УДК 681.5.015

Р. Н. Квєтний, Я. А. Кулик
Вінницький національний технічний університет

АНАЛІЗ ДИСКРЕТНИХ СИГНАЛІВ З ВИКОРИСТАННЯМ БАЗИСУ ОРТОГОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

Розглянута задача аналізу дискретного сигналу в базисі ортогональних функцій. Теоретичні засади їх використання розроблені лише для лінійних систем управління і лише у випадку неперервних сигналів. На сьогоднішній день реалізуються, в основному, дискретні комп'ютерні системи різного функціонального призначення з, відповідно, дискретними сигналами. Запропоновано використання методів спектрального аналізу з використання вейвлет-функцій для дискретних систем з дискретними сигналами.

Рассмотрена задача анализа дискретного сигнала в базисе ортогональных функций. Теоретические основы их использования разработанны только для линейных систем управления и только в случае непрерывных сигналов. На сегодняшний день реализуются, в основном, дискретные компьютерные системы разного функционального назначения с, соответственно, дискретными сигналами. Предложено использование методов спектрального анализа с использованием вейвлет-функций для дискретных систем с дискретными сигналами.

The problem of analysis of discrete signal in the basis of orthogonal functions is considered. Theoretical basis of its usage was developed only for linear control systems and only in the continuous signals' case. Nowdays basically discrete computer systems with different functional purpose with respective discrete signals are realized. Spectral analysis methods using wavelet-functions for discrete systems with discrete signals were proposed.

Ключові слова: спектральний аналіз, кореляційний аналіз, ортогональні функції.

Вступ. На даний час існує багато різних базисів ортогональних функцій, але найбільш ефективні серед них вейвлет-функції. Через те, що вейвлети з'явились порівняно недавно, їх особливості та перспективи з точки зору практичного використання вивчені недостатньо. Вейвлет-аналіз більш інформативний, ніж аналіз з використанням перетворення Фур'є, оскільки останній не дає інформації про часове розташування спектральних складових. Але не для всіх випадків розроблені теоретичні засади для використання вейвлет-перетворень. Зокрема їх використання розроблене лише для лінійних систем управління з неперервними сигналами. Але на сьогоднішній день через свою простоту і універсальність набагато більше використовуються комп'ютерні системи, які дискретні за своєю природою і завжди використовують дискретні сигнали. Якщо на певному етапі використовуються аналогові сигнали (наприклад – збір інформації з датчиків), то вони обов'язково перетворюються в дискретні, після чого їх може обробити комп'ютерна система. Тому доцільно розширити область використання методів спектрального аналізу в базисі ортогональних функцій для дискретних систем з, відповідно, дискретними сигналами.

Сигнал розглядається як випадковий, оскільки в процесі передавання на нього накладається випадкова складова. У такому випадку найбільш ефективними методами для аналізу сигналу будуть кореляційні та спектральні методи.

Завдяки можливості локалізації сигналу одночасно в частотному і часовому просторі, вейвлети використовуються для забезпечення розв'язку задач апроксимації, регресії, прогнозування, фільтрації, ідентифікації тощо [1–3].

Спектральний аналіз широко використовується у сейсмології, акустиці, медицині, зв'язку, оброблюванні сигналів та зображень і тому багато праць присвячено його застосуванню в окремих галузях [4]. Для цих самих задач існує також широко выдомий метод кореляційного аналізу.

Вейвлет-аналіз може використовуватись для всіх тих задач, для яких використовується звичайний спектральний аналіз у базисі Фур'є. При цьому вейвлети мають кращу часову і частотну локалізацію: звичайне перетворення в базисі Фур'є не дає відповіді про часову локалізацію складових спектру, а віконне перетворення Фур'є дає часткову відповідь про часову локалізацію (рис. 1).

Співвідношення точності частотної і часової локалізації підкоряється принципу невизначеності Гейзенберга.

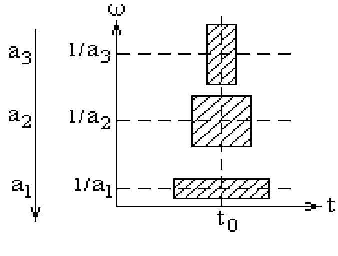

Рис. 1. Співвідношення частотної і часової локалізації вейвлетів

Зараз широко досліджуються як теоретичні, так і практичні аспекти вейвлет-перетворень [1].

Метою роботи є підвищення ефективності передавання дискретних сигналів шляхом підвищення достовірності аналізу сигналів на приймальній стороні завдяки використанню методів кореляційного та спектрального аналізу.

Визначення основних характеристик. Якщо заданий певний вейвлет-базис $\{\varphi_{j,k},\psi_{j,k}\}$, то будь-яку функцію $x(\tau)$ можна охарактеризувати коефіцієнтами [2]:

$$s_{j,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\varphi_{j,k}(\tau)d\tau; \tag{1}$$

$$d_{j,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\psi_{j,k}(\tau)d\tau. \tag{2}$$

Ця функція може бути відновлена зворотнім перетворенням за формулою

$$x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_{j_n,k}\varphi_{j_n,k}(\tau) + \sum_{j=j_n}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k}\psi_{j,k}(\tau). \tag{3}$$

В інтервальному вигляді незалежно від базису цей запис буде мати вигляд

$$g_{h,m}^{n}(\tau) = \begin{cases} \varphi_{n,m}(\tau) \quad \text{при } \mathrm{h} = 0; \\ \psi_{\mathrm{n+j,k+m}}(\tau) \quad \text{при } \mathrm{h} = 2^{\mathrm{j}} + k; \\ k = 0,1,\ldots,2^{j} - 1; \quad \mathrm{j} = 0,1,2,\ldots; \\ \mathrm{m,n} \in \mathrm{Z}. \end{cases} \tag{4}$$

Кратномасштабною спектральною характеристикою по інтервальному ортонормованому вейвлет-базису є функція, ординатами якої, при постійному параметрі масштабування, є коефіцієнти Фур’є-перетворення функції у заданому вейвлет-базисі

$$\underset{g}{S_m}[x] = \underset{g}{X_m}(h,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_m^{*}(h,t,\theta)x(\theta)d\theta\,. \tag{5}$$

Цю характеристику зручно представляти у вигляді матриці-стовпця

$$X = X(t) = \left[\ldots, X_{-1}(t), X_0(t), X_1(t), \ldots\right]^T. \tag{6}$$

Кратномасштабна спектральна характеристика представляться нескінченною клітинною матрицею-стовпцем коефіцієнтів у заданому вище базисі (4). Кратномасштабну базисну систему функцій (4) можна представити матрицею-рядком

$$G(\tau) = G(\tau,t) = \left[\ldots, G_{-1}(\tau,t), G_0(\tau,t), G_1(\tau,t), \ldots\right]. \tag{7}$$

Тоді формули прямого і оберненого вейвлет-перетворення (5) – (7) можна представити

$$\underset{G_m}{X_m} = \underset{G_m}{S_m}[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} G_m^{*}(\tau)x(\tau)d\tau\,. \tag{8}$$

Обернене перетворення описується

$$x(\tau) = S^{-1}\underset{g}{[X]} = G(\tau)\underset{g}{X} = \sum_{m}\sum_{h=0}^{\infty} \underset{G_m}{X_m}(h)g_{h,m}(\tau)\,. \tag{9}$$

Для функцій двох змінних кратномасштабна двовимірна спектральна характеристика має вигляд

$$X_{n,m}(h,i) = \int_{-\infty}^{+\infty} q_h^{*}(h,t,\theta)\int_{-\infty}^{+\infty} p_m(i,t,\tau)x(\theta,\tau)d\tau d\theta\,. \tag{10}$$

Цю характеристику можна представити у вигляді нескінченної квадратної клітинної матриці

$$X_{n,m}=\begin{bmatrix} X_{n,m}(0,0) & X_{n,m}(0,1) & \cdots & X_{n,m}(0,i) & \cdots \\ X_{n,m}(1,0) & X_{n,m}(1,1) & \cdots & X_{n,m}(1,i) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ X_{n,m}(h,0) & X_{n,m}(h,1) & \cdots & X_{n,m}(h,i) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad (11)$$

кожна комірка якої є коефіцієнтом у заданому вище інтервальному вейвлет-базисі (4).

Формула обернення для характеристики (10), записана в матричній формі, має вигляд [5]

$$S^{-1}[\underset{qp^*}{X}]=x(\theta,\tau)=Q(\theta)\cdot \underset{qp^*}{X}\cdot P^T(\tau)\,. \qquad (12)$$

Метод спектрального аналізу в базисі ортогональних функцій. В основі спектрального методу лежить поняття спектральної характеристики, яке дає цілий ряд характеристик, використовуваних для опису сигналів і систем.

Отримання спектральних зв’язків вхід-вихід системи базується на відомому співвідношенні в часовій області

$$x(\theta)=\int_{-\infty}^{+\infty} k(\theta,\tau)g(\tau)d\tau\,, \qquad (13)$$

де $k(\theta,\tau)$ – імпульсна перехідна функція неперервної системи, визначена на всій області дійсних значень.

Після обчислення інтегралу (13) і від нього кратномасштабної спектральної характеристики за формулою (5), можна отримати

$$X_n(h)=\sum_m\sum_i W_{n,m}(h,i)G_m(i)\,, \qquad (14)$$

де $W_{n,m}(h,i)$ – кратномасштабна двовимірна перехідна функція системи управління з імпульсною перехідною функцією $k(\theta,\tau)$; $G_m(i)$ – кратномасштабна спектральна характеристика відповідно вхідного сигналу $g(\tau)$; $X_n(h)$ – кратномасштабна спектральна характеристика відповідно вихідного сигналу $x(\tau)$.

Спектральні зв'язки вхід-вихід при випадкових впливах знаходяться усередненням по безлічі реалізацій правої і лівої частини виразу (14) з урахуванням властивості кратномасштабної спектральної щільності, що описується формулою

$$S_x=M[X], \qquad (15)$$

де M – символ операції обчислення математичного сподівання.

Усереднюючи по безлічі реалізацій праву і ліву частини отриманого виразу і враховуючи властивість кратномасштабної спектральної характеристики, що описується формулою

$$S_x=M\left\lfloor X_{сл}\cdot X_{сл}^T\right\rfloor, \qquad (16)$$

можна отримати алгоритм, який встановлює зв’язок між нестаціонарною кратномасштабною спектральною щільністю вхідного і вихідного випадкових сигналів через кратномасштабну двовимірну перехідну функцію шуканої системи

$$S_x=W\cdot S_g\cdot W^T\,. \qquad (17)$$

Кратномасштабна двовимірна перехідна функція і кратномасштабна спектральна щільність дозволяють знайти взаємну кратномасштабну спектральну щільність вхідного і вихідного випадкових сигналів шуканої системи за формулою

$$S_{xg}=W\cdot S_g\,. \qquad (18)$$

Спектральні перетворення для кореляційного аналізу. Спектральна характеристика математичного сподівання випадкової функції однієї змінної x

$$S_x(i,t) = \int_0^t p^*(i,t,\theta) m_x(\theta) d\theta \ . \qquad (19)$$

Спектральна щільність кореляційної функції $R_{xx}(\theta,\tau)$ випадкового в загальному випадку сигналу x

$$\underset{pp^*}{S_x}(h,i,t,t) = \int_0^t p^*(h,t,\theta) \int_0^t p(i,t,\tau) R_{xx}(\theta,\tau) d\tau d\theta \, . \qquad (20)$$

Спектральна щільність взаємної кореляційної функції $R_{xg}(\theta,\tau)$ випадкових сигналів x і g

$$\underset{pp^*}{S_{xg}}(h,i,t,t) = \int_0^t p^*(h,t,\theta) \int_0^t p(i,t,\tau) R_{xg}(\theta,\tau) d\tau d\theta \, . \qquad (21)$$

Першою величиною кратномасштабної спектральної щільності випадкового в загальному випадку сигналу буде кратномасштабна спектральна характеристика його математичного сподівання

$$\underset{g}{S_x^n}(i) = \underset{g}{S_n}[m_x] \, . \qquad (22)$$

Другою величиною кратномасштабної спектральної щільності або просто кратномасштабною спектральною щільністю випадкового в загальному випадку сигналу буде кратномасштабна двовимірна спектральна характеристика його кореляційної функції

$$\underset{pp^*}{S_x^{m,k}}(h,i) = \underset{pp^*}{S_{m,k}}[R_{xx}] \, . \qquad (23)$$

Під кореляційною функцією тут можна розуміти як центровану миттєву функцію випадкового сигналу, так і початкову миттєву функцію випадкового сигналу.

Кратномасштабною взаємною спектральною щільністю $S_{xg}^{n,k}(h,i)$ випадкових сигналів x, g буде кратномасштабна двовимірна спектральна характеристика взаємної кореляційної функції цих сигналів R_{xg}

$$\underset{qp^*}{S_x^{n,k}}(h,i) = \underset{pp^*}{S_{n,k}}[R_{xx}] \, . \qquad (24)$$

Обернений перехід від нестаціонарної кратномасштабної спектральної щільності (22) – (24) до початкових характеристик випадкового сигналу здійснюються за формулами обернення (8), (12):

$$m_x = \underset{g}{S^{-1}}[S_x] \qquad (25)$$

для математичного сподівання;

$$R_{xx} = S^{-1}[\underset{pp^*}{S_x}] \qquad (26)$$

для автокореляційної функції;

$$R_{xg} = S^{-1}[\underset{qp^*}{S_{xg}}] \qquad (27)$$

для функції взаємної кореляції.

Знайдені зв'язки (19) – (24) вирішують задачу визначення характеристик вихідних сигналів лінійних систем управління при детермінованих і випадкових вхідних сигналах. Вирази (22) – (24) можуть використовуватись для аналізу сигналів у рамках кореляційної теорії [5].

Кореляційний аналіз сигналів. Вищеописані перетворення дозволяють здійснити кореляційний аналіз сигналів. Кореляційний аналіз сигналів полягає у порівнянні сигналу з еталонним через кореляційну та автокореляційну функцію

$$R_{xx}(\omega,\tau)=\int_0^t x(t)x(t-\tau)e^{-j\omega}dt\,, \tag{28}$$

де ω і τ - відповідно частотне і часове зміщення сигналу *x(t)*

$$R_{xy}(\omega,\tau)=\int_0^t x(t)y(t-\tau)e^{-j\omega}dt\,, \tag{29}$$

де ω і τ - відповідно частотне і часове зміщення сигналу *x(t)* відносно *y(t).*

Приклад авто кореляційної функції показаний на рис.3. При розрахунку кореляційних функцій для зручності порівняння енергії зв'язку між двома сигналами (коефіцієнт кореляції) потрібно виконати умову нормування. Ця умова записується у вигляді [6]:

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)dt=1 \tag{30}$$

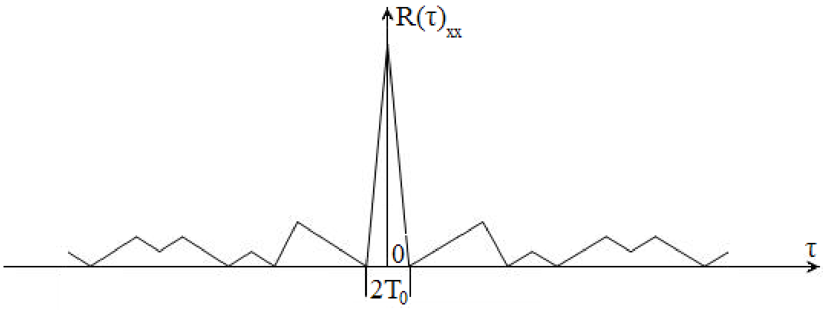

Рис. 2. Приклад автокореляційної функції

Знайшовши автокореляційну функцію сигналу, її порівнюють з автокореляційними функціями можливих інформативних сигналів (порівняння можна проводити за критерієм мінімум середньоквадратичного відхилення (31), і якщо автокореляційні функції майже повністю співпадають (різниця не перевищує 10 %), робиться висновок, що прийнятий сигнал є той, з автокореляційною функцією якого найбільше співпадіння.

$$\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}\int_0^T (R^*(t)-R(t))^2\,dt}\,, \tag{31}$$

де $R^*(t)$ – оцінка кореляційної функції прийнятого сигналу, $R(t)$ – оцінка кореляційної функції еталонного сигналу, *n* – кількість відрахунків.

Також в якості критерію для висновку, що прийнятий і еталонний сигнал однакові, можна використовувати критерій Фішера [8].

Кореляційні функції мають вигляд подібний до автокореляційних функцій, зображених на рис. 2. У випадку, якщо точно відомий момент приходу сигналу, то вершина отриманої від нього кореляційної функції буде проходити через вісь ординат [7]. З (29) зрозуміло, що кореляційна функція завжди буде симетрична. Аналіз сигналів через кореляційні функції проводиться шляхом порівняння максимального значення *max(R(τ))* (це вершина кореляційної функції) серед кореляційних функцій, отриманих згорткою з кожним із можливих сигналів. Якщо точно відомий момент приходу сигналу, то

$$max(R(\tau))= R(0). \tag{32}$$

Іноді кореляційна функція визначається через центровану функцію

$$R_{xy}(\tau)=\frac{1}{T}\int_0^T (x(t)-m_x)(y(t-\tau)-m_y)dt\,, \tag{33}$$

або якщо $\tau = 0$, то

$$R_{xy}(0) = \frac{1}{T}\int_0^T (x(t) - m_x)(y(t) - m_y)dt \ . \qquad (34)$$

Аналіз швидкодії методів. Як аналоговий, так і дискретний сигнал можна задати у вигляді набору значень. Так, наприклад, зберігаються сигнали в пам'яті пристроїв – оскільки пам'ять завжди обмежена, безперервний сигнал зберігається у вигляді набору значень. Ці значення отримуються після дискретизації сигналу після аналогово-цифрового перетворення. Якщо є потреба – таку саму процедуру можна зробити з дискретним сигналом. Якщо сигнал задається у вигляді набору значень, тобто масивом, то всі операції, такі як (8) – (10) зручніше робити чисельно. В них операції інтегрування замінені операцією суми. Тобто фактично операції будуть виконуватись з матрицями. Таким чином, окремим питанням є – як буде залежати час на виконання методу, тобто час обчислень від розміру вхідних даних. Результати дослідження часу виконання обрахунків від розміру вхідних даних показана на рис. 3.

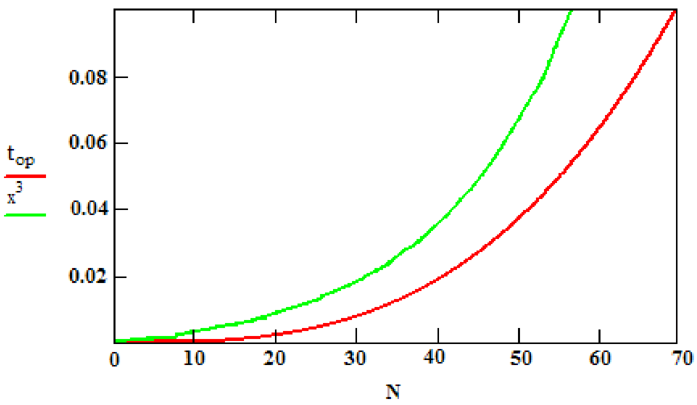

Рис. 3. Залежність часу на виконання обчислень від розміру вхідних даних

Якщо порівняти спектральний метод з кореляційним, то стане зрозуміло, що для кореляційного аналізу потрібно буде значно менше обчислювальних ресурсів, ніж для спектрального, оскільки весь математичний апарат для нього значно простіший.

Для операцій з матрицями складність складає *O*(n^3), але існують методи для зменшення кількості операцій. Для розріджених матриць ця складність буде ще менша. Для порівняння поряд з графіком експериментальних даних показаний графік кубічної параболи. Як видно з рисунка час обчислення менше, ніж для кубічної залежності і зі збільшенням розмірності цей розрив зростає – залежність стає все далі від кубічної. Це наслідок того, що при великих об'ємах даних матриці часто розріджені, тобто мають багато нулів, і що дозволяє програмі виконати оптимізацію за параметром швидкодії.

Висновки. У даній статті запропоновано використання методів спектрального аналізу з використання вейвлет-функцій для дискретних систем з дискретними сигналами.

Ці методі достатні для повного аналізу сигналу. Вони дозволяють чітко і майже повністю розділити сигнал та випадкову складову (шум).

Хоча методи оперують однаковими характеристиками, вони є незалежними. Для підвищення ефективності аналізу сигналу рекомендується використовувати обидва методи. Це особливо потрібно, коли важлива висока надійність передавання інформації. Використання послідовно цих двох методів може замінити не завжди ефективний метод повторного передавання інформації.

З практичної точки зору, дані методи дозволяють розширити діапазон роботи при складних умовах передавання інформації інформаційно-вимірювальних системах, підвищити завадозахищеність та достовірність аналізу сигналів на приймальній стороні (повна працездатність системи без додаткових витрат зберігається при співвідношенні сигнал/шум h = 5 при нормативних вимогах h = 100).

Недоліком даних методів може бути низька швидкодія через велику кількість обчислювальних операцій з матрицями. Теоретично складність обчислень наближається до кубічної, з використанням методів швидких обчислень – дещо нижча, що видно з графіків на рис. 3.

Бібліографічні посилання

1. **Зверев В.А.** Выделение сигналов из помех численными методами / В.А. Зверев, А.А. Стромков. – Нижний Новгород, 2001. – 188 с.
2. **Добеши И.** Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. – Ижевск, 2001. – 464 с.
3. **Чуи К.** Введение в вэйвлеты: пер. с англ. /К. Чук – М., 2001. – 412 с.
4. **Рогозинский Г.Г.** К выбору оптимального вейвлета для перцепционного кодирования звуковых сигналов // Тр. 12-й Междунар. конф. «Цифровая обработка сигналов и её применение (DSPA-2010)» [Електронний ресурс] / Г.Г. Рогозинский – С.-Пб. – 2010. – Режим доступу: http://www.autex.spb.ru/dspa2010-1.pdf.

5. **Рыбин В. В.** Описание сигналов и линейных нестационарных систем управления в базисах вейвлетов и их анализ в вычислительных средах // труды МАИ. – М. – 2003. [Електронний ресурс] / В.В. Рыбин – Режим доступу: http://www.mai.ru/science/trudy/index.htm.
6. **Сысун В.И.** Теория сигналов и цепей [Електронний ресурс] / В.И. Сысун, П.П. Борисков, А.А. Величко / Режим доступу: http://dee.karelia.ru/files/ circuit/Ps15.htm.
7. Идентификация объектов управления методом корреляционного анализа [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://www.promtehsnab.net/ theoryt5r7part1.html.
8. **Кулик А.Я.** Побудова приймача з використанням дискримінантної процедури на засадах критерію Фішера / А.Я. Кулик, С.Г. Кривогубченко, Я.А. Кулик // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. – №6. – Харків, 2007. – С. 221-224.

Надійшла до редколегії 12.12.2011