left\{\xi(t)=k^{\pm},\ \eta(t)\le x\right\}=\int_0^x\varphi_{k^{\pm}}(y)\mathrm{d}y,$$

де

$$\varphi_{k^+}(y)=\frac{a(1-\omega)}{\omega}R_{k^-}(0,y,\omega),\ \ k\ge 0,$$

$$\varphi_{k^-}(y)=a(1-\omega)\omega^{k-1}\exp\left\{-\int_0^y\left(\lambda^-(v)+\mu^-\right)\mathrm{d}v\right\},\ \ k\ge 1.$$

Наслідок 2 (система $GI/M/1$**) .** Нехай

$$\lambda^{\pm}(x)=\lambda(x),\ \mu^{\pm}=\mu,\ \left\langle k^{\pm}\right\rangle=k,\ \left\langle\varsigma(t)\right\rangle=\hat{\varsigma}(t)=\left\{\hat{\xi}(t),\hat{\eta}(t)\right\},$$

$\left\{\hat{\xi}_n,\ n\ge 1\right\}$ – ланцюг Маркова, вкладений в процес $\hat{\varsigma}(t)$:

$$\hat{\xi}_n=\hat{\xi}_{\tau_n+0},\ \hat{\eta}_{\tau_n-0}>0,\ \hat{\eta}_{\tau_n+0}=0$$

і

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\hat{\xi}_n=k\right\}=\rho_k,\ k\ge 1.$$

Якщо ланцюг $\left\{\hat{\xi}_n,\ n \ge 1\right\}$ ергодичний і

$$a^{-1} = \int_0^\infty \exp\left\{-\int_0^u \lambda(v)\,\mathrm{d}v\right\}\mathrm{d}u < \infty,$$

то

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\hat{\xi}(t) = k,\ \hat{\eta}(t) \le x\right\} = F_k(k),$$

де

$$F_0(x) = \hat{a}\,\frac{1-\hat{\omega}}{\hat{\omega}} \int_0^x \left[R_0(0,u,\hat{\omega}) - \exp\left\{-\int_0^u \lambda(v)\,\mathrm{d}v\right\}\right]\mathrm{du},$$

$$F_k(x) = \hat{a}(1-\hat{\omega})\hat{\omega}^{k-1}\int_0^x \exp\left\{-\mu u(1-\hat{\omega}) - \int_0^u \lambda(v)\,\mathrm{d}v\right\}\mathrm{du}$$

$$\left(R_0(0,u,\hat{\omega}) = \frac{1}{1-\hat{\omega}}\left(\exp\left\{\mu u(1-\hat{\omega})\right\} - \hat{\omega}\right)\exp\left\{-\int_0^u \lambda(v)\,\mathrm{d}v - \mu(1-\hat{\omega})u\right\}\right),$$

$\hat{\omega}$ – єдиний корінь рівняння

$$\hat{\omega} = \int_0^\infty e^{-\mu u(1-\hat{\omega})}\mathrm{d}F(u) \quad \left(F'(u) = \lambda(u)\exp\left\{-\int_0^u \lambda(v)\,\mathrm{d}v\right\}\right),$$

що лежить в інтервалі $(0,1)$.

Стаціонарний розподіл вкладеного ланцюга обчислюється за формулами

$$\rho_i = (1-\hat{\omega})\hat{\omega}^{i-1},\ i \ge 1.$$

Нескладно помітити, що постійна a^{-1} представляє собою математичне сподівання часу між послідовними моментами надходження заявок:

$$a^{-1} = M\left\{\tau_{n+1} - \tau_n\right\}.$$

Висновки. У роботі знайдені наступні характеристики системи $(GI/M/1)^{\pm}$ – умовний розподіл часу до першого стрибка дискретної компоненти та умовний розподіл числа заявок, обслужених в інтервалі між послідовними надходженнями заявок.

Досліджені умови існування стаціонарного розподілу вкладеного ланцюга Маркова, пов'язаного з точками регенерації системи, та знайдені вирази для граничних ймовірностей його станів.

Ці характеристики використовуються при з'ясуванні умов існування стаціонарного режиму в системі, тобто умов, за яких черга заявок на обслуговування не зростає необмежено з плином часу. Як наслідок, отримані відомі співвідношення , знайдені для $GI/M/1$.

Бібліографічні посилання

1. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М.: URSS, 2013. 400 с.
2. Броди С.М., Погосян И.А. Вложенные стохастические процессы в теории массового обслуживания. Киев: «Наукова думка», 1973. 128 с.
3. Габровски И.З., Ежов И.И., Захарин А.М. Об одном обобщении полумарковских процессов. *Теория вероятностей и математическая статистика: сб. научн. тр*. Вып.9. 1973.
4. Ежов И.И. Цепи Маркова с дискретным вмешательством случая, образующим полумарковский процесс. *УМЖ*. 1966. С. 48-65.
5. Аннаев Т. О системе массового обслуживания типа $\left(M/M/1\right)^{\pm}$. *Теория вероятностей и математическая статистика: сб. научн. тр*. Вып.4. 1971.
6. Послайко Н.И. Исследование стационарного режима в системе массового обслуживания типа $\left(M/G/1\right)^{\pm}$. *Сборник «Исследования по теории случайных процессов»*. Изд. Института математики АН УССР, 1976. С. 141-151.
7. Арсенишвили Г.Л. Об одной задаче массового обслуживания. *Сообщения АН ГССР*. 1970. 59. №3. С. 545-548.
8. Послайко Н.І. Застосування узагальненої моделі загибелі та народження до задач масового обслуговування і надійності. *Питання прикладної математики і математичного моделювання: зб. наук. пр.* 2020. С. 131-140.

Надійшла до редколегії 16.06. 2021.