УДК 519.6 doi: 10.15421/322105

Л.Л. Гарт, Т.О. Фірсова, Н.Є. Яцечко
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ СІТКОВИХ АЛГОРИТМІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ КОЕФІЦІЄНТНОЇ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ

Розроблено, алгоритмізовано та програмно реалізовано сіткові регуляризуючі схеми для розв'язання коефіцієнтної оберненої задачі для еліптичного рівняння другого порядку з мішаними крайовими умовами. Вивчено властивості еквівалентної задачі оптимального керування за наявності диференціальних обмежень еліптичного типу зі змінними коефіцієнтами та обмежень на керуючий вплив. Досліджено практичну збіжність та ефективність обчислювальних алгоритмів, заснованих на методі сіток і ітераційних методах градієнтного типу, проведено порівняльний аналіз результатів роботи зазначених алгоритмів на прикладі розв'язання конкретних задач.

Ключові слова: коефіцієнтна обернена задача, еліптична система, оптимальне керування, цільовий функціонал, різницева схема, збіжність.

L.L. Hart, T.O. Firsova, N.Y. Yatsechko
Oles Honchar Dnipro National University

NUMERICAL IMPLEMENTATION OF GRID ALGORITHMS FOR SOLVING THE COEFFICIENT INVERSE PROBLEM FOR AN ELLIPTIC EQUATION

Optimal control problems for elliptic systems have numerous applications in science, technology, and production. Most often, these problems can be considered as extreme problems in appropriately selected functional spaces, and for their study the apparatus and methods of functional analysis can be used. There are many approximate methods and algorithms to solve optimal control problems for systems described by elliptic type partial differential equations, but such methods' presence does not exclude the possibility of creating new efficient computational schemes and improving existing ones.

In this paper, we develope and investigate the practical convergence of regularizing algorithms based on the grid method and iterative gradient methods for solving one coefficient inverse problem for a second order elliptic equation with mixed boundary conditions. We study the properties of an equivalent optimal control problem in the presence of elliptic differential constraints with variable coefficients and control constraints, develop and implement software for the specified computational algorithms, as well as perform a qualitative comparative analysis of the results obtained by the example of solving specific problems.

The paper provides a review of the literature on solving ill-posed extremal problems and discusses the results on the development, algorithmization and software implementation of grid regularizing schemes for solving the coefficient inverse problem for an elliptic equation. The convergence of the developed algorithms is shown, conclusions about their

effectiveness are formulated.

Keywords: coefficient inverse problem, elliptic system, optimal control, objective functional, finite-difference scheme, convergence.

Л.Л. Гарт, Т.А. Фирсова, Н.Е. Яцечко

Днипровский национальный университет имени Олеся Гончара

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ СЕТОЧНЫХ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Разработаны, алгоритмизированы и программно реализованы сеточные регуляризирующие схемы для решения коэффициентной обратной задачи для эллиптического уравнения второго порядка со смешанными краевыми условиями. Изучены свойства эквивалентной задачи оптимального управления при наличии дифференциальных ограничений эллиптического типа с переменными коэффициентами и ограничений на управляющее воздействие. Исследованы практическая сходимость и эффективность вычислительных алгоритмов, основанных на методе сеток и итерационных методах градиентного типа, проведен сравнительный анализ результатов работы упомянутых алгоритмов на примере решения конкретных задач.

Ключевые слова: коэффициентная обратная задача, эллиптическая система, оптимальное управление, целевой функционал, разностная схема, сходимость.

Вступ. Теорія і методи розв'язання некоректних задач стали в останні роки одним з найбільш плідних напрямків новітньої обчислювальної математики. Розвиток теорії і методів розв’язання таких задач був зумовлений широким впровадженням комп’ютерних систем в математичні дослідження і економічні процеси, що в свою чергу, зумовило потік найрізноманітніших задач, розв’язязання яких було необхідне в найкоротші терміни. У зв’язку з цим постала проблема створення таких наближених методів, які могли бути застосовні для розв’язання істотно ширшого класу задач, не стиснутого жорсткими рамками коректності їх математичної постановки. Тільки за цієї умови можна було впоратися з задачами (в основному некоректними), що виникають у геофізиці, спектроскопії, електронній мікроскопії, автоматичному регулюванні, теплофізиці, гравіметрії, електродинаміці, техніці, теорії обробки фізичних експериментів, теорії наближень та інших областях науки і практики.

Огляд літератури. Основні підходи до наближеного розв’язання некоректних задач пов'язані з тим чи іншим збуренням вихідної задачі, переходом до деякої «близької», але вже коректної задачі. На цьому шляху отримують різні алгоритми регуляризації. Зокрема, перехід до коректної задачі може здійснюватися за рахунок збурення вихідного рівняння, переходу до варіаційної задачі і т. п. Найважливіше значення має проблема вибору параметра регуляризації, його узгодження з похибками вхідних даних.

Поняття коректної варіаційної задачі було введено А.М. Тихоновим в роботі [1] під час досліджень некоректних задач оптимального керування: було розвинуто теорію регуляризації, введено поняття регуляризуючого функціоналу і доведено рівномірну збіжність послідовностей елементів, що його мінімізують, а також їх стійкість відносно збурень, за спеціального вибору параметра регуляризації.

У роботі [2] запропонована ідея використання методів оптимального керування для розв'язання обернених задач. Справа в тому, що обернені задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними можуть бути поставлені в варіаційній формі, тобто як задача оптимального керування відповідними системами. При цьому керування зазвичай визначається критеріями якості, складеними на основі додаткової інформації про стан системи.

Більш детальний огляд методів розв'язання некоректних екстремальних задач міститься в роботах [3, 4]. Зокрема, розглянуто основні найвикористаніші методи розв'язання некоректно поставлених екстремальнних задач, в тому числі основані на регуляризації, та їх теоретичне обґрунтування.

Слід відзначити, що коефіцієнтні обернені задачі типу керування з додатковими нелокальними умовами є мало вивченими. У роботі [5] розглянуто таку задачу з критерієм якості, що відповідає додатковій інтегральній умові, досліджено питання коректності постановки оберненої задачі типу керування, доведено диференційованість за Фреше критерію якості і знайдено вираз для його градієнта. Подальшому дослідженню саме цієї задачі і побудові числових алгоритмів для її наближеного розв'язання присвячена дана стаття.

Метою даної роботи є розробка, алгоритмізація та програмна реалізація сіткових обчислювальних схем розв'язання коефіцієнтної оберненої задачі для двовимірного еліптичного диференціального рівняння з мішаними крайовими умовами і додатковою інтегральною умовою.

Постановка задачі. Нехай в квадраті

$$\bar{\Omega} = \Omega + \Gamma = \{x = (x_1, x_2):\ 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 1\}$$

з межею Γ задано еліптичне диференціальне рівняння другого порядку

$$-\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_i(x) \frac{\partial y}{\partial x_i}(x) \right) + u(x_2) y(x) = f(x), \quad x \in \Omega \qquad (1)$$

з крайовою умовою другого роду

$$-k_1(x) \frac{\partial y}{\partial x_1}(x) = g(x), \quad x \in \Gamma_{-1} \qquad (2)$$

на лівій вертикальній стороні $\Gamma_{-1} = \{x = (x_1, x_2):\ x_1 = 0,\ 0 < x_2 < 1\}$ квадрата $\bar{\Omega}$ і крайовою умовою першого роду

$$y(x) = 0, \quad x \in \Gamma \setminus \Gamma_{-1} \qquad (3)$$

на інших сторонах $\bar{\Omega}$. Тут $f(x) \in L_2(\Omega),\ g(x) \equiv g(x_2) \in L_2(0,1)$ та $k_i(x) \in L_\infty(\Omega),\ i = 1,2$ – задані функції, що задовольняють умови $c_0 \le k_i(x) \le c_1,\ i = 1,2;$ $c_1 \ge c_0 > 0$ – відомі сталі; $y(x) \equiv y(x;u)$ – шукана функція для $x \in \bar{\Omega}$; $u \equiv u(x_2)$ – шуканий змінний коефіцієнт ($0 < x_2 < 1$), визначений на множині

$$U = \{u \equiv u(x_2) \in L_2(0,\ 1):\ q_0 \le u(x_2) \le q_1 \text{ для м.в. } x_2 \in (0,\ 1)\}, \qquad (4)$$

де $q_1 \ge q_0 > 0$ – відомі сталі.

Коефіцієнтна обернена задача для диференціального рівняння (1) полягає у визначенні функцій $y(x;u)$, $u(x_2)$, що відповідають умовам (1)–(4) і додатковій інтегральній умові

$$y(0,x_2) = \int_0^1 F(x_1,x_2)y(x_1,x_2)dx_1, \quad 0 < x_2 < 1, \tag{5}$$

де $F(x) \in L_\infty(\Omega)$ – задана функція, така, що $|F(x)| \le d$ майже всюди на Ω, $d > 0$ – відома стала.

Для зазначеної коефіцієнтної оберненої задачі (1)–(5) необхідно розробити сіткові обчислювальні схеми її розв’язання на основі варіаційного підходу з використанням методу регуляризації Тихонова і методів градієнтного типу для розв’язання послідовності регуляризованих екстремальних задач; створити програмний продукт, за допомогою якого дослідити практичну збіжність реалізованих алгоритмів на прикладі розв’язання модельних задач; провести аналіз отриманих результатів та сформулювати висновки щодо ефективності розроблених сіткових алгоритмів.

Метод розв’язання задачі. Зазначимо, що загальним розв’язком еліптичної крайової задачі (1)-(3), що відповідає коефіцієнту $u(x_2) \in U$, є функція $y \equiv y(x) \equiv y(x;u)$ з простору Соболєва $W_{2,0}^{(1)}(\bar{\Omega})$, яка задовольняє наступній інтегральній тотожності [5]:

$$\int \left[\sum_{i=1}^{2} k_i(x) \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + u(x_2) y \eta \right] dx = \int_\Omega f(x) \eta dx + \int_0^1 g(x_2) \eta(0,x_2) dx_2$$

для всіх $\eta = \eta(x) \in W_{2,0}^{(1)}(\Omega)$.

З урахуванням зроблених припущень, крайова задача (1)-(3) однозначно розв’язувана при кожному заданому $u \in U$ і справедлива наступна апріорна оцінка:

$$\| y \|_{2,\Omega} \le M \left[\| f \|_{2,\Omega} + \| g \|_{2,\Gamma_{-1}} \right].$$

Звідси та з обмеженості вкладень $W_2^{(1)}(\Omega) \to L_{r_1}(\Omega)$, $W_2^{(1)}(\Omega) \to L_{r_2}(\Gamma)$ випливає наступна оцінка

$$\| y \|_{r_1,\Omega} + \| y \|_{r_2,\Gamma_{-1}} \le M \left[\| f \|_{2,\Omega} + \| g \|_{2,\Gamma_{-1}} \right], \tag{6}$$

де $r_1, r_2 \in [2,\infty)$ – довільні числа, M – додатна стала. Оцінка (6) свідчить про неперервну залежність розв’язку $y(x;u)$ крайової задачі (1)–(3) від вихідних даних, тобто стійкість задачі за правою частиною і крайовими умовами.

Перейдемо до методу розв’язання розглядуваної некоректної коефіцієнтної оберненої задачі (1)–(5). На цю задачу можа дивитись як на задачу оптимального керування еліптичною системою (1)–(4) з критерієм якості, що відповідає додатковій інтегральній умові (5): мінімізувати функціонал

$$J(u)=\int_0^1\left(y(0,x_2;u)-\int_0^1 F(x_1,x_2)y(x_1,x_2;u)dx_1\right)^2 dx_2 \qquad (7)$$

за умов (1)–(4). У такій постановці слід розглядати шукану функцію $u\equiv u(x_2)$ із U як керуючий вплив на систему (1)–(3), а функцію $y(x)\equiv y(x;u),\ x\in\bar{\Omega}$, що є узагальненим розв’язком крайової задачі (1)–(3) при даному $u\in U$, – як шуканий стан системи.

Якщо $u^*\equiv u^*(x_2)\in U$ – керування, що доставляє мінімальне (нульове) значення функціоналу (7) за умов (1)–(4), то пара $(y(x;u^*),\ u^*(x_2))$ є розв'язком коефіцієнтної оберненої задачі (1)–(5). У роботі [5] встановлено слабку коректність задачі оптимального керування (1)–(4), (7), виведена формула для градієнта функціонала $J(u)$ і отримано необхідну умову оптимальності.

Теорема [5]. Функціонал $J(u)$ виду (7) неперервно диференційований за Фреше на множині U і для його градієнта справедлива наступна рівність:

$$J'(u)=\int_0^1 y(x_1,x_2;u)\ \psi(x_1,x_2;u)\ dx_1,\quad x_2\in(0,1)$$

де $\psi\equiv\psi(x)\equiv\psi(x;u)$ – узагальнений розв’язок спряженої задачі по відношенню до крайової задачі (1)-(3), що відповідає керуванню $u\equiv u(x_2)\in U$, яка має вигляд

$$-\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k_i(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}(x)\right)+u(x_2)\psi(x)=$$

$$=-2F(x_1,x_2)\left[y(0,x_2;u)-\int_0^1 F(\xi_1,x_2)y(\xi_1,x_2;u)d\xi_1\right],\quad x\in\Omega; \qquad (8)$$

$$-k_1(x)\frac{\partial\psi}{\partial x_1}(x)=2\left[y(0,x_2;u)-\int_0^1 F(\xi_1,x_2)y(\xi_1,x_2;u)d\xi_1\right],\quad x\in\Gamma_{-1}; \qquad (9)$$

$$\psi(x)=0,\quad x\in\Gamma\setminus\Gamma_{-1}. \qquad (10)$$

Таким чином, для задачі оптимального керування еліптичною системою (1)–(4), (7) необхідно розробити обчислювальні схеми розв’язання еліптичних мішаних крайових задач зі змінними коефіцієнтами (1)-(3) та (8)-(10) при фіксованому керуванні $u\equiv u(x_2)\in U$ і реалізувати регуляризаційні алгоритми мінімізації функціонала якості (7).

Для розв’язання зазначених еліптичних крайових задач було обрано метод скінчених різниць, включаючи різні ітераційні процедури розв’язання відповідних систем сіткових рівнянь [6–8], а для мінімізації функціонала – метод проекції градієнта.

Програмна реалізація. На основі розроблених алгоритмів розв’язання коефіцієнтної оберненої задачі для еліптичного рівняння було створено програмний продукт на мові програмування C#. Програма містить наступні основні модулі:

1. SolveMainBoundaryProblem – підпрограма для розв’язання основної крайової задачі (1)-(3) при фіксованому $u \in U$ методом скінченних різниць.

2. SolveConjugateBoundaryProblem – підпрограма для розв’язання спряженої крайової задачі (8)-(10) при фіксованому $u \in U$ методом скінченних різниць.

3. IterativeMethod1, IterativeMethod2, IterativeMethod3, IterativeMethod4 – підпрограми для розв’язання еліптичних різницевих рівнянь двошаровими методом Чебишова та методом простої ітерації, тришаровими напівітераційним методом Чебишова та стаціонарним методом відповідно.

4. VariationMethod – підпрограма розв’язання коефіцієнтної оберненої задачі варіаційним методом.

5. TikhonovMehod – підпрограма розв’язання коефіцієнтної оберненої задачі методом регуляризації Тихонова.

6. GradientIterativeMethod – підпрограма розв’язання коефіцієнтної оберненої задачі ітераційним градієнтним методом.

7. GradMethod – підпрограма методу проекції градієнта для мінімізації функціонала.

8. CreateTable – підпрограма виводу наближеного розв’язку розглядуваної задачі для кожного методу.

Користувач має змогу обрати параметри $N_1 > 0, N_2 > 0$ розбиття сітки та значення $\varepsilon > 0$ точності розрахунків і отримати результати розв’язання коефіцієнтної оберненої задачі, а саме: сіткові розв’язки $y_{ij}^{(k)}$ $(i = \overline{0, N_1},\ j = \overline{0, N_2})$ основної крайової задачі (1)-(3), отримані за допомогою варіаційного методу, методу регуляризації Тихонова та градієнтного методу (рис. 1); графіки цих розв’язків, що будуються за допомогою математичного пакету Maple, на основі файлу з програмними даними; сіткові функції $u_j^{(k)} \in U$ $(j = \overline{0, N_2})$, подані у вигляді таблиць та графіків для кожного методу розв’язання (рис. 2); значення сіткового функціонала на отриманому керуванні, подані в вигляді графіків; значення норми градієнту сіткового функціонала; кількість ітерацій, необхідних для мінімізації функціонала під час реалізації варіаційного методу, методу регуляризації Тихонова та кількість ітерацій під час реалізації ітераційного градієнтного методу; кількість $N > 0$ регуляризованих екстремальних задач, необхідних для забезпечення виконання умови $\| u_{\alpha_N} - u_{\alpha_{N-1}} \| < \varepsilon$ та оптимальне значення $\alpha_{опт} \approx \alpha_N$ параметра регуляризації.

Програмний продукт був відтестований на декількох модельних задачах виду (1)–(4), (7), зокрема на модельній задачі з такими вихідними даними:

$$f(x) = -2x_2 \cos x_2 - 4x_1 \cos x_2 + x_1^3 \cos x_2 + x_1^2 \left(x_2 \cos x_2 + \sin x_2 \right) + u(x_2) x_1^2 \cos x_2,$$

$$k_1(x) = k_2(x) = x_1 + x_2,\ \ x \in \Omega; \quad g(x) = -2x_1(x_1 + x_2)\cos x_2,\ \ x \in \Gamma_{-1},$$

функцією $F(x) \equiv 1,\ x \in \Omega$ у функціоналі (7) та сталими $q_0 = 0{,}1;\ q_1 = 1$ у формулі (4). Точний розв’язок такої задачі відомий і дорівнює $y(x_1, x_2) = x_1^2 \cos x_2$. Початкове наближення до шуканого коефіцієнта $u(x_2) \in U$ у варіаційному методі, методі проекції градієнта за регуляризаційною схемою Тихонова та в ітераційному градієнтному методі було обрано за формулою $u^{(0)}(x_2) = 2x_2$, $x_2 \in (0,1)$.

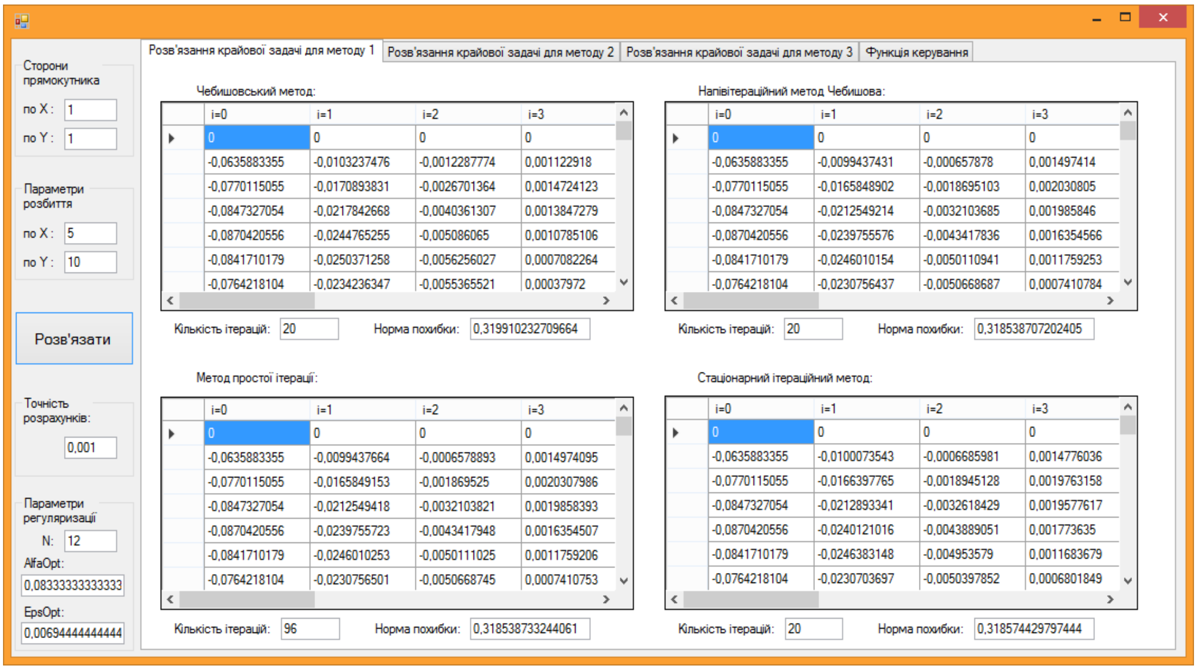

Рис. 1 Результат роботи програмного продукту для визначення розв'язку еліптичної крайової задачі

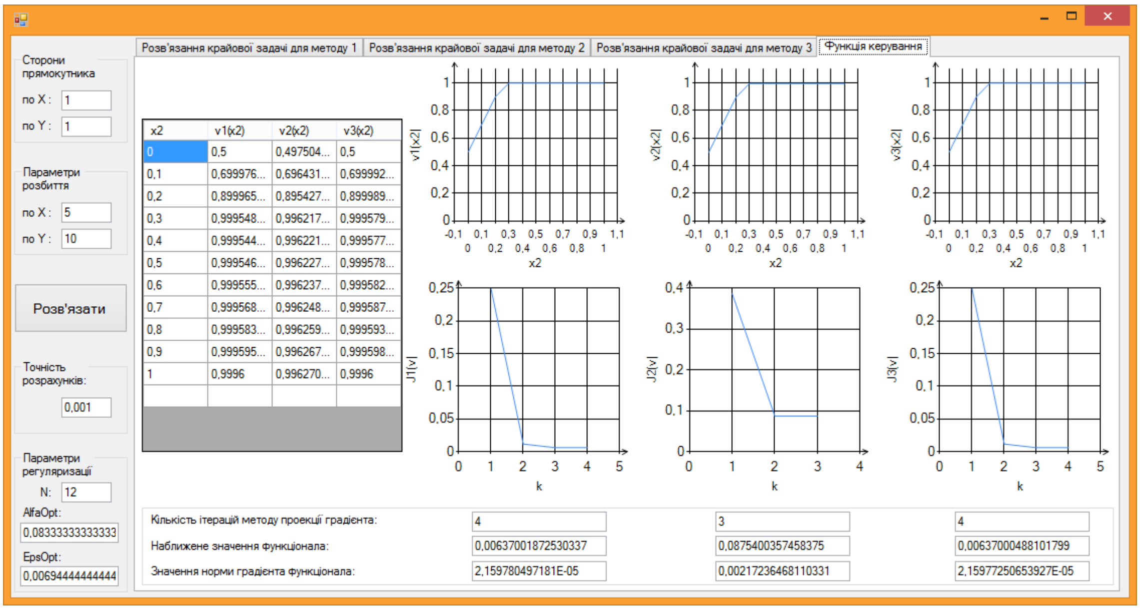

Рис. 2 Результат роботи програмного продукту для визначення змінного коефіцієнта

Аналіз результатів та висновки. За результатами обчислювальних експериментів при різних параметрах сітки, початкових значеннях для шуканого коефіцієнту $u(x_2) \in U$ та точності розрахунків можна зробити такі висновки:

оскільки для апроксимації еліптичних диференціальних операторів в (1) і (8) були використані різницеві схеми першого порядку, то отримані похибки наближених розв'язків відповідних крайових задач є повністю виправданими. Наближене значення функціонала (7) у варіаційному методі є близьким до нуля і узгоджується із заданою точністю розрахунків, що гарантує отримання якісних результатів стосовно шуканої функції коефіцієнта оберненої задачі. Порівнюючи з результатами застосування ітераційного градієнтного методу для різних порядків дискретизації та початкових значень $u^{(0)}(x_2)$, можна відмітити, що обидва методи мають однакову динаміку збільшення кількості ітерацій зі збільшенням розбиття області $\bar{\Omega}$ та точності обчислень $\varepsilon > 0$, причому, отримані наближені значення розв'язків відрізняються в більшості випадків лише після четвертого знаку після коми.

На відміну від інших реалізованих схем, алгоритм регуляризації Тихонова у сполученні з методом проекції градієнта поводив себе на різних сітках дуже стійко та мав незачну кількість ітерацій ($k = 3$), що підтверджує належний вибір регуляризуючого функціонала та параметрів регуляризації. Слід зазначити, однак, що зі збільшенням порядку дискретизації області $\bar{\Omega}$ кількість N допоміжних (регуляризованих) екстремальних задач зростає, що суттєво збільшує час рахунків.

Таким чином, в роботі проведено аналіз різноманітних сучасних методів розв'язання некоректних екстремальних задач та досліджено ефективність трьох різних підходів до розв'язання коефіцієнтної оберненої задачі для еліптичного рівняння другого порядку з мішаними крайовими умовами та додатковою інтегральною умовою: прямий ітераційний градієнтний метод, варіаційний метод та метод регуляризації Тихонова. Зазначені підходи з використанням методу сіткової аппроксимації були алгоритмізовані та програмно реалізовані, що дозволило виконати порівняльний аналіз розроблених обчислювальних алгоритмів та обгрунтувати їх практичну збіжність на прикладі розв'язання конкретних задач.

Бібліографічні посилання

1. Тихонов А.Н.. О методах регуляризации задач оптимального управления. *Докл. АН СССР*. 1965. 162. № 4. С. 763-765.
2. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. *Докл. АН СССР*. 1963. 151. № 3. С. 501-504.
3. Тихонов А.Н., Васильев Ф.П. Методы решения некорректных задач оптимального управления. *Математическая теория оптимального управления*. Труды Всесоюзной конф. Баку, 1972. 307 с.
4. Васильев Ф. П. Лекции по методам решения экстремальных задач. М.: Изд-во Московского университета, 1974. 376 с.
5. Тагиев Р.К., Касымова Р.С. Вариационный метод решения коэффициентной обратной задачи для эллиптического уравнения. *Вестник Южно-Уральского университета. Серия «Математика. Механика. Физика»*. 2018. 10. № 1. С 12-20.
6. Кісельова О.М., Гарт Л.Л. Про сіткові алгоритми розв'язання однієї коефіцієнтної оберненої задачі для еліптичного рівняння. *Актуальні проблеми механіки суцільного середо-*

вища і міцності конструкцій: Тези доп. II міжнар. наук.-техн. конф. Дніпро: ДНУ, 2019. С. 284-285.
7. Гарт Л.Л., Довгай П.О., Селіщев В.Л. Сіткові алгоритми розв'язання задачі оптимального керування еліптичною системою. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. 2017. Вип. 17. С. 42-53.
8. Гарт Л.Л., Манойло М.В. О некоторых алгоритмах регуляризации для решения интегральных уравнений. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2015. № 1. С. 99-110.
9. Тавадзе Э.Л., Тавадзе Л.Л. Проекционно-итерационный метод решения задачи минимизации с ограничениями, основанный на методе условного градиента. *Математичне моделювання*. Дніпродзержинськ: ДДТУ, 1998. № 3. С. 18-21.
10. Балашова С.Д., Тавадзе Л.Л., Тавадзе Э.Л. Применение проекционно-итерационных методов к решению задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Деп. в ВИНИТИ 13.06.91, № 2486-В91. Дніпропетровськ: ДГУ, 1991. – 28 с.
11. Гарт Л.Л., Лобанцева Н.А. Про обчислювальні аспекти реалізації різницевих схем розв'язання задачі Діріхле для еліптичного рівняння з мішаними похідними. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. 2019. Вип. 19. С. 63-77.

Надійшла до редколегії 29.07. 2021.