УДК 519.6 doi: 10.15421/322104

Л.Л. Гарт
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

ОБҐРУНТУВАННЯ ПРОЕКЦІЙНО-ІТЕРАЦІЙНОГО ПІДХОДУ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ НЕЙМАНА ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНОГО ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРОМ

Для розв'язання залежного від числового параметра квазілінійного еліптичного рівняння другого порядку з граничними умовами Неймана теоретично обґрунтовано проекційно-ітераційний процес, оснований на методі скінченних різниць і ітераційному методі Ньютона. Запропоновано ефективну обчислювальну схему проекційно-ітераційного методу на основі скінченно-різницевого методу та ітераційного процесу, подібного до методу Ньютона (із заміною оберненого оператора до похідної на близький до нього оператор в кожній точці процесу).

Ключові слова: квазілінійне параметричне рівняння, граничні умови Неймана, скінченно-різницева схема, проекційно-ітераційний процес, збіжність.

L.L. Hart
Oles Honchar Dnipro National University

SUBSTANTIATION OF THE PROJECTION-ITERATION APPROACH TO SOLVING THE NEUMANN PROBLEM FOR A QUASILINEAR ELLIPTIC EQUATION WITH A PARAMETER

To solve a quasilinear second-order elliptic equation, depending on a numerical parameter, with Neumann boundary conditions, a projection-iteration process is theoretically substantiated, combining the ideas of the finite-difference method and the Newton iterative method. An efficient computational scheme of the projection-iteration method is proposed based on the finite-difference method and a Newton-like method (with the replacement of the inverse operator to the derivative by an operator close to it at each point of the process).

The paper investigates the problem of the existence, location and approximate finding solutions to elliptic quasilinear parametric problems. For this, we propose to use the projection-iteration method based on the finite difference method as a projection (approximation) type method and a Newton-like iterative process. The essence of the proposed approach is to replace the differential problem with a sequence of finite-difference problems approximating it on a set of refining grids and to apply a Newton-like iterative method to each of the "approximate" problems. Moreover, we propose to construct only a few approximations to the solution for each of the "approximate" problems and to take the last of this approximations, using piecewise linear interpolation, as the initial approximation in the iterative process for the next "approximate" problem. The sequence of corresponding piecewise linear interpolants we consider as a sequence of approximations to the solution of the original differential problem. We also discuss the advantages of the proposed approach over traditional methods.

Key words: quasilinear parametric equation, Neumann boundary conditions, finite-difference scheme, projection-iteration process, convergence.

Л.Л. Гарт
Днипровский национальный университет имени Олеся Гончара

ОБОСНОВАНИЕ ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАЦИОННОГО ПОДХОДА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ

Для решения квазилинейного эллиптического уравнения второго порядка, зависящего от числового параметра, с граничными условиями Неймана теоретически обоснован проекционно-итерационный процесс, сочетающий идеи метода конечных разностей и итерационного метода Ньютона. Предложена эффективная вычислительная схема проекционно-итерационного метода на основе конечно-разностного метода и итерационного процесса, подобного методу Ньютона (с заменой обратного оператора к производной на близкий к нему оператор в каждой точке процесса).

Ключевые слова: квазилинейное параметрическое уравнение, граничные условия Неймана, конечно-разностная схема, проекционно-итерационный процесс, сходимость.

Вступ. Теорія нелінійних рівнянь у частинних похідних в даний час є одним з напрямків теорії диференціальних рівнянь, що найбільш активно розвивається. Нелінійні диференціальні рівняння виникають у багатьох задачах сучасного природознавства, соціальних і технічних наук, промислових виробничих процесах. Важливість вивчення таких рівнянь особливо велика зараз, коли існує абсолютна необхідність моделювання і вивчення процесів, що відбуваються в неоднорідних активних середовищах, в умовах широкого діапазону температурних змін, високих навантажень і великих деформацій [1–3]. Теорія нелінійних диференціальних рівнянь тісно пов'язана з багатьма областями математики, фізики та інших наук. З одного боку, нелінійні рівняння моделюють багато явищ, що вивчаються в природничих науках (електромагнетизм, нелінійні рівняння Максвелла) або соціальних науках (фінансові ринки, нелінійна модель Блека-Шоулза), збагачуючи теорію нелінійних рівнянь новими проблемами, а з іншого боку, вони служать важливим джерелом їх розвитку [1, 4, 5].

Багато які усталені процеси різного фізичного походження (стаціонарні задачі теплопровідності і дифузії, задачі про розподіл струму в провідному середовищі, задачі електростатики та магнітостатики, теорії пружності, теорії фільтрації та ін.) приводять до диференціальних рівнянь у частинних похідних еліптичного типу. З крайовими задачами для еліптичних нелінійних рівнянь тісно пов'язані численні проблеми геометрії, варіаційного числення і механіки. Дослідженню можливості розв'язання крайових задач для рівнянь еліптичного типу та вивченню якісних і конструктивних властивостей їх розв'язків присвячені монографії І.Н. Векуа, І.В. Біцадзе, О.А. Ладиженської і Н.Н. Уральцевої, Д. Гільберга і Н. Трудінгера, І.В. Скрипника, М.С. Бергера та інших авторів. Щорічно публікується велика кількість статей з нелінійних еліптичних рівнянь, присвячених як теоретичним дослідженням, так і застосуванням, в тому числі розробці наближених методів розв'язання цих рівнянь і пов'язаних із ними задач оптимального керування [6–9].

З огляду на складність математичних постановок зазначених класів задач, під час їх розв'язання найбільш широко використовуються наближені (особливо чисельні) методи і алгоритми, серед яких виділяють проекційні і ітераційні, а також деякі комбіновані підходи, що поєднують ідеї останніх і мають певні переваги перед ними. Існує велика кількість наближених методів і алгоритмів розв'язання зазначених класів задач, але їх наявність не виключає можливості створення нових, більш ефективних методів і вдосконалення існуючих.

Збільшення ефективності алгоритмів є однією з актуальних задач сучасної інформатики. Оскільки ітераційні методи, незважаючи на показникову швидкість збіжності та прості обчислювальні схеми, мають обмежену область застосування, а проекційні методи, маючи широку область застосування, характеризуються степеневою швидкістю збіжності (іноді досить повільною) та обчислювальною нестійкістю, то ефективний синтез проекційних і ітераційних методів, зумовлений потребою усунення властивих їм недоліків, теоретичне обґрунтування і аналіз відповідних чисельних алгоритмів утворюють важливий напрям у розвитку сучасної теорії алгоритмів та обчислень.

Спроби підвищення ефективності проекційних і ітераційних методів під час розв'язання різних класів рівнянь привели до виникнення різноманітних змішаних підходів, представлених в працях Г. Ермана, Г.М. Вайнікко, В.В. Петрішина, Х. Гаєвського, Р. Клюге, В.В. Іванова, В.П. Танани, А.Ю. Лучки, Т. Чена, М. Седдека, в групі багатосіткових методів В. Хакбуша, Р.П. Федоренка, В.В. Шайдурова, а також у роботах А.Б. Бакушинського, М.Д. Бабича, Я.Д. П'янило, Б.Г. Габдулхаєва, С.Д. Балашової, Ю.Д. Федоренка, Е.Л. Гарт та інших авторів. Короткий огляд відповідних наукових джерел можна знайти, наприклад, в [10].

Дана робота є продовженням досліджень так званих проекційно-ітераційних методів, що засновані на принципі будь-якої апроксимації вихідної задачі послідовністю наближених задач, визначених на підпросторах основного простору (або на просторах, ізоморфних підпросторам основного простору) з подальшим застосуванням ітераційних методів для їх наближеного розв'язання. Основна ідея проекційно-ітераційних методів розв'язання операторних рівнянь першого роду полягає в наступному [11]. Рівняння виду

$$Au = f \tag{1}$$

з нелінійним оператором A, діючим в банаховому просторі X ($f \in X$ – відомий елемент), що має розв'язок $u^* \in X$, апроксимують послідовністю наближених рівнянь

$$A_n u_n = f_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

де A_n – нелінійний оператор, діючий на підпросторі X_n основного простору ($X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots \subset X$; $X_1 \neq \varnothing$). Для розв'язання наближених рівнянь (2) використовують деякий ітераційний метод, причому для кожного з цих рівнянь знаходять лише декілька наближень $u_n^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, k_n)$, останнє з яких $u_n^{(k_n)}$ обирають за початкове наближення $u_{n+1}^{(0)}$ в ітераційному процесі для наступного, $(n+1)$-го наближеного рівняння. Послідовність $\{u_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ розглядають як послідовність наближень до розв'язку u^* рівняння (1). Такий підхід до знаходження наближеного розв'язку вихідного рівняння, природно, усуває труднощі, що виникають під час розв'язання того ж рівняння звичайним проекційним методом, а також полегшує вибір належного початкового наближення в порівнянні з розв'язанням вихідного рівняння звичайним ітераційним методом.

Під час розв'язування практичних задач, які приводять до операторних рівнянь виду (1) в банаховому просторі X, найчастіше зустрічається випадок, коли наближені рівняння задаються не в підпросторах $X_n \subset X$ основного простору, а в деяких просторах $\tilde{X}_n$, ізоморфних до них ($n = 1, 2, \ldots$). Якщо позначити через Φ_n лінійний оператор, який здійснює взаємно однозначне відображення X_n на $\tilde{X}_n$, через $\overline{\Phi}_n = \Phi_n P_n$ – лінійний оператор, що є розширенням Φ_n на весь простір X, де P_n – оператор проектування X на X_n ($P_n^2 = P_n$, $\|P_n\| = 1$), то замість рівнянь (2) можна розглядати послідовність наближених рівнянь виду

$$\tilde{A}_n \tilde{u}_n = \tilde{f}_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

де $\tilde{A}_n$ – нелінійний оператор, що діє в просторі $\tilde{X}_n$, ізоморфному $X_n \subset X$, причому $\tilde{A}_n = \Phi_n A_n \Phi_n^{-1}$, $\tilde{u}_n = \Phi_n u_n$, $\tilde{f}_n = \Phi_n f_n = \Phi_n P_n f$. Так само, як у випадку, коли наближені рівняння задані в підпросторах $X_n \subset X$, для розв'язання наближених рівнянь (3) можна використовувати ітераційні методи, причому будувати для кожного цих рівнянь лише декілька наближень $\tilde{u}_n^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, k_n)$ і обирати елемент $\tilde{u}_{n+1}^{(0)} = \Phi_{n+1}\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}$ за початкове наближення в ітераційному процесі для наступного $(n+1)$-го рівняння (3). У ролі послідовності наближень до розв'язку u^* рівняння (1) в цьому випадку прийнято розглядати послідовність $\{\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n^{(k_n)}\}_{n=1}^{\infty} \subset X$.

У даній роботі досліджується питання про можливість застосування проекційно-ітераційного підходу до розв'язання задачі Неймана для квазілінійного (тобто лінійного відносно старших похідних невідомої функції) еліптичного диференціального рівняння другого порядку з двома незалежними змінними і числовим параметром. Пропонований підхід заснований на поєднанні ідей методу скінченних різниць як методу проекційного типу і ітераційного методу Ньютона.

Постановка задачі. Нехай у квадраті $\overline{G} = G \cup \Gamma = \{(x, y):\ 0 \le x, y \le \pi\}$ задане рівняння

$$L\,u(\mu) \equiv \Delta\,u + \mu\left(\frac{\partial}{\partial x}(pF) + \frac{\partial}{\partial y}(qF)\right) = -f(x, y), \quad (x, y) \in G \tag{4}$$

з крайовими умовами другого роду

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{(x,\,y)\in\Gamma} = 0\,. \tag{5}$$

Тут $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – лінійний диференціальний оператор Лапласа; μ – числовий параметр; $F \equiv F(x, y, u, p, q)$, $f(x, y)$ – задані функції для $(x, y) \in G$; $u \equiv u(\mu) = u(x, y; \mu)$ – шукана функція на області $\overline{G}$, $p = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial u}{\partial y}$; $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до межі Γ. Нехай функція F неперервна і обмежена разом із похідними другого порядку в області свого визначення, а $f(x, y)$ така, що $\iint\limits_G f(x, y)\, dxdy = 0$ (остання вимога випливає на підставі формули Гріна і (5) з рівності $\iint\limits_G L\, u\, dxdy = 0$). Рівнянням типу (4) є, наприклад, рівняння мінімальної поверхні або рівняння, що виникає в задачах пластичного кручення [12].

Безпосереднє розкриття виразу в лівій частині рівняння (4) дає

$$Lu(\mu) \equiv (1 + \mu\overline{A}(x, y, u, p, q))\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\overline{B}(x, y, u, p, q)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} +$$

$$+ (1 + \mu\overline{C}(x, y, u, p, q))\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \overline{D}(x, y, u, p, q), \quad (x, y) \in G, \tag{6}$$

де

$$\overline{A} = F + \frac{\partial F}{\partial p}p, \quad \overline{B} = \frac{\partial F}{\partial q}p + \frac{\partial F}{\partial p}q, \quad \overline{C} = F + \frac{\partial F}{\partial q}q,$$

$$\overline{D} = \frac{\partial F}{\partial x}p + \frac{\partial F}{\partial y}q + \frac{\partial F}{\partial u}(p^2 + q^2).$$

Будемо вважати, що для всіх $(x, y) \in G$ виконується нерівність $\overline{B}^2 - 4\,\overline{A}\,\overline{C} < 0$, тобто L – квазілінійний еліптичний диференціальний оператор.

Перепишемо рівняння (4) у вигляді

$$Au(\mu) \equiv T\,u + \mu\, Q\, u = f\,, \tag{7}$$

де

$$Au = -Lu\,, \quad Tu = -\Delta u\,, \quad Q\,u = -\left(\frac{\partial}{\partial x}(pF) + \frac{\partial}{\partial y}(qF)\right), \quad (x, y) \in G. \tag{8}$$

Будемо розглядати це рівняння в просторі $X = \dot{L}_2(\overline{G})$ з нормою

$$\| u \|_X = \sqrt{\iint\limits_G u^2(x, y)\, dxdy}\,,$$

який складається з функцій $u \in L_2(\overline{G})$, що задовольняють граничну умову (5) і умову

$$\iint\limits_G u(x, y)\, dxdy = 0\,. \tag{9}$$

Областю визначення $D(A)\subset X$ оператора A будемо вважати множину функцій $u\in\dot{L}_2(\overline{G})$, які мають узагальнені похідні з $L_2(\overline{G})$ до другого порядку включно. Нагадаємо, що функцію $\varphi_j(x_1,x_2)\in L_1(\overline{G})$ називають узагальненою похідною першого порядку функції $u(x_1,x_2)$ за змінною x_j $(j=1,2)$ в області $\overline{G}$, якщо існує така послідовність функцій $\{u^{(k)}(x_1,x_2)\}$, неперервно-диференційованих в $\overline{G}$, що для будь-якої області Ω, $[\Omega]\subset\overline{G}$ виконуються граничні співвідношення

$$\iint\limits_{\Omega}\left|u^{(k)}(x_1,x_2)-u(x_1,x_2)\right|dx_1dx_2\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0,\quad \iint\limits_{\Omega}\left|\frac{\partial u^{(k)}}{\partial x_j}(x_1,x_2)-\phi_j(x_1,x_2)\right|dx_1dx_2\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0;$$

узагальнені похідні $\partial^2 u/\partial x_i\partial x_j$, $\partial^3 u/\partial x_i\partial^2 x_j,\ldots$ вищих порядків визначаються за індукцією і не залежать (майже скрізь) від порядку диференціювання [13].

Якщо оператор A диференційований за Фреше в деякій замкненій кулі $S(u^{(0)},R)=\{u\in X:\ \|u-u^{(0)}\|\le R\}$ простору $X=\dot{L}_2(\overline{G})$ і його похідна Фреше $A'(u)$ неперервно оборотна в цій кулі, то для розв'язання рівняння (7) можна використовувати як класичний метод Ньютона

$$u^{(k+1)}(\mu)=u^{(k)}(\mu)-[A'(u^{(k)})]^{-1}(Au^{(k)}(\mu)-f),\quad k=0,1,\ldots;\qquad(10)$$
$$u^{(0)}(\mu)\equiv u^{(0)}\in X,$$

так і ітераційний процес, подібний до методу Ньютона

$$u^{(k+1)}(\mu)=u^{(k)}(\mu)-[T'(u^{(k)})]^{-1}(Au^{(k)}(\mu)-f),\quad k=0,1,\ldots;\qquad(11)$$
$$u^{(0)}(\mu)\equiv u^{(0)}\in X,$$

де $u^{(0)}=u^{(0)}(0)$ – наближений розв'язок рівняння (7) за $\mu=0$ [13].

Метою даної роботи є теоретичне обґрунтування проекційно-ітераційного підходу, основаного на методі скінченних різниць як методі проекційного (апроксимаційного) типу і ітераційному процесі (11), подібному до метода Ньютона, для дослідження питання про існування, область розташування і наближене відшукання розв'язку $u^*\equiv u^*(x,y;\ \mu)$ задачі (4), (5).

Скінченно-різницева апроксимація диференціальної моделі. Апроксимуємо диференціальне рівняння (4) (або, що те ж саме, (7), (8)) за допомогою методу скінченних різниць [14] послідовністю сіткових рівнянь

$$\Lambda_n u_{ij}+\mu\,\Psi_n u_{ij}=-f(x_i,y_j),\quad (x_i,y_j)\in\omega_n,\quad n=1,2,\ldots\qquad(12)$$

на сукупності прямокутних рівномірних (для простоти) сіток, що подрібнюються:

$$\overline{\omega}_n=\omega_n\cup\gamma_n=\{(x_i,y_j)\in\overline{G}:\ x_i=ih_1^{(n)},\, i=\overline{0,N_1^{(n)}};\ y_j=jh_2^{(n)},\, j=\overline{0,N_2^{(n)}}\},$$
$$h_1^{(n)}=\pi/N_1^{(n)},\quad h_2^{(n)}=\pi/N_2^{(n)},\quad h_n=(h_1^{(n)},h_2^{(n)});$$
$$N_1^{(n+1)}\ge N_1^{(n)},\ \ N_2^{(n+1)}\ge N_2^{(n)},\ \ n=1,2,\ldots;\quad N_1^{(1)}>0,\ N_2^{(1)}>0.$$

На систему сіткових рівнянь (12) при кожному $n=1,2,\ldots$ можна дивитись як на «наближене» рівняння виду

$$\tilde{A}_n\tilde{u}_n(\mu) \equiv \tilde{T}_n\tilde{u}_n + \mu\,\tilde{Q}_n\tilde{u}_n = \tilde{f}_n, \tag{13}$$

задане в скінченновимірному просторі $\tilde{X}_n = \dot{H}_{h_n}$ з нормою

$$\|\tilde{u}_n\|_{\tilde{X}_n} = \sqrt{\sum_{i=0}^{N_1^{(n)}-1}\sum_{j=0}^{N_2^{(n)}-1} u_{ij}^2\, h_1^{(n)}h_2^{(n)}}\,,$$

який складається з сіткових функцій двох змінних $\tilde{u}_n = \{u_{ij}\}_{i=\overline{0,N_1^{(n)}},\ j=\overline{0,N_2^{(n)}}}$, $u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$, визначених на сітці $\overline{\omega}_n$ і задовольняючих граничну умову

$$B_n u_{ij}\Big|_{(x_i,y_j)\in\gamma_n} = 0, \tag{14}$$

а також умову $\sum_{i=0}^{N_1^{(n)}-1}\sum_{j=0}^{N_2^{(n)}-1} u_{ij}h_1^{(n)}h_2^{(n)} = 0$. Тут B_n – різницевий аналог оператора диференціювання за нормаллю в (5). Дотримуючись позначень [14]

$$(u_{ij})_x = \frac{u_{i+1,j}-u_{ij}}{h_1^{(n)}},\ (u_{ij})_{\bar{x}} = \frac{u_{ij}-u_{i-1,j}}{h_1^{(n)}},\ (u_{ij})_y = \frac{u_{i,j+1}-u_{ij}}{h_2^{(n)}},\ (u_{ij})_{\bar{y}} = \frac{u_{ij}-u_{i,j-1}}{h_2^{(n)}},$$

де $u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$, $(x_i, y_j) \in \overline{\omega}_n$, можна дати на підставі (5)-(8) наступні представлення для різницевих операторів в (12) (або, що те ж саме, (13)) і в (14):

$$\tilde{T}_n\tilde{u}_n \equiv -\Lambda_n u_{ij} = -\Big((u_{ij})_{\bar{x}x} + (u_{ij})_{\bar{y}y}\Big), \quad (x_i, y_j) \in \omega_n; \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_n\tilde{u}_n \equiv -\Psi_n u_{ij} = -\frac{1}{2}\Big\{&\Big(\overline{A}(x_i,y_j,u_{ij},(u_{ij})_{\bar{x}},(u_{ij})_{\bar{y}}) + \overline{A}(x_i,y_j,u_{ij},(u_{ij})_x,(u_{ij})_y)\Big)(u_{ij})_{\bar{x}x} + \\
&+\Big(\overline{B}(x_i,y_j,u_{ij},(u_{ij})_{\bar{x}},(u_{ij})_{\bar{y}}) + \overline{B}(x_i,y_j,u_{ij},(u_{ij})_x,(u_{ij})_y)\Big)(u_{ij})_{xy} + \\
&+\Big(\overline{C}(x_i,y_j,u_{ij},(u_{ij})_{\bar{x}},(u_{ij})_{\bar{y}}) + \overline{C}(x_i,y_j,u_{ij},(u_{ij})_x,(u_{ij})_y)\Big)(u_{ij})_{\bar{y}y} + \\
&+\Big(\overline{D}(x_i,y_j,u_{ij},(u_{ij})_{\bar{x}},(u_{ij})_{\bar{y}}) + \overline{D}(x_i,y_j,u_{ij},(u_{ij})_x,(u_{ij})_y)\Big)\Big\}, \quad (x_i, y_j) \in \omega_n;
\end{aligned}$$

$$B_n u_{ij} = \begin{cases} (u_{i2} - 4u_{i1} + 3u_{i0})/(2h_2^{(n)}) = 0, & 0 \le i \le N_1^{(n)}, \\ (u_{i,N_2^{(n)}-2} - 4u_{i,N_2^{(n)}-1} + 3u_{i,N_2^{(n)}})/(2h_2^{(n)}) = 0, & 0 \le i \le N_1^{(n)}, \\ (u_{2j} - 4u_{1j} + 3u_{0j})/(2h_1^{(n)}) = 0, & 0 < j < N_2^{(n)}, \\ (u_{N_1^{(n)}-2,j} - 4u_{N_1^{(n)}-1,j} + 3u_{N_1^{(n)},j})/(2h_1^{(n)}) = 0, & 0 < j < N_2^{(n)}. \end{cases}$$

Підпростори $X_n \subset X$, ізоморфні просторам $\tilde{X}_n$, визначимо як простори кусково-сталих функцій

$$u_n(x,y) = \sum_{i=0}^{N_1^{(n)}-1}\sum_{j=0}^{N_2^{(n)}-1} u_{ij}\,\chi_{ij}^{(n)}(x,y), \quad (x,y) \in \overline{G}, \tag{16}$$

де $\chi_{ij}^{(n)}(x,y)$ – характеристична функція комірки

$$G_{ij}^{(n)} = \{(x,y) \in \overline{G}:\ x_i \le x < x_{i+1},\ y_j \le y < y_{j+1}\}$$

сіткової області $\overline{\omega}_n$. Функція (16), вочевидь, в усіх точках такої комірки приймає однакові значення, рівні u_{ij}. Легко бачити, що $\|u_n\|_X = \|\tilde{u}_n\|_{\tilde{X}_n}$, тобто простори X_n і $\widetilde{X}_n$ ізометричні ($n=1,2,\ldots$). Оператор Φ_n, що переводить X_n на $\widetilde{X}_n$, визначимо як оператор, який кожній функції $u_n(x,y)\in X_n$ виду (16) ставить у взаємно однозначну відповідність сіткову функцію $\widetilde{u}_n=\{u_{ij}\}_{i=\overline{0,N_1^{(n)}},\, j=\overline{0,N_2^{(n)}}}\in\widetilde{X}_n$, $u_{ij}=u_n(x_i,y_j)$, $(x_i,y_j)\in\overline{\omega}_n$; Φ_n^{-1} – оператор, що здійснює зворотне відображення. Ясно, що $\|\Phi_n\|=\|\Phi_n^{-1}\|=1$, $n=1,2,\ldots$. Що стосується оператора $\overline{\Phi}_n$, то він кожній функції $u(x,y)\in\dot{L}_2(\overline{G})$ ставить у відповідність сіткову функцію $\widetilde{u}_n=\{u_{ij}\}_{i=\overline{0,N_1^{(n)}},\, j=\overline{0,N_2^{(n)}}}\in\widetilde{X}_n$, $u_{ij}=u(x_i,y_j)$, $(x_i,y_j)\in\overline{\omega}_n$, а оператор $P_n=\Phi_n^{-1}\overline{\Phi}_n$ проектування на підпростір X_n будь-яку функцію $u(x,y)\in\dot{L}_2(\overline{G})$ переводить у функцію $u_n(x,y)\in X_n$ виду (16).

Проекційно-ітераційна реалізація методу Ньютона та його модифікацій. Застосуємо до розв'язання «наближених» рівнянь (13) (або, що те ж саме, скінченно-різницевих задач (12), (14)) ітераційний метод Ньютона (10) за описаним вище принципом: побудуємо для кожного з цих рівнянь всього декілька наближень і візьмемо останнє з них, використовуючи кусково-лінійну інтерполяцію (16), за початкове наближення в ітераційному процесі для наступного «наближеного» рівняння:

$$\widetilde{u}_n^{(k+1)}(\mu)=\widetilde{u}_n^{(k)}(\mu)-[\tilde{A}_n'(\widetilde{u}_n^{(k)})]^{-1}(\tilde{A}_n\widetilde{u}_n^{(k)}(\mu)-\tilde{f}_n),\quad k=0,1,\ldots,k_n-1;\qquad(17)$$

$$\widetilde{u}_{n+1}^{(0)}(\mu)=\Phi_{n+1}\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)}(\mu),\quad n=1,2,\ldots;\quad \widetilde{u}_1^{(0)}(\mu)=\widetilde{u}_1^{(0)}\in\tilde{\Omega}_1,$$

або в термінах сіткових функцій:

$$u_{ij}^{(k+1)}(\mu)=u_{ij}^{(k)}(\mu)-[\Lambda_n+\mu\Psi_n'(u_{ij}^{(k)})]^{-1}\Big((\Lambda_n+\mu\Psi_n)u_{ij}^{(k)}(\mu)+f(x_i,y_j)\Big),\qquad(18)$$

$$(x_i,y_j)\in\omega_n,\quad k=0,1,\ldots,k_n-1;$$

$$B_n u_{ij}^{(k)}(\mu)\Big|_{(x_i,y_j)\in\gamma_n}=0,\ k=0,1,\ldots,k_n;\quad u_{ij}^{(0)}(\mu)=u_{ij}^{(0)},\ (x_i,y_j)\in\overline{\omega}_1;\qquad(19)$$

$$u_{ij}^{(0)}(\mu)=\sum_{l=0}^{N_1^{(n)}-1}\sum_{m=0}^{N_2^{(n)}-1}u_{lm}^{(k_n)}(\mu)\,\chi_{lm}^{(n)}(x_i,y_j),\quad (x_i,y_j)\in\overline{\omega}_{n+1},\quad n=1,2,\ldots\qquad(20)$$

Послідовність елементів $\{\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)}(\mu)\}_{n=1}^{\infty}\subset\dot{L}_2(\overline{G})$, або, що те ж саме, кусочно-лінійних інтерполянтів $\{u_n^{(k_n)}(x,y)\}_{n=1}^{\infty}$, $(x,y)\in\overline{G}$ виду (16) розглядатимемо як послідовність наближень до розв'язку $u^*\equiv u^*(x,y;\,\mu)$ вихідної диференціальної задачі (4), (5).

Можна показати, що всі умови теореми 4 [15] про здійсненність та збіжність проекційно-ітераційного методу (17), основаного на методі Ньютона, для задачі (4), (5) виконані.

Покажемо, що оператори T і Q, визначені в (8), диференційовані в деякій кулі $S\subset D(A)\subset X$ (за S вважатимемо кулю достатньо великого радіусу). Так як $T=-\Delta$ – лінійний оператор із $D(A)\subset X$ в $X=\dot{L}_2(\overline{G})$, то він диференційований в будь-якій точці $u_0\in S$ [13], причому

$$T'(u_0)\,u=-\Delta u\,,\quad \forall\, u\in \dot{L}_2(\overline{G})\,. \tag{21}$$

Похідна ж $Q'(u_0)$ квазілінійного оператора Q в кожній точці $u_0\in S$ визначається співвідношенням

$$Q'(u_0)u=-\left\{\left(F_0+p_0\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_0\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(p_0\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_0+q_0\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_0\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\right.$$
$$\left.+\left(F_0+q_0\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_0\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\hat{D}(x,y,u,p,q,u_0)\right\},\ \ \forall\, u\in \dot{L}_2(\overline{G}), \tag{22}$$

де через F_0 позначено результат підстановки в $F\equiv F(x,y,u,p,q)$ замість u функції u_0 і замість p і q частинних похідних $p_0=\dfrac{\partial u_0}{\partial x}$, $q_0=\dfrac{\partial u_0}{\partial y}$,

$$\hat{D}=\Delta u_0\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0 u+\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_0 p+\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_0 q\right\}+\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0+\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0 p_0+\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_0\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_0\frac{\partial^2 u_0}{\partial y\partial x}\right\}p+\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0+\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0 q_0+\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)_0\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)_0\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}\right\}q+$$
$$+p_0\left\{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial u}\right)_0 u+\left(\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial p}\right)_0+\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0\right)p+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial q}\right)_0 q\right\}+q_0\left\{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial u}\right)_0 u+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial p}\right)_0 p+\left(\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial q}\right)_0+\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right)_0\right)q\right\}+(p_0^2+q_0^2)\left\{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\right)_0 u+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial p}\right)_0 p+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial q}\right)_0 q\right\}+\left(p_0\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+q_0\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y}\right)\left\{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial p\partial u}\right)_0 u+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\right)_0 p+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial p\partial q}\right)_0 q\right\}+$$
$$+\left(p_0\frac{\partial^2 u_0}{\partial y\partial x}+q_0\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}\right)\left\{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial q\partial u}\right)_0 u+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial q\partial p}\right)_0 p+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial q^2}\right)_0 q\right\}.$$

Так як оператор Q' неперервний в $\dot{L}_2(\overline{G})$, то тим самим Q диференційований [13]. Таким чином, за властивостями похідних, оператор $A'(u_0)=T'(u_0)+\mu Q'(u_0)$, $\forall\, u_0\in S$ існує і з урахуванням (21), (22) може бути поданий у вигляді

$$A'(u_0)\,u=-\left(\overline{A}_0\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\overline{B}_0\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\overline{C}_0\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u-\hat{D},\quad \forall\, u\in \dot{L}_2(\overline{G}),$$

де $\overline{A}_0$, $\overline{B}_0$, $\overline{C}_0$ визначаються відповідно до (6), а $\hat{D}$ не містить похідних другого порядку від u. Звідси, зокрема, випливає, що $A'(u_0)$ – лінійний еліптичний диференціальний оператор, і, отже, кожен крок методу Ньютона (10) для операторного рівняння (7) зводиться до розв'язування в $X=\dot{L}_2(\overline{G})$ лінійного еліптичного диференціального рівняння

$$A'(u^{(k)})\,u^{(k+1)}=A'(u^{(k)})\,u^{(k)}-(Au^{(k)}-f),\qquad k=0,1,\ldots$$

за умов Неймана (5).

Друга похідна оператора $A = T + \mu Q$ в кулі S також може бути легко знайдена. Зрозуміло, що $A''(u_0)(u,v)$ є білінійною формою від $u, v \in \dot{L}_2(\overline{G})$ та їх похідних до другого порядку включно з коефіцієнтами, що залежать від $u_0 \in S$ (при цьому зазначена форма не містить добутку другої похідної від u на другу похідну від v). Якщо при кожному $u_0 \in S$ коефіцієнти білінійної форми як оператори множення рівномірно обмежені, то оператор $A''(u_0)$ із S в $L(X, X)$ рівномірно обмежений, а це забезпечує виконуваність в S умови Ліпшица для $A'(u_0)$.

Знайдемо похідні Фреше операторів $\tilde{T}_n$ і $\tilde{Q}_n$ на множині $\tilde{\Omega}_n = \Phi_n(\Omega_n)$, де $\Omega_n = X_n \bigcap S$ ($n = 1, 2, \ldots$). Оскільки $\tilde{T}_n$ − лінійний оператор в скінченновимірному просторі $\tilde{X}_n$, то для будь-яких $\tilde{u}_n^{(0)} \in \tilde{\Omega}_n$, $\tilde{u}_n \in \tilde{X}_n$

$$\tilde{T}_n'(\tilde{u}_n^{(0)})\,\tilde{u}_n = \tilde{T}_n\tilde{u}_n = -\big((u_{ij})_{\bar{x}x} + (u_{ij})_{\bar{y}y}\big), \quad (x_i, y_j) \in \omega_n. \tag{23}$$

Похідна $\tilde{Q}_n'(\tilde{u}_n^{(0)})$, дотримуючись [13], в кожній точці $\tilde{u}_n^{(0)} \in \tilde{\Omega}_n$ визначається так:

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_n'(\tilde{u}_n^{(0)})\tilde{u}_n = -\frac{1}{2}\Big\{&\Big(\overline{A}(x_i, y_j, u_{ij}^{(0)}, (u_{ij}^{(0)})_{\bar{x}}, (u_{ij}^{(0)})_{\bar{y}}) + \overline{A}(x_i, y_j, u_{ij}^{(0)}, (u_{ij}^{(0)})_x, (u_{ij}^{(0)})_y)\Big)(u_{ij})_{\bar{x}x} + \\ &+ \Big(\overline{B}(x_i, y_j, u_{ij}^{(0)}, (u_{ij}^{(0)})_{\bar{x}}, (u_{ij}^{(0)})_{\bar{y}}) + \overline{B}(x_i, y_j, u_{ij}^{(0)}, (u_{ij}^{(0)})_x, (u_{ij}^{(0)})_y)\Big)(u_{ij})_{xy} + \\ &+ \Big(\overline{C}(x_i, y_j, u_{ij}^{(0)}, (u_{ij}^{(0)})_{\bar{x}}, (u_{ij}^{(0)})_{\bar{y}}) + \overline{C}(x_i, y_j, u_{ij}^{(0)}, (u_{ij}^{(0)})_x, (u_{ij}^{(0)})_y)\Big)(u_{ij})_{\bar{y}y} + \\ &+ \tilde{D}(x_i, y_j, u_{ij}, (u_{ij})_{\bar{x}}, (u_{ij})_x, (u_{ij})_{\bar{y}}, (u_{ij})_y, u_{ij}^{(0)})\Big\}, \quad \tilde{u}_n \in \tilde{X}_n,\end{aligned} \tag{24}$$

де

$$\begin{aligned}\tilde{D} = (u_{ij}^{(0)})_{\bar{x}x}\Bigg[&\left(\frac{\partial\overline{A}}{\partial u}(x_i, y_j, u_{ij}^{(0)}, (u_{ij}^{(0)})_{\bar{x}}, (u_{ij}^{(0)})_{\bar{y}}) + \frac{\partial\overline{A}}{\partial u}(x_i, y_j, u_{ij}^{(0)}, (u_{ij}^{(0)})_x, (u_{ij}^{(0)})_y)\right)u_{ij} + \\ &+ \frac{\partial\overline{A}}{\partial p}(x_i, y_j, u_{ij}^{(0)}, (u_{ij}^{(0)})_{\bar{x}}, (u_{ij}^{(0)})_{\bar{y}})(u_{ij})_{\bar{x}} + \frac{\partial\overline{A}}{\partial p}(x_i, y_j, u_{ij}^{(0)}, (u_{ij}^{(0)})_x, (u_{ij}^{(0)})_y)\,(u_{ij})_x + \\ &+ \frac{\partial\overline{A}}{\partial q}(x_i, y_j, u_{ij}^{(0)}, (u_{ij}^{(0)})_{\bar{x}}, (u_{ij}^{(0)})_{\bar{y}})(u_{ij})_{\bar{y}} + \frac{\partial\overline{A}}{\partial q}(x_i, y_j, u_{ij}^{(0)}, (u_{ij}^{(0)})_x, (u_{ij}^{(0)})_y)\,(u_{ij})_y\Bigg] + \\ + (u_{ij}^{(0)})_{xy}\Bigg[&\left(\frac{\partial\overline{B}}{\partial u}(x_i, y_j, u_{ij}^{(0)}, (u_{ij}^{(0)})_{\bar{x}}, (u_{ij}^{(0)})_{\bar{y}}) + \frac{\partial\overline{B}}{\partial u}(x_i, y_j, u_{ij}^{(0)}, (u_{ij}^{(0)})_x, (u_{ij}^{(0)})_y)\right)u_{ij} + \\ &+ \frac{\partial\overline{B}}{\partial p}(x_i, y_j, u_{ij}^{(0)}, (u_{ij}^{(0)})_{\bar{x}}, (u_{ij}^{(0)})_{\bar{y}})(u_{ij})_{\bar{x}} + \frac{\partial\overline{B}}{\partial p}(x_i, y_j, u_{ij}^{(0)}, (u_{ij}^{(0)})_x, (u_{ij}^{(0)})_y)\,(u_{ij})_x + \\ &+ \frac{\partial\overline{B}}{\partial q}(x_i, y_j, u_{ij}^{(0)}, (u_{ij}^{(0)})_{\bar{x}}, (u_{ij}^{(0)})_{\bar{y}})(u_{ij})_{\bar{y}} + \frac{\partial\overline{B}}{\partial q}(x_i, y_j, u_{ij}^{(0)}, (u_{ij}^{(0)})_x, (u_{ij}^{(0)})_y)\,(u_{ij})_y\Bigg] + \\ + (u_{ij}^{(0)})_{\bar{y}y}\Bigg[&\left(\frac{\partial\overline{C}}{\partial u}(x_i, y_j, u_{ij}^{(0)}, (u_{ij}^{(0)})_{\bar{x}}, (u_{ij}^{(0)})_{\bar{y}}) + \frac{\partial\overline{C}}{\partial u}(x_i, y_j, u_{ij}^{(0)}, (u_{ij}^{(0)})_x, (u_{ij}^{(0)})_y)\right)u_{ij} +\end{aligned}$$

$$+\frac{\partial\overline{C}}{\partial p}(x_i,y_j,u_{ij}^{(0)},(u_{ij}^{(0)})_{\bar{x}},(u_{ij}^{(0)})_{\bar{y}})(u_{ij})_{\bar{x}}+\frac{\partial\overline{C}}{\partial p}(x_i,y_j,u_{ij}^{(0)},(u_{ij}^{(0)})_{x},(u_{ij}^{(0)})_{y})\,(u_{ij})_{x}+$$

$$\left.+\frac{\partial\overline{C}}{\partial q}(x_i,y_j,u_{ij}^{(0)},(u_{ij}^{(0)})_{\bar{x}},(u_{ij}^{(0)})_{\bar{y}})(u_{ij})_{\bar{y}}+\frac{\partial\overline{C}}{\partial q}(x_i,y_j,u_{ij}^{(0)},(u_{ij}^{(0)})_{x},(u_{ij}^{(0)})_{y})\,(u_{ij})_{y}\right]+$$

$$+\left(\frac{\partial\overline{D}}{\partial u}(x_i,y_j,u_{ij}^{(0)},(u_{ij}^{(0)})_{\bar{x}},(u_{ij}^{(0)})_{\bar{y}})+\frac{\partial\overline{D}}{\partial u}(x_i,y_j,u_{ij}^{(0)},(u_{ij}^{(0)})_{x},(u_{ij}^{(0)})_{y})\right)u_{ij}+$$

$$+\frac{\partial\overline{D}}{\partial p}(x_i,y_j,u_{ij}^{(0)},(u_{ij}^{(0)})_{\bar{x}},(u_{ij}^{(0)})_{\bar{y}})(u_{ij})_{\bar{x}}+\frac{\partial\overline{D}}{\partial p}(x_i,y_j,u_{ij}^{(0)},(u_{ij}^{(0)})_{x},(u_{ij}^{(0)})_{y})\,(u_{ij})_{x}+$$

$$\left.+\frac{\partial\overline{D}}{\partial q}(x_i,y_j,u_{ij}^{(0)},(u_{ij}^{(0)})_{\bar{x}},(u_{ij}^{(0)})_{\bar{y}})(u_{ij})_{\bar{y}}+\frac{\partial\overline{D}}{\partial q}(x_i,y_j,u_{ij}^{(0)},(u_{ij}^{(0)})_{x},(u_{ij}^{(0)})_{y})\,(u_{ij})_{y}\right\}.$$

Так як $\widetilde{Q}_n'(\widetilde{u}_n^{(0)})$, $\widetilde{u}_n^{(0)}\in\widetilde{\Omega}_n$ – неперервний оператор в $\widetilde{X}_n$, то тим самим $\widetilde{Q}_n$ диференційований на $\widetilde{\Omega}_n$ [13]. Тоді, за властивостями похідних, диференційованим на $\widetilde{\Omega}_n$ є й оператор $\widetilde{A}_n=\widetilde{T}_n+\mu\,\widetilde{Q}_n$, причому $\widetilde{A}_n'(\widetilde{u}_n^{(0)})=\widetilde{T}_n'(\widetilde{u}_n^{(0)})+\mu\widetilde{Q}_n'(\widetilde{u}_n^{(0)})$, $\widetilde{u}_n^{(0)}\in\widetilde{\Omega}_n$, де $\widetilde{T}_n'(\widetilde{u}_n^{(0)})$ і $\widetilde{Q}_n'(\widetilde{u}_n^{(0)})$ визначені в (23), (24). З тих самих міркувань, що і вище (стосовно оператора $A''(u_0)$), можна встановити існування і рівномірну обмеженість оператора $\widetilde{A}_n''(\widetilde{u}_n^{(0)})$ із $\widetilde{\Omega}_n$ в $L(\widetilde{X}_n,\widetilde{X}_n)$, що забезпечує виконуваність в $\widetilde{\Omega}_n$ умови Ліпшица для оператора $\widetilde{A}_n'(\widetilde{u}_n^{(0)})$, $n=1,2,\ldots$.

Перевіримо виконуваність умов близькості під час проектування в простори $\widetilde{X}_n$ $(n=1,\ 2,\ldots)$:

$$\left\|\widetilde{T}_n\widetilde{u}_n-\overline{\Phi}_nT\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n\right\|_{\widetilde{X}_n}\le\widetilde{\alpha}_{1,n},\quad\left\|\widetilde{Q}_n\widetilde{u}_n-\overline{\Phi}_nQ\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n\right\|_{\widetilde{X}_n}\le\widetilde{\alpha}_{2,n},$$

$$\left\|\widetilde{T}_n'(\widetilde{u}_n)-\overline{\Phi}_nT'(\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n)\Phi_n^{-1}\right\|\le\widetilde{\alpha}_{1,n}',\quad\left\|\widetilde{Q}_n'(\widetilde{u}_n)-\overline{\Phi}_nQ'(\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n)\Phi_n^{-1}\right\|\le\widetilde{\alpha}_{2,n}'\qquad(25)$$

для всіх $\widetilde{u}_n\in\widetilde{\Omega}_n$, де $\widetilde{\alpha}_{1,n},\widetilde{\alpha}_{2,n},\widetilde{\alpha}_{1,n}',\widetilde{\alpha}_{2,n}'\to 0$ при $n\to\infty$;

$$\left\|\Phi_n^{-1}\overline{\Phi}_nTu-Tu\right\|_X\le\widetilde{\beta}_{1,n},\quad\left\|\Phi_n^{-1}\overline{\Phi}_nQu-Qu\right\|_X\le\widetilde{\beta}_{2,n},$$

$$\left\|\Phi_n^{-1}\overline{\Phi}_nT'(u)-T'(u)\right\|\le\widetilde{\beta}_{1,n}',\quad\left\|\Phi_n^{-1}\overline{\Phi}_nQ'(u)-Q'(u)\right\|\le\widetilde{\beta}_{2,n}'\qquad(26)$$

для всіх $u\in S(u^{(0)},R)$, де $\widetilde{\beta}_{1,n},\widetilde{\beta}_{2,n},\widetilde{\beta}_{1,n}',\widetilde{\beta}_{2,n}'\to 0$ при $n\to\infty$;

$$\left\|\Phi_n^{-1}\overline{\Phi}_nf-f\right\|_X\le\widetilde{\gamma}_n,\quad\forall\ f\in X,\qquad(27)$$

де $\tilde{\gamma}_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Оскільки $T'(\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n)=T=-\Delta$, $\widetilde{T}_n'(\widetilde{u}_n)\,\widetilde{z}_n=\widetilde{T}_n\widetilde{z}_n=-\left((z_{ij})_{\bar{x}x}+(z_{ij})_{\bar{y}y}\right)$ для всіх $\widetilde{u}_n,\widetilde{z}_n\in\widetilde{\Omega}_n$ (див. (21), (23)), то, вочевидь, виконуваність першої умови в (25) приводить до виконуваності третьої умови в (25):

$$\left\|\widetilde{T}_n'(\widetilde{u}_n)-\overline{\Phi}_nT'(\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n)\Phi_n^{-1}\right\|=\left\|\widetilde{T}_n-\overline{\Phi}_nT\Phi_n^{-1}\right\|=$$

$$= \sup_{\|\tilde{z}_n\|_{\tilde{X}_n} \le 1} \left\| \tilde{T}_n \tilde{z}_n - \bar{\Phi}_n T \Phi_n^{-1} \tilde{z}_n \right\|_{\tilde{X}_n} \le \tilde{\alpha}_{1,n} = \tilde{\alpha}'_{1,n}.$$

Для будь-якого $\tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n$, користуючись виразом для похибки апроксимації оператора Лапласа його різницевим аналогом [14], в припущенні про існування в $\overline{G}$ узагальнених похідних четвертого порядку від $u_n(x,y) \in X_n$ знайдемо:

$$\left\| \tilde{T}_n \tilde{u}_n - \bar{\Phi}_n T \Phi_n^{-1} \tilde{u}_n \right\|_{\tilde{X}_n} = \left\| \bar{\Phi}_n \Delta \Phi_n^{-1} \tilde{u}_n - \Lambda_n \tilde{u}_n \right\|_{\tilde{X}_n} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=0}^{N_1^{(n)}-1} \sum_{j=0}^{N_2^{(n)}-1} \left((\Delta u_n)_{ij} - \Lambda_n u_{ij} \right)^2 h_1^{(n)} h_2^{(n)}} \le$$

$$\le \sqrt{\sum_{i=0}^{N_1^{(n)}-1} \sum_{j=0}^{N_2^{(n)}-1} \left(M_{1,n} \frac{h_1^{(n)2}}{12} + M_{2,n} \frac{h_1^{(n)2}}{12} \right)^2 h_1^{(n)} h_2^{(n)}} = \frac{\pi}{12} (M_{1,n} h_1^{(n)2} + M_{2,n} h_2^{(n)2}) = \tilde{\alpha}_{1,n},$$

де $M_{1,n} = \sup\limits_{(x,y)\in\overline{G}} \left| \dfrac{\partial^4 u_n}{\partial x^4}(x,y) \right|$, $M_{2,n} = \sup\limits_{(x,y)\in\overline{G}} \left| \dfrac{\partial^4 u_n}{\partial y^4}(x,y) \right|$. Так як $\tilde{\alpha}_{1,n} \to 0$ при $h_1^{(n)} \to 0$, $h_2^{(n)} \to 0$ $(n \to \infty)$, то перша і третя умови в (25) виконуються. Що стосується другої і четвертої умов в (25), то на підставі (8) маємо

$$Q \Phi_n^{-1} \tilde{u}_n = Q u_n = -\left(\frac{\partial}{\partial x}(p_n F_n) + \frac{\partial}{\partial y}(q_n F_n) \right), \quad \forall \tilde{u}_n \in \tilde{\Omega}_n,$$

а на підставі (22),

$$Q'(\Phi_n^{-1}\tilde{u}_n)\Phi_n^{-1}\tilde{z}_n = -\left\{ \left(F_n + p_n \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right)_n \right) \frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2} + \left(p_n \left(\frac{\partial F}{\partial q} \right)_n + q_n \left(\frac{\partial F}{\partial p} \right)_n \right) \frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y} + \right.$$

$$\left. + \left(F_n + q_n \left(\frac{\partial F}{\partial q} \right)_n \right) \frac{\partial^2 z_n}{\partial y^2} + \hat{D}(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}, u_n) \right\}, \quad \forall \tilde{u}_n, \tilde{z}_n \in \tilde{\Omega}_n,$$

де через F_n позначено результат підстановки в $F \equiv F(x, y, u, p, q)$ замість u функції u_n і замість p і q частинних похідних $p_n = \dfrac{\partial u_n}{\partial x}$, $q_n = \dfrac{\partial u_n}{\partial y}$, $(x,y) \in G$.

Тому з визначення оператора $\overline{\Phi}_n$ і з (12), (15), (24) зрозуміло, що друга і четверта умови в (25) є за суттю умовами апроксимації диференціальних операторів Q і Q' відповідно їх сітковими аналогами. Користуючись розкладаннями функцій u_n, $z_n \in X_n \cap S$ в ряд Тейлора в околі точки $(x_i, y_j) \in \omega_n$, можна показати виконуваність зазначених двох умов з величинами $\tilde{\alpha}_{2,n}$, $\tilde{\alpha}'_{2,n}$ порядку $O(h_1^{(n)2} + h_2^{(n)2})$. Це разом з апроксимацією граничної умови (5) згідно з останнім співвідношенням в (15) забезпечує другий порядок апроксимації вихідної крайової задачі (4), (5) її сітковим аналогом (12) на сітці $\overline{\omega}_n$, $n = 1, 2, \ldots$.

Встановимо виконуваність умови (27) для будь-якого $f \in \dot{L}_2(\bar{G})$. Використовуючи розкладання функції $f(x,y)$ в ряд Тейлора в околі точки $(x_i, y_j) \in \omega_n$, отримаємо:

$$\|\Phi_n^{-1}\bar{\Phi}_n f - f\|_X = \sqrt{\iint_G (f_n(x,y) - f(x,y))^2\,dxdy} = \left[\iint_G \left(\sum_{l=0}^{N_1^{(n)}-1}\sum_{m=0}^{N_2^{(n)}-1} f_{lm}\,\chi_{lm}^{(n)}(x,y) -\right.\right.$$

$$\left.\left. - f(x,y)\right)^2 dxdy\right]^{1/2} = \sqrt{\sum_{i=0}^{N_1^{(n)}-1}\sum_{j=0}^{N_2^{(n)}-1}\iint_{G_{ij}^{(n)}}\left(\sum_{l=0}^{N_1^{(n)}-1}\sum_{m=0}^{N_2^{(n)}-1} f_{lm}\,\chi_{lm}^{(n)}(x,y) - f(x,y)\right)^2 dxdy} =$$

$$= \sqrt{\sum_{i=0}^{N_1^{(n)}-1}\sum_{j=0}^{N_2^{(n)}-1}\iint_{G_{ij}^{(n)}}\left(f_{ij} - f(x,y)\right)^2 dxdy} = \left[\sum_{i=0}^{N_1^{(n)}-1}\sum_{j=0}^{N_2^{(n)}-1}\iint_{G_{ij}^{(n)}}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}_i, y_j)(x - x_i) +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, \tilde{y}_j)(y - y_j)\right)^2 dxdy\right]^{1/2} \le \sqrt{\sum_{i=0}^{N_1^{(n)}-1}\sum_{j=0}^{N_2^{(n)}-1}\iint_{G_{ij}^{(n)}}(M_{3,n}h_1^{(n)} + M_{4,n}h_2^{(n)})^2\,dxdy} =$$

$$= (M_{3,n}h_1^{(n)} + M_{4,n}h_2^{(n)})\sqrt{\sum_{i=0}^{N_1^{(n)}-1}\sum_{j=0}^{N_2^{(n)}-1} h_1^{(n)}h_2^{(n)}} = \pi\,(M_{3,n}h_1^{(n)} + M_{4,n}h_2^{(n)}) = \tilde{\gamma}_n,$$

де $\tilde{x}_i \in (x_i, x_{i+1})$, $\tilde{y}_j \in (y_j, y_{j+1})$, $M_{3,n} = \sup\limits_{(x,y)\in\bar{G}}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|$, $M_{4,n} = \sup\limits_{(x,y)\in\bar{G}}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|$.

Так як $\tilde{\gamma}_n \to 0$ при $h_1^{(n)}, h_2^{(n)} \to 0$ $(n \to \infty)$, то умова (27) виконується для будь-якого $f \in \dot{L}_2(\bar{G})$.

Оскільки образами при відображеннях T, Q і $T'(u) = T$, $Q'(u)$, $\forall u \in S$ є елементи простору $X = \dot{L}_2(\bar{G})$, то аналогічно доведенню виконуваності умови (27) можна встановити і виконуваність умов (26) з константами $\tilde{\beta}_{1,n} = \tilde{\beta}'_{1,n}$, $\tilde{\beta}_{2,n}$, $\tilde{\beta}'_{2,n}$, що мають порядок $O(h_1^{(n)} + h_2^{(n)})$, тобто прямують до нуля при $n \to \infty$. Таким чином, при кожному $n = 1, 2, \ldots$ умови близькості (25), (26), (27) виконуються.

Покажемо, що оператор Лапласа Δ, розглядуваний як оператор із $D(A) \subset X$ в $X = \dot{L}_2(\bar{G})$, має неперервний обернений. З цією метою розглянемо за умови (5) рівняння Пуассона

$$\Delta u = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in G, \tag{28}$$

де $\varphi \in X$, і розкладемо праву частину цього рівняння в ряд Фур'є по косинусах:

$$\varphi(x,y) = \sum_{l,m=0}^{\infty} a_{lm} \cos lx \cos my,$$

де $a_{00} = \dfrac{1}{\pi^2} \iint_G \varphi(x,y)\, dxdy$; $a_{lm} = \dfrac{4}{\pi^2} \iint_G \varphi(x,y) \cos lx \cos my\, dxdy \quad (l, m = 0, 1, \ldots)$.

На підставі (9) $a_{00} = 0$. Тому, як легко бачити, єдиний розв'язок рівняння (28), який задовольняє граничну умову (5), дається рядом [13]

$$u(x,y) = \sum_{\substack{l,m=0\\ l+m\neq 0}}^{\infty} \frac{a_{lm}}{l^2+m^2} \cos lx \cos my, \quad (x,y) \in \overline{G}.$$

Звідси випливає, що знайдеться число $M > 0$ таке, що

$$\| u \|_X^2 = \sum_{\substack{l,\, m=0\\ l+m\neq 0}}^{\infty} \frac{a_{lm}^2}{(l^2+m^2)^2} \le M^2 \cdot \sum_{\substack{l,\, m=0\\ l+m\neq 0}}^{\infty} a_{lm}^2 = M^2 \| \varphi \|_X^2,$$

тобто $\| u \|_X \le M \| \varphi \|_X$, і існування оператора Δ^{-1}, а значить, і оператора $[T'(u)]^{-1} = (-\Delta)^{-1}$, що задовольняє першу з умов (2.118), тим самим доведено; при цьому $\left\| [T'(u)]^{-1} \right\| \le b = M$.

Методи обернення різницевого оператора Лапласа $\widetilde{T}_n = -\Lambda_n$ за умови Неймана (14) можна знайти в [16]. Виходячи з цього і враховуючи обмеженість лінійних операторів $[\widetilde{T}_n'(\widetilde{u}_n)]^{-1} = [-\Lambda_n]^{-1}$ і $\widetilde{Q}_n'(\widetilde{u}_n)$, $\widetilde{u}_n \in \widetilde{\Omega}_n$ в скінченновимірному просторі $\widetilde{X}_n = \dot{H}_{h_n}$, отримуємо здійсненність умови $\left\| [\widetilde{T}_n'(\widetilde{u}_n)]^{-1} \widetilde{Q}_n'(\widetilde{u}_n) \right\| \le \widetilde{\nu}_n$, $\forall\, \widetilde{u}_n \in \widetilde{\Omega}_n$, з якої при певних припущеннях на значення $\widetilde{\nu}_n$ і параметра μ випливає існування на $\widetilde{\Omega}_n$ операторів $[\widetilde{A}_n'(\widetilde{u}_n)]^{-1}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Таким чином, показана принципова можливість застосування проекційно-ітераційного методу (17), основаного на методі Ньютона, до розв'язання квазілінійної еліптичної крайової задачі з параметром (4), (5). Відмітимо, зокрема, що оскільки при $\mu = 0$ розв'язок цієї задачі існує, то на підставі теореми 4 [15] його можна гарантувати і для всіх достатньо малих μ. Якщо початкове наближення $\widetilde{u}_1^{(0)} = \{u_{ij}^{(0)}\}_{i=\overline{0,N_1^{(1)}},\, j=\overline{0,N_2^{(1)}}} \in \widetilde{\Omega}_1$ в (17) (або, що теж саме, в (18), (19)) при $n = 1$ є розв'язком відповідної сіткової задачі (12), (14) при $\mu = 0$:

$$\Lambda_1 u_{ij} = -f(x_i, y_j), \quad (x_i, y_j) \in \omega_1; \quad B_1 u_{ij} \Big|_{(x_i, y_j) \in \gamma_1} = 0,$$

то кожен крок методу (17) зводиться до розв'язування в $\widetilde{\Omega}_n \subset \widetilde{X}_n$ різницевого лінійного еліптичного рівняння

$$\widetilde{A}_n'(\widetilde{u}_n^{(k)})\, \widetilde{u}_n^{(k+1)}(\mu) = \mu \left(\widetilde{Q}_n'(\widetilde{u}_n^{(k)}) - \widetilde{Q}_n \right) \widetilde{u}_n^{(k)}(\mu) + \widetilde{f}_n, \quad k = 0, 1, \ldots, k_n - 1; \qquad (29)$$

$$\widetilde{u}_{n+1}^{(0)}(\mu) = \Phi_{n+1} \Phi_n^{-1} \widetilde{u}_n^{(k_n)}(\mu), \quad n = 1, 2, \ldots; \quad \widetilde{u}_1^{(0)}(\mu) = \widetilde{u}_1^{(0)} \in \widetilde{\Omega}_1,$$

або в термінах сіткових функцій:

$$\left(\Lambda_n + \mu \Psi_n'(u_{ij}^{(k)}) \right) u_{ij}^{(k+1)}(\mu) = \mu \left(\Psi_n'(u_{ij}^{(k)}) - \Psi_n \right) u_{ij}^{(k)}(\mu) - f(x_i, y_j),$$

$$(x_i, y_j) \in \omega_n, \quad k = 0, 1, \ldots, k_n - 1,$$

за умов (19), (20).

Слід відзначити, що хоча метод Ньютона має високу (квадратичну) швидкість збіжності, реалізація схеми (29), яка передбачає обчислення оператора $\widetilde{A}'_n(\widetilde{u}_n^{(k)})$ та його обернення на кожній ітерації, не завжди вдається на практиці, а якщо і вдається, то вимагає значних затрат праці і часу. Набагато простіше реалізується схема

$$\widetilde{u}_n^{(k+1)}(\mu) = \widetilde{u}_n^{(k)}(\mu) - [\widetilde{T}'_n(\widetilde{u}_n^{(k)})]^{-1}(\widetilde{A}_n\widetilde{u}_n^{(k)}(\mu) - \widetilde{f}_n), \quad k = 0, 1, \dots, k_n - 1;$$

$$\widetilde{u}_{n+1}^{(0)}(\mu) = \Phi_{n+1}\Phi_n^{-1}\widetilde{u}_n^{(k_n)}(\mu), \quad n \ge N; \quad \widetilde{u}_N^{(0)}(\mu) = \widetilde{u}_N^{(0)} \in \widetilde{\Omega}_N,$$

основана на методі (11), подібному до методу Ньютона, яка приводить до розв'язання різницевої задачі Неймана для рівняння Пуассона на кожному кроці проекційно-ітераційного процесу:

$$\Lambda_n u_{ij}^{(k+1)}(\mu) = -\left(\mu\, \Psi_n u_{ij}^{(k)}(\mu) + f(x_i, y_j)\right), \ (x_i, y_j) \in \omega_n, \ k = 0,1,\dots,k_n - 1, \quad (30)$$

$$B_n u_{ij}^{(k)}(\mu)\Big|_{(x_i, y_j)\in\gamma_n} = 0, \ k = 0,1,\dots,k_n; \quad u_{ij}^{(0)}(\mu) = u_{ij}^{(0)}, \ (x_i, y_j) \in \bar{\omega}_1; \quad (31)$$

$$u_{ij}^{(0)}(\mu) = \sum_{l=0}^{N_1^{(n)}-1} \sum_{m=0}^{N_2^{(n)}-1} u_{lm}^{(k_n)}(\mu)\ \chi_{lm}^{(n)}(x_i, y_j), \ (x_i, y_j) \in \bar{\omega}_{n+1}, \ n = 1,2,\dots \quad (32)$$

Існування і розташування розв'язку $u^* \equiv u^*(x, y;\ \mu)$, $(x,\ y) \in \bar{G}$ вихідної крайової задачі (4), (5), а також збіжність до u^* в $X = \dot{L}_2(\bar{G})$ послідовності кусково-лінійних інтерполянтів $\{u_n^{(k_n)}(x, y)\}_{n=1}^{\infty}$, $(x, y) \in \bar{G}$, що визначається за формулами (30)-(32), (16), встановлюються за допомогою теореми 2.21 з [10].

Аналіз отриманих результатів та висновки. У роботі досліджено питання про застосування проекційно-ітераційних методів до розв'язання квазілінійного параметричного рівняння еліптичного типу з крайовими умовами Неймана. Показано, що метод скінченних різниць наближеного розв'язання такої задачі відноситься до класу проекційних методів і обґрунтовано його проекційно-ітераційні модифікації, основані на методі Ньютона та ітераційному процесі, подібному до методу Ньютона (із заміною оберненого оператора до похідної на близький до нього оператор в кожній точці процесу).

Результати досліджень для розглянутого класу нелінійних задач свідчать про те, що застосування ітераційного методу Ньютона не до вихідної нелінійної задачі, а до більш простих наближених (сіткових) задач дозволяє найбільш просто будувати послідовність наближень до розв'язку, а також в значній мірі полегшує задачу про вибір початкового наближення, оскільки перевірка достатніх умов, що накладаються на вибір початкового наближення, має бути проведена лише для початкової задачі, найбільш простої з усіх наближених задач. Це забезпечує виконуваність аналогічних умов і для наступних наближених задач. Така властивість проекційно-ітераційного методу є надзвичайно важливою, оскільки під час розв'язування ітераційними методами нелінійних задач вибір належного початкового наближення є одним з найбільш складних моментів.

Відзначимо, що способи вибору чисел k_n $(n = 1, 2, \dots)$ в проекційно-ітераційних методах розв'язання нелінійних рівнянь можна знайти в роботах [10, 11, 17, 18]. Там же відзначається, що запропоновані проекційно-ітераційні обчислювальні схеми мають певні переваги в порівнянні з класичними алгоритмами проекційного типу не тільки за якістю отримуваних наближених розв'язків, а й за кількістю обчислювальних витрат, значна частина яких припадає на розв'язування наближених задач невисокої розмірності. Поряд з тим, що програмна реалізація алгоритмів обох типів вимагає від комп'ютера приблизно однакової обчислювальної потужності (оскільки проекційно-ітераційний алгоритм лише багаторазово використовує класичний), оцінка кількості необхідних арифметичних операцій і час рахунку підтверджують ефективність проекційно-ітераційного підходу.

Бібліографічні посилання

1. Lubyshev V.F. Precise range of the existence of positive solutions of a nonlinear, indefinite in sign Neumann problem. *Communications on Pure and Applied Analysis*. 2009. V. 8, No 3. P. 999–1018. https://doi.org/10.3934/cpaa.2009.8.999.
2. Гарт Э.Л., Гарт Л.Л. Применение проекционно-итерационного метода к исследованию напряженно-деформированного состояния пластины с отверстием. *Вісник Донецького університету. Серія А. Природничі науки*. 2002. Вип. 2. С. 54–58.
3. Ghanbari A., Bahrami M. Nonlinear Modeling Application to Micro-/Nanorobotics. *In: Jazar, Reza N., Dai, Liming (Eds.) Nonlinear Approaches in Engineering Applications*. 2020. Pp. 113-140. https://doi.org/10.1007/978-3-030-18963-1_4.
4. Ruili Wu, Junyan Li. Boundary value problem for a fully nonlinear elliptic equation. *Journal of Physics: Conference Series.* 2021. V. 1978, No 012028. Pp. 1–6. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1978/1/012028.
5. Li S.J., Wu S., Zhou H.S. Solutions to semilinear elliptic problems with combined nonlinearities. *Differential Equations*. 2002. V. 185, No 1. Pp. 200–224. https://doi.org/10.1006/jdeq.2001.4167.
6. Umezu K. Nonlinear elliptic boundary value problems suggested by fermentation. *Nonlinear Differential Equations and Applications*. 2000. V. 7. Pp. 143–155. https://doi.org/10.1007/s000300050002.
7. Гарт Л.Л., Довгай П.О., Селіщев В.Л. Сіткові алгоритми розв'язання задачі оптимального керування еліптичною системою. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. 2017. Вип. 17. С. 42–53. https://doi.org/10.15421/321705.
8. Hart L.L. The application of projection-iteration methods to solving optimal control problems for systems of ordinary differential equations. *Hamburger Beiträge zur Angewandten Mathematik. Institut für Angewandten Mathematik der Universität Hamburg*, 2000. Reihe A, No 152. Pp. 1–17.
9. Hart L.L. Calculating the optimum two-link robot arm with respect to movement time. *Journal of Mathematical Sciences*. 2001. V. 107, No 6. Pp. 4458–4463. https://doi.org/10.1023/A:1012525005260.
10. Гарт Л.Л. Проекційно-ітераційні методи розв'язання операторних рівнянь та задач нескінченновимірної оптимізації. Дис. … д-ра фіз.-мат. наук, 01.05.01, МОН України. Дніпро: ДНУ, 2017. 293 с.
11. Балашова С.Д. Приближенные методы решения операторных уравнений. Днепропетровск: ДГУ, 1980. 112 с.
12. Gilbarg D., Trudinger N.S. Elliptic partial differential equations of second order. New York: Springer-Verlag, 2001. 532 pp. https://doi.org/10.1007/978-3-642-61798-0.

13. Kantorovich L.V., Akilov G.P. Functional analysis, 2nd edition. Pergamon: Elsevier, 1982. 604 pp. https://doi.org/10.1016/C2013-0-03044-7.
14. Samarskii A.A. The theory of difference schemes. New York: Marcel Dekker, Inc., 2001. 788 pp. https://doi.org/10.1201/9780203908518.
15. Гарт Л.Л. О численном моделировании решения нелинейного параметрического уравнения проекционно-итерационным методом. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. 2011. Вип. 11. С. 66–75.
16. Samarskii A.A., Nikolaev E.S. Numerical methods for grid equations, v.1 Direct Methods, v.2 Iterative Methods. Basel-Boston-Berlin: Birkhauser Verlag, 1989. 242 pp., 502 pp. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-9272-8.
17. Hart L.L. Projection-Iteration realization of a Newton-like method for solving nonlinear operator equations. *Journal of optimization, differential equations and their applications*. 2019. V. 27, No 1. Pp. 58–68. https://doi.org/10.15421/141903.
18. Hart L.L. Combined approach to solving nonlinear operator equations based on a Newton-like method. *In: Rıdvan Ezentaş (ed) Recent studies in mathematics and its applications*, Chapter 4. Ankara: IKSAD Publishing House, 2021. Pp. 73–103.

Надійшла до редколегії 05.05.21.