УДК 539.3

Н. А. Гук

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

КОРРЕКТНОСТЬ ВАРИАЦИОННОЙ ПОСТАНОВКИ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ТОНКОСТЕННЫХ СИСТЕМ

Розглядається умовно-коректна постановка оберненої задачі теорії тонкостінних систем. Доведено існування відображення множини розв'язків оберненої задачі на множину розв'язків прямої задачі. При наявності результатів вимірювань та існування неособливого розв'язку прямої задачі доведена єдиність розв'язку оберненої задачі на компактній множині.

Рассматривается условно-корректная постановка обратной задачи теории тонкостенных систем. Доказано существование отображения множества решений обратной задачи на множество решений прямой задачи. При наличии результатов измерений и существовании неособого решения прямой задачи доказана единственность решения обратной задачи на компактном множестве.

Conditionally-correct formulation of the inverse problem of the theory of thin-walled systems is considered. The existence of the mapping set of solutions of the inverse problem on the set of solutions of direct problem is proved. The uniqueness of the solution of the inverse problem on a compact set is proved in the presence of measurement results and the existence of a nonsingular solution of the direct problem.

Ключевые слова: обратная задача, прямая задача, вариационная постановка, функционал-невязка, компактное множество.

Решение обратной задачи предполагает определение неизвестных свойств объекта исследования или процесса по его наблюдаемым косвенным характеристикам. Особенностью большинства обратных задач является их некорректность [7], которая связана либо с невозможностью обращения оператора математической модели – обратный оператор является неограниченным, либо с влиянием погрешности измерений на погрешность восстановления свойств объекта – полученные решения оказываются неустойчивыми. Для построения устойчивых решений, как правило, используется управление классическими алгоритмами решения некорректно поставленных задач (регуляризирующие алгоритмы) или условно-корректная постановка обратной задачи, основанная на привлечении дополнительной информации об искомом решении [7].

Одним из способов условно-корректной постановки обратной задачи является ее формулировка на основе метода квазиобращения [7] как вариационной. Применение такого подхода позволяет свести обратную задачу к задаче минимизации среднеквадратического уклонения между расчетными, полученными с использованием математической модели прямой задачи, и наблюдаемыми значениями характеристик объекта [1; 5; 6].

В настоящей работе эффективность вариационной формулировки для решения обратной задачи теории оболочек обеспечивается выполнением определенных ограничений на свойства оператора прямой задачи и заданием свойств множества, на котором отыскивается решение обратной задачи.

Постановка задачи. Рассматривается обратная задача теории тонкостенных систем, в которой необходимо определить неизвестную вектор-функцию $H(X)$ по известным (измеренным) значениям деформаций оболочки в некоторых точках γ_r, расположенных на ее граничных поверхностях:

$$\sigma_{\gamma_r} = \sigma^*_{\gamma_r}, \; r = \overline{1, N}, \tag{1}$$

здесь $\sigma = \{\varepsilon_{ilr}, \chi_{ilr}\}$, $i, l = 1,2$ – вектор-функция, компонентами которой являются тангенциальные и изгибные деформации срединной поверхности оболочки; σ^* – измеренные значения этой же функции; N – число точек наблюдения.

В качестве неизвестных вектор-функций $H(X)$ обратной задачи теории оболочек могут выступать функции, характеризующие действующие в системе нагрузки, условия закрепления граничного контура оболочки, геометрические характеристики объекта, физико-механические и теплофизические свойства материала.

Математическая модель прямой и обратной задачи. Для определения расчетных значений деформаций $\sigma(H)\big|_{\gamma=\gamma_r} = \{\varepsilon_{ij}, \chi_{ij}\}^T$ в точках γ_r поверхности используются геометрические соотношения теории оболочек:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[u_{i,\xi_j} + u_{j,\xi_i}\right] + B_{ij} w + \frac{1}{2} w_{,\xi_i} w_{,\xi_j};$$
$$\chi_{ij} = -\left(w_{,\xi_i}\right)_{,\xi_j}; \; i, j = 1,2. \tag{2}$$

и линеаризованные соотношения обобщенного решения, сформулированные для приращения функции перемещений $U(X,H)$ [2]:

$$(\Delta U,\Phi)_{\Psi_{t\chi}} = \int\limits_{\Omega}\Bigg[(B_{kl}(H_0)\Delta w - \frac{1}{2}w_{0,\xi_k}\Delta w_{,\xi_l})C_1^{ijkl}(H_0)\nabla_i\varphi_j +$$

$$+C_1^{ijkl}(H_0)(\varepsilon_{kl0}+\Delta\varepsilon_{kl})\Big(B_{ij}(H_0)\varphi - \Delta w_{,\xi_i}\varphi_{,\xi_j}\Big)\Bigg]d\xi_1 d\xi_2 + P(\Delta H, U_0)\,, \qquad (3)$$

где $\Delta U(X,H) \equiv \left(\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta w\right)$ – приращение к функции $U(X,H)$, вызванное изменением функции обратной задачи $H(X)$ на величину $\Delta H(X)$; $\Delta u_i(X,H)$ – приращения тангенциальных перемещений точек срединной поверхности оболочки в продольном и окружном направлениях; $\Delta w(X,H)$ – приращения нормальных перемещений точек срединной поверхности оболочки; ξ_1, ξ_2 – продольная и окружная координаты, $0 \le \xi_1 \le L$; $0 \le \xi_2 \le 2\pi R$; L, R – длина и радиус оболочки; $U_0(X,H_0)$ – некоторое неособое решение прямой задачи, характеризующее известное состояние оболочки; B_{ij} – кривизна срединной поверхности оболочки; $C_1^{ijkl}(H), C_2^{ijkl}(H)$ – функции, описывающие жесткость оболочки на растяжение – сжатие и изгибную жесткость; P – комплекс, учитывающий изменение нагрузки, геометрические свойства тонкостенной системы, а также граничные условия; $\Delta\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\left(\Delta u_{k,\xi_l} + \Delta u_{l\,,\xi_k}\right) + w_{0,\xi_k}\Delta w_{,\xi_l}$; $\Phi\big(\phi(\varphi_1,\varphi_2),\varphi\big)$ – произвольная вектор-функция; $i, j, k, l = 1{,}2$.

Для сравнения возможных различных деформированных состояний оболочки, формирующихся в результате оказанного внешнего воздействия, вводятся специальные энергетические пространства Ψ_χ и Ψ_t со скалярными произведениями:

$$(w_1,w_2)_{\Psi_\chi} = \int\limits_{\Omega}\varepsilon\, C_2^{ijkl}\chi_{ij}(w_1)\chi_{kl}(w_2)d\xi_1 d\xi_2\,;$$

$$(\omega_1,\omega_2)_{\Psi_t} = \int\limits_{\Omega}C_1^{ijkl}\varepsilon_{ij}(\omega_1)\varepsilon_{kl}(\omega_2)d\xi_1 d\xi_2$$

и функциональное пространство $\Psi_{t\chi}$, представляющее собой прямую сумму пространств Ψ_t и Ψ_χ ($\Psi_{t\chi} = \Psi_t \oplus \Psi_\chi$), со скалярным произведением:

$$(U_1,U_2)_{\Psi_{t\chi}} = (w_1,w_2)_{\Psi_\chi} + (\omega_1,\omega_2)_{\Psi_t} .$$

Для определения неизвестной вектор-функции $H(X)$ обратная задача формулируется в вариационной постановке и сводится к задаче минимизации целевого функционала, задающего среднеквадратическое уклонение значений деформаций $\sigma(X,H)$, вычисленных с использованием геометрических соотношений (2) путем подстановки в них значений функции перемещений, полученных из соотношения обобщенного решения (3), от значений σ^*, измеренных в точках γ_r :

$$J(H) = \rho_{L_{2\Omega}}\left(\sigma(X,H),\sigma^*\right),\; H \in \overline{H}\,,\; \sigma^* \in \overline{U}\,. \tag{4}$$

Тогда решение обратной задачи может быть представлено в виде:

$$H_* = \arg\inf_{H\in\overline{H}} \rho_{L_{2\Omega}}(\sigma(X,H),\sigma^*)\,,\quad H \in \overline{H}\,,\; \sigma^* \in \overline{U}\,,$$

где $\rho_{L_{2\Omega}}(\sigma(X,H),\sigma^*)$ – функционал-невязка; $\overline{H}$ – область изменения неизвестных функций обратной задачи, которая определяется их физическим смыслом; $\overline{U}$ – множество возможных деформируемых состояний оболочки.

Для обеспечения корректности решения сформулированной обратной задачи теории оболочек необходимо:

1) исследовать вопрос о непрерывности зависимости решения прямой задачи $\sigma(H) = \{\varepsilon_{ij},\, \chi_{ij}\}^T$ от решения обратной задачи $H\left(X \in \overline{H}\right)$;

2) определить множества $\overline{U}$ и $\overline{H}$, на которых отыскиваются решения прямой и обратной задач;

3) показать, что из сходимости последовательности возможных деформированных состояний оболочки к результату наблюдений ($\rho_{L_{2\Omega}}(\sigma(X,H),\sigma^*) \to 0$) следует сходимость последовательности возможных решений обратной задачи к решению обратной задачи ($\rho_{L_{2\Omega}}(H,H_*) \to 0$).

Обоснование корректности вариационной формулировки обратной задачи теории оболочек. Будем предполагать, что для нормы приращения неизвестной функции $H(X)$ в пространстве Соболева $W^1_{2\Omega}$ выполняется соотношение [2]

$$\|\Delta H(X)\|_{W_{2\Omega}^1} \le \mu\,; \quad \mu < 1\,, \tag{5}$$

где $\Delta H(X) = H(X) - H_0(X)$; $H_0(X)$ – фиксированная функция неизвестных обратной задачи, при которой решение прямой задачи $U_0(X, H_0)$ является неособым решением.

Для исследования непрерывности зависимости решения прямой задачи от решения обратной задачи $H(X)$ определим билинейную форму, соответствующую обобщенному решению для приращения $\Delta U(X, H)$, следующим образом

$$\big(A(U_0, \Delta H)\Delta U, \Phi\big) = \big(P, \Phi\big), \tag{6}$$

где $A(U_0, \Delta H)\Delta U = \big(\Delta U, \Phi\big)_{\Psi_{t\chi}} - \big(Q(U_0, \Delta H)\Delta U, \Phi\big)_{\Psi_{t\chi}}$;

$$(Q(U_0, H_0)\Delta U, \Phi)_{\Psi_{t\chi}} = \int\limits_{\Omega}\Big[C_1^{ijkl}(\varepsilon_{kl0} + \Delta\varepsilon_{kl})\Big(B_{ij}\varphi - \Delta w_{,\xi_i}\varphi_{,\xi_j}\Big)\Big] +$$

$$+\left(B_{kl}\Delta w - \frac{1}{2}w_{0,\xi_k}\Delta w_{,\xi_l}\right)C_1^{ijkl}\nabla_i\varphi_j\, d\xi_1 d\xi_2\,; \tag{7}$$

$P = P\big(U_0, \Delta H\big)$.

Учитывая ограниченность функционала, соответствующего обобщенному решению, в силу теоремы Риса [3], сформулируем линеаризованное операторное уравнение, решение которого характеризует состояние оболочки в окрестности известного неособого решения $U_0(X, H_0)$

$$A(U_0, \Delta H)\Delta U = P \tag{8}$$

с соответствующими граничными условиями, накладываемыми на ΔU .

Используя результаты работы И.И. Воровича [2] определим порядок приращения неизвестной функции $\Delta U(X, H_0 + \Delta H)$ по сравнению с известным неособым решением $U_0(X, H_0)$. На основании теорем вложения Соболева и неравенства Гельдера оценим слагаемые в правой части соотношения (7) и получим оценку для оператора $A(U_0, \Delta H)$ в (8) в виде:

$$\big|(A(U_0, \Delta H)\Delta U, \Phi)\big| \le \nu\|\Delta U\|_{\Psi_{t\chi}}\ \|\Phi\|_{\Psi_{t\chi}}\ . \tag{9}$$

Кроме того, поскольку $U_0(X, H_0)$ – неособое решение, то интегро-дифференциальное уравнение (3), описывающее обобщенное решение для приращения, не имеет собственных векторов [2], поэтому справедлива оценка:

$$\left|(A(U_0, \Delta H)\Delta U, \Phi)\right| \geq V \|\Delta U\|_{\Psi_{t\chi}} \|\Phi\|_{\Psi_{t\chi}} . \tag{10}$$

Отметим, что ввиду произвольности выбора функции Φ билинейная форма (6), связанная с оператором $A(U_0, \Delta H)$, является симметрической. Учитывая оценки (9), (10), билинейная форма (6) является коэрцитивной.

Для линейного самосопряженного коэрцитивного оператора $A(U_0, \Delta H)$, удовлетворяющего условиям

$$V\|\Delta U\|^2_{\Psi_{t\chi}} \leq \left(A(U_0, \Delta H)\Delta U, \Delta U\right) \leq v\|\Delta U\|^2_{\Psi_{t\chi}} , \ v, V = const , \ v > V > 0 , \tag{11}$$

определим множество

$$\Lambda(V, v) = \left\{ A(U_0, \Delta H) \ \middle| \ A(U_0, \Delta H) : \Psi_{t\chi} \to \Psi^{-1}_{t\chi}; \ V\|\Delta U\|^2_{\Psi_{t\chi}} \leq \left(A(U_0, \Delta H)\Delta U, \Delta U\right) \leq v\|\Delta U\|^2_{\Psi_{t\chi}} \right\}$$

.

Если, аналогично [4] определить последовательность линейных коэрцитивных операторов $A^m(U_0, \Delta H)$ такую, что $\Psi_{t\chi} \to \Psi^{-1}_{t\chi}$ и $\lim\limits_{m\to\infty}\left(g_1, A^{m^{-1}}(U_0, \Delta H)g_2\right) = \left(g_1, A^{-1}(U_0, \Delta H)g_2\right)$, то указанная последовательность сходится к линейному коэрцитивному оператору $A(U_0, \Delta H)$.

Рассмотрим последовательность систем уравнений

$$A^m(U_0, \Delta H)\Delta U = P , \tag{12}$$

которая сходится к системе (8), если для любого $P \in \Psi^{-1}_{t\chi}$ последовательность решений задач (12) в пространстве $\Psi_{t\chi}$ сходится к решению задачи (8).

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть задана последовательность систем уравнений вида (12), принадлежащая классу* $\Lambda(V,\nu)$*, тогда последовательность операторов, порождающая возможные решения прямой задачи, сходится к оператору прямой задачи.*

Приближенное решение $\Delta U_n(H)$ прямой задачи будем определять из итерационного процесса (n – номер шага итерационного процесса), сформулированного для некоторого состояния оболочки в виде:

$$A(U_0,\Delta H)\Delta U_n(H)=P\,. \tag{13}$$

При фиксированном значении n оператор $A(U_0,\Delta H)$ уравнения (13) будет линейным и коэрцитивным.

Полученные оценки (9), (10) доказывают корректность введенного интегро-дифференциального соотношения (3), описывающего обобщенное решение для приращения $\Delta U(X,H_0+\Delta H)$, поскольку правая часть (7) является линейным ограниченным функционалом в пространстве $\Psi_{t\chi}$ относительно вектор-функции $\Phi(\phi(\varphi_1,\varphi_2),\varphi)$. Кроме того, приращение к решению прямой задачи ΔU непрерывно зависит от приращения к решению обратной задачи ΔH .

Рассмотрим последовательность возможных решений обратной задачи $\{H^m\}\subset\overline{H}$, характеризующую возможные m-ые состояния оболочки. Определим структуру множества, на котором будем отыскивать решение обратной задачи, в виде:

$$\overline{H}=\left\{H(X):\ A\le H(X)\le B;\quad a\le\frac{\partial H(X)}{\partial U_l}\le b;\quad \frac{\partial^2 H(X)}{\partial U_l^2}\ge 0\right\}, \tag{14}$$

где a,b,A,B – заданные константы. Функции, принадлежащие этому множеству, являются равномерно ограниченными, монотонными, выпуклыми, следовательно, множество является компактом. Согласно известному результату о компактности [7] имеет место следующая лемма.

Лемма 1. Из любой последовательности $\{H^m\}\subset\overline{H}$ компактного множества можно выбрать хотя бы одну подпоследовательность, которая сходится к некоторому элементу $H_*\in\overline{H}$.

Рассмотрим последовательность систем уравнений, определяющих последовательность приближенных решений прямых задач, порожденных последовательностью возможных решений обратных задач, в виде:

$$A^m(U_0, \Delta H^m)\Delta U_n(H^m) = P\,, \tag{15}$$

где $H^m(X) = H_0(X) + \Delta H^m(X)$, тогда справедлива теорема.

Теорема 2. *Если* $\{H^m\} \subset \overline{H}$ *– произвольная последовательность элементов компакта* $\overline{H}$ *в* $L_{2\Omega}$ *, то при* $\{H^m\} \to H_*$ *в норме пространства* $L_{2\Omega}$ *последовательность приближенных решений* $\{\Delta U_n(H^m)\}$ *задачи (15) в* $\Psi_{t\chi}$ *сходится к приближенному решению прямой задачи* $\Delta U_n(H_*)$. *Кроме того, последовательность* $\{\sigma_n(H^m)\}$, *порожденная последовательностью приближенных решений прямой задачи, в пространстве* $\Psi_{t\chi}$ *сходится к элементу* $\sigma_n(H_*)$.

Доказательство. Оператор $A^m(U_0, \Delta H^m) \in \Lambda(V, v)$ при условии, что $\{H^m\} \subset \overline{H}$ для $\forall\, m = 1,2,3,\ldots$. С другой стороны, поскольку $\overline{H}$ является компактным множеством, то существует элемент $H_* \in \overline{H}$, такой, что $\{H^m\} \to H_*$.

Тогда из теоремы 1 следует, что последовательность операторов $A^m(U_0, \Delta H^m)\Delta U_n(H^m)$ сходится к оператору $A(U_0, \Delta H^m)\Delta U_n(H_*)$. Это означает сходимость $\{\Delta U_n(H^m)\} \to \Delta U_n(H_*)$ в $\Psi_{t\chi}$; сходимость $\{\sigma_n(H^m)\} \to \sigma_n(H_*)$ в $\Psi_{t\chi}$. Теорема доказана.

Для $\forall\, g(X) \in L_{2\Omega}$ рассмотрим интеграл

$$\int_\Omega \{\sigma(H_*) - \sigma_n(H^m)\}\, g(X)\, d\Omega =$$

$$\int_\Omega \{\sigma(H_*) - \sigma_n(H_*)\}\, g(X)\, d\Omega + \int_\Omega \{\sigma_n(H_*) - \sigma_n(H^m)\}\, g(X)\, d\Omega\,. \tag{16}$$

Первый интеграл правой части (16) стремится к нулю при $n \to \infty$, поскольку имеет место сходимость последовательности $\sigma_n(H_*) \to \sigma(H_*)$ в норме пространства $\Psi_{t\chi}$ при $n \to \infty$. Второй интеграл стремится к нулю в силу теоремы 2.

Следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть последовательность* $\{H^m\} \subset \overline{H}$. *Тогда:*

1. $\exists\, H_* \in \overline{H}$, *такое, что* $\{H^m\} \to H_*$ *в норме пространства* $L_{2\Omega}$*;*

2. последовательность возможных решений прямой задачи $\{\Delta U(H^m)\}$ *при* $\{H^m\} \subset \overline{H}$ *в норме пространства* $\Psi_{t\chi}$ *сходится к решению прямой задачи* $\Delta U(H_*)$*;*

3. последовательность приближенных значений функции $\{\sigma(H^m)\}$, *порожденная последовательностью решений обратной задачи* H^m, *в норме пространства* $L_{2\Omega}$ *сходится к элементу* $\sigma(H_*)$, *отвечающему решению обратной задачи, т. е.* $\{\sigma(H^m)\} \to \sigma(H_*)$ *в норме пространства* $L_{2\Omega}$*;*

4. последовательность приближенных значений функции $\{\sigma(H^m)\}$, *вычисленных в точках наблюдений* γ_j, *в норме пространства* $L_{2\Omega}$ *сходится к измеренным значениям* σ^*, *т. е.* $\sigma(H^m) \to \sigma^*$ *в норме пространства* $L_{2\Omega}$.

Далее перейдем к исследованию свойств функционала (4). В [2] показано, что функционал обобщенного решения (3) является непрерывным, следовательно, и функционал, сформулированный в (4), будет являться непрерывным.

Теорема 4. *Пусть множество* $\overline{H}$ *введено соотношением (14). Тогда функционал-невязка обратной задачи, определенный в (4), является непрерывным, т. е. если последовательность* $\{H^m\} \subset \overline{H}$ *сходится к элементу* $H_* \in \overline{H}$, *то числовая последовательность* $\{\rho_{L_{2\Omega}}(\sigma(H^m), \sigma^*)\}$ *сходится к элементу* $\rho_{L_{2\Omega}}(\sigma(H_*), \sigma^*)$.

Исследуем вопрос о существовании решения задачи минимизации функционала $\rho_{L_{2\Omega}}(\sigma(H^m), \sigma^*)$ на множестве $\overline{H}$. Учитывая, что правая часть интегро-дифференциального тождества (3), описывающего обобщенное решение прямой задачи для приращения, является линейным ограниченным функционалом, можно утверждать, что функционал обобщенного решения, а, следовательно, и функционал $\rho_{L_{2\Omega}}(\sigma(H^m),\sigma^*)$ являются конечными.

С другой стороны, поскольку множество $\overline{H}$ является компактным множеством, то в соответствии с теоремой Вейерштрасса [3] имеет место следующая теорема.

Теорема 5. *При выполнении условий теоремы 4 задача минимизации функционала* $\rho_{L_{2\Omega}}(\sigma(H^m),\sigma^*)$ *на множестве* $\overline{H}$ *имеет, по крайней мере, одно решение, и любая минимизирующая последовательность сходится на множестве*

$$H = \left\{ H^m \in \overline{H} \;\middle|\; \rho_{L_{2\Omega}}(\sigma(H_*),\sigma^*) = \min_{H\in H} \rho_{L_{2\Omega}}(\sigma(H^m),\sigma^*) \right\}$$

в норме пространства $L_{2\Omega}$.

Далее покажем, какой точности приближения к искомому решению обратной задачи можно достичь при минимизации функционала (4).

Рассмотрим операторное уравнение, описывающее обратную задачу

$$Z\sigma(H) = \sigma^*, \qquad H \in \overline{H}_k,\ \sigma^* \in \overline{U}\,. \tag{17}$$

Здесь оператор Z задает отображение элемента $H \in \overline{H}$ на элемент $\sigma^* \in \overline{U}$. Покажем, что отображение, даваемое оператором Z, является взаимно однозначным.

Лемма 2. Пусть правая часть операторного уравнения (17) задана. Тогда отображение $Z:\overline{H} \to \overline{U}$ является взаимно однозначным, здесь $\overline{U} = Z\overline{H}$.

Доказательство. Учитывая геометрические соотношения теории оболочек (2) можно утверждать, что операторы ε_{ij}, χ_{ij} являются однородными операторами, действующими в пространстве $\Psi_{t\chi}$, относительно компонент вектор-функции перемещений $U(X,H)$.

Следовательно, если взять различные функции H_1, H_2 ($H_1 \neq H_2$), то учитывая геометрические соотношения теории оболочек, можно утверждать, что $\varepsilon_{ij}(H_1) \neq \varepsilon_{ij}(H_2)$ эквивалентно тому, что $ZH_1 \neq ZH_2$. Следовательно, при отображении $Z:\overline{H}_k \to \overline{U}$ компоненты тензора тангенциальной деформации, соответствующие функциям перемещений

$U(H_1)$ и $U(H_2)$, отличны друг от друга, а значит, отображение $Z:\overline{H}\to\overline{U}$ является взаимно однозначным. Лемма доказана.

Дальнейшие рассуждения проведем с использованием топологической леммы [7].

Лемма 3 [7]. Пусть метрическое пространство $\overline{H}$ отображается на метрическое пространство $\overline{U}$, и элемент $U_*\in\overline{U}$ является образом элемента $H_*\subset\overline{H}$ при этом отображении. Тогда, если отображение $\overline{H}\to\overline{U}$ непрерывно и взаимно однозначно, а множество $\overline{H}$ компактно, то обратное отображение множества $\overline{U}$ на множество $\overline{H}$ ($\overline{U}\to\overline{H}$) также непрерывно.

На основании лемм 1, 2, 3, а также теоремы 4 сформулируем следующую теорему.

Теорема 6. *Пусть правая часть операторного уравнения (17) задана, а последовательность* $\{\Xi_n\}$*, где* $\Xi_n = ZH^m$*, сходится к некоторому пределу* Ξ_**, где* $\Xi_* = ZH_*$*. Тогда последовательность* $\{H^m\}\subset\overline{H}$ *сходится к элементу* $H_*\in\overline{H}$ *в норме пространства* $L_{2\Omega}$*. Здесь предполагается, что* $\Xi_n\in\overline{U}$, $\Xi_*\in\overline{U}$, $\overline{U}=Z\overline{H}$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{\Xi_n\}$, где $\Xi_n = ZH^m$, которая сходится к некоторому пределу $\Xi_* = ZH_*$.

Следовательно,

$$\exists\,\delta_n>0\quad \rho(\Xi_n,\Xi_*)\equiv\inf_{H^i\in\overline{H}_k}\left|\Xi_n-\Xi_*\right|<\delta_n \tag{18}$$

и $\delta_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Предположим обратное: пусть выполняется условие (18), в то время когда

$$\exists\,\varepsilon_0>0\ \ \rho\left(H^m,H_*\right)=\left\|H^m-H_*\right\|_{L_{2\Omega}}\ge\varepsilon_0,\ \forall\, n. \tag{19}$$

Так как множество $\overline{H}$ является компактом, то из последовательности $\{H^m\}\subset\overline{H}$ можно выбрать подпоследовательность $\{H_k^m\}\subset\{H^m\}\subset\overline{H}$, которая сходится к некоторому элементу $H\in\overline{H}$, причем $H\ne H_*$ по предположению (18).

Обозначим $ZH_k^m = \Xi_k$. Так как $\{H_k^m\} \subset \{H^m\}$, то $\{\Xi_k\} \subset \{\Xi_n\}$, следовательно, подпоследовательность $\{\Xi_k\}$ также сходится к пределу $\Xi_* = ZH_*$:

$$\exists \tilde{\delta}_n > 0 \quad \rho(\Xi_n, \Xi_0) < \tilde{\delta}_n, \;\; \tilde{\delta}_n \to 0, \;\; n \to \infty. \tag{20}$$

Тогда из соотношений (18), (20) следует, что $ZH_* = \Xi_* = ZH$.

С другой стороны, в силу взаимной однозначности отображения $Z : \overline{H} \to \overline{U}$ при $H_* \neq H$ имеем $ZH_* \neq ZH$. Полученное противоречие приводит к тому, что $H_* = H$. Теорема доказана.

На основании этой теоремы можно сделать вывод, что при минимизации функционала (4) возможно сколь угодно близко приблизиться именно к решению обратной задачи H_*.

На основании приведенных результатов можно сформулировать следующее окончательное утверждение.

Теорема 7. *Если результаты наблюдения σ^* известны, то обратная задача теории оболочек имеет единственное решение, если соответствующая прямая задача имеет неособое решение. Множество $\overline{H}$ является классом корректности обратной задачи теории оболочек.*

Выводы. Обратная задача теории оболочек допускает формулировку в вариационной постановке. Показано, что решение прямой задачи непрерывно зависит от решения обратной задачи; установлена непрерывность функционала обратной задачи, сформулированного для приращения неизвестной функции; показано существование решения задачи минимизации функционала-невязки; описаны множества, на которых решения прямой и обратной задач являются устойчивыми.

Библиографические ссылки

1. **Ватульян А.О.** О вариационной постановке обратных коэффициентных задач для упругих тел / А.О. Ватульян // Доклады Академии наук. – 2008. – Т. 422, № 2. – С. 182-184.

2. **Ворович И.И.** Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек / И.И. Ворович. – М., 1989. – 373 с.

3. **Ворович И.И.** Функциональный анализ / И.И. Ворович, Л.П. Лебедев. – М., 2000. – 316 с.

4. **Гасанов А.И.** Вычислительная диагностика определения свойств конструкционных материалов / А.И. Гасанов // Математическое моделирование. – 1989. – Т. 1, № 6. – С. 1-32.

5. **Ободан Н.И.** Идентификация теплофизических свойств твердых тел при неоднородном нагреве с использованием экспериментальной информации / Н.И.

Ободан, А.Г. Пацюк, Н.А. Гук // Вопросы атомной науки и техники. Серия «Мат. моделирование физ. процессов». – 2011. – Вып. 1. – С. 81-89.
6. **Постнов В.А.** Использование метода Ньютона для решения задач идентификации балочных систем / В.А. Постнов, Г.А. Тумашик // Проблемы прочности и пластичности. – 2006. – № 68. – С. 86-94.
7. **Тихонов А.Н.** Методы решения некорректных задач. / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М., 1979. – 386 с.

Надійшла до редколегії 18.06.2012