УДК 519.6

Л.Л. Гарт
Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

ПРОЕКЦИОННО-ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ

Досліджується питання про існування, область розташування та наближене відшукання розв'язку нелінійного параметричного рівняння у банаховому просторі за допомогою проекційно-ітераційного методу, основаного на методі Ньютона-Канторовича при проектуванні у простори, ізоморфні підпросторам вихідного простору. Доведено відповідну теорему, отримано оцінки похибки.

Исследуется вопрос о существовании, области расположения и приближенном нахождении решения нелинейного параметрического уравнения в банаховом пространстве при помощи проекционно-итерационного метода, основанного на методе Ньютона-Канторовича при проектировании в пространства, изоморфные подпространствам исходного пространства. Доказана соответствующая теорема, получены оценки погрешности.

The problem of existence, a location domain and approximate finding solution of a nonlinear equation with parameter in Banach space is investigated with applying the projection-iteration method based on Newton-Kantorovich method and projecting in spaces which are isomorphic to the subspaces of initial space. Corresponding theorem is proved, error estimates are obtained.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, оператор, параметр, решение, метод Ньютона-Канторовича, проекционно-итерационный метод, изоморфные пространства, последовательность, приближение, сходимость, погрешность.

Введение. Метод Ньютона-Канторовича решения функциональных уравнений, а также некоторые его модификации являются в настоящее время одними из немногих, применяемых на практике для фактического нахождения решения нелинейного уравнения. Важно отметить и теоретическое значение метода, так как с его помощью можно делать заключение о существовании, единственности и области расположения решения уравнения, не находя самого решения, что подчас не менее важно, чем фактическое знание решения. Исследованию метода Ньютона-Канторовича и его модификаций посвящены работы Л.В. Канторовича [1, 2], И.П. Мысовских [3], Б.А. Вертгейма, С. Фенга и других авторов.

Для решения нелинейных функциональных уравнений применяются и другие методы, относящиеся к классу итерационных, а также группа проекционных (аппроксимационных) методов, обзор которых можно найти, например, в [4]. Там же проведены исследования методов, получивших название проекционно-итерационных, для решения операторных уравнений первого рода, основанных на следующей идее. Уравнение вида

$$Ax = f, \tag{1}$$

с нелинейным оператором A, действующим в банаховом пространстве X, аппроксимируется последовательностью приближенных уравнений

$$A_n x_n = f_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где A_n – нелинейный оператор, действующий в подпространстве X_n исходного пространства ($X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_n \subset \ldots \subset X$). К решению этих уравнений применяется некоторый итерационный метод, причем для каждого из приближенных уравнений находится по указанному методу лишь несколько приближений $x_n^{(k)}$ ($k = 1, 2, .., k_n$), последнее из которых полагается равным начальному приближению в итерационном процессе для следующего, $(n+1)$-го приближенного уравнения. В качестве последовательности приближений к решению уравнения (1) принимается последовательность $\left\{x_n^{(k_n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Такой подход к нахождению приближенного решения того или иного уравнения естественно устраняет трудности, возникающие при решении того же уравнения обычным проекционным методом, и облегчает выбор подходящего начального приближения (особенно в нелинейном случае) по сравнению с решением исходного уравнения итерационным методом.

В [5] при помощи описанного подхода проведен анализ нелинейного параметрического уравнения

$$Ax(\mu) \equiv Tx + \mu Qx = f, \tag{3}$$

где T и Q – дифференцируемые по Фреше операторы, действующие в банаховом пространстве X, μ – линейный оператор в X, в частности, μ может быть числовым множителем.

В настоящей работе рассматривается случай, когда приближенные уравнения, аппроксимирующие (3), задаются не в подпространствах $X_n \subset X$, а в некоторых пространствах $\tilde{X}_n$, изоморфных этим подпространствам (именно этот случай чаще всего встречается при решении практических задач).

Постановка задачи. Пусть задано уравнение (1) с нелинейным оператором A, дифференцируемым по Фреше в некотором шаре $S(x_N^{(0)}, R) = = \{x \in X : \|x - x_N^{(0)}\| \le R\}$ банахова пространства X ($x_N^{(0)} \in X$).

Аппроксимируем уравнение (1) последовательностью приближенных уравнений:

$$\tilde{A}_n \tilde{x}_n = \tilde{f}_n, \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

где $\tilde{A}_n$ – нелинейный оператор, действующий в пространстве $\tilde{X}_n$, изоморфном подпространству $X_n \subset X$.

Обозначим через Φ_n линейный оператор, ставящий во взаимно однозначное соответствие каждому элементу $x_n \in X_n$ элемент $\tilde{x}_n \in \tilde{X}_n$; Φ_n^{-1} – оператор, осуществляющий обратное отображение. Введем также оператор $\overline{\Phi}_n$, являющийся расширением оператора Φ_n на все пространство X. В роли $\overline{\Phi}_n$ может выступать, например, оператор $\overline{\Phi}_n = \Phi_n P_n$, где P_n – оператор ортогонального проектирования X на X_n. Не ограничивая общности, будем считать, что пространства X_n и $\tilde{X}_n$ изометричны, откуда следует, что $\|\Phi_n\| = \|\Phi_n^{-1}\| = 1$. (При указанном выборе оператора $\overline{\Phi}_n$ выполняется также условие $\|\overline{\Phi}_n\| = 1$.) В противном случае в пространствах $\tilde{X}_n$ можно ввести новую метрику, обеспечивающую указанную изометричность [6].

Заметим, что, если $\tilde{f}_n = \overline{\Phi}_n f$, то от уравнения (4) легко перейти к уравнению (2), заданному в подпространстве X_n, и наоборот, при этом $A_n = \Phi_n^{-1} \tilde{A}_n \Phi_n$, $f_n = P_n f$.

Обозначим через $\tilde{\Omega}_n$ образ множества $\Omega_n = X_n \cap S(x_N^{(0)}, R)$ при отображении Φ_n, то есть $\tilde{\Omega}_n = \{\tilde{x}_n \in \tilde{X}_n : \ \tilde{x}_n = \Phi_n x_n, \ x_n \in \Omega_n\}$.

Относительно оператора $\tilde{A}_n$ предположим, что для всех $n \ge N$ ($N \ge 1$) он дифференцируем по Фреше на множестве $\tilde{\Omega}_n$ и его производная $\tilde{A}'_n(\tilde{x}_n)$ удовлетворяет на этом множестве условию Липшица с константой $\tilde{L} > 0$:

$$\|\tilde{A}'_n(\tilde{x}_n) - \tilde{A}'_n(\tilde{y}_n)\| \le \tilde{L}\, \|\tilde{x}_n - \tilde{y}_n\|_{\tilde{X}_n}, \quad \tilde{x}_n, \tilde{y}_n \in \tilde{\Omega}_n, \tag{5}$$

а также существует непрерывный линейный оператор $\tilde{\Gamma}_n(\tilde{x}_n) = [\tilde{A}'_n(\tilde{x}_n)]^{-1}$ для всех $\tilde{x}_n \in \tilde{\Omega}_n$.

Предположим, что выполнены условия близости

$$\|\tilde{A}_n \tilde{x}_n - \overline{\Phi}_n A \Phi_n^{-1} \tilde{x}_n\|_{\tilde{X}_n} \le \tilde{\alpha}_n, \quad \|\tilde{A}'_n(\tilde{x}_n) - \overline{\Phi}_n A'(\Phi_n^{-1}\tilde{x}_n)\Phi_n^{-1}\| \le \tilde{\alpha}'_n, \tag{6}$$

$$\|\Phi_n^{-1}\overline{\Phi}_n A x - A x\|_X \le \beta_n, \quad \|\Phi_n^{-1}\overline{\Phi}_n A'(x) - A'(x)\| \le \beta'_n, \tag{7}$$

$$\|\Phi_n^{-1}\overline{\Phi}_n f - f\|_X \le \gamma_n \tag{8}$$

для всех $\tilde{x}_n \in \tilde{\Omega}_n$, $x \in S(x_N^{(0)}, R)$, причем $\tilde{\alpha}_n, \tilde{\alpha}'_n, \beta_n, \beta'_n, \gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Для приближенного решения каждого из уравнений (4), начиная с номера $n \ge N$, применим итерационный метод Ньютона-Канторовича и построим проекционно-итерационную последовательность приближений $\{\tilde{x}_n^{(k_n)}\}_{n=N}^{\infty}$ по формулам:

$$\tilde{x}_n^{(k+1)} = \tilde{x}_n^{(k)} - [\tilde{A}'_n(\tilde{x}_n^{(k)})]^{-1}(\tilde{A}_n \tilde{x}_n^{(k)} - \tilde{f}_n), \quad \tilde{x}_{n+1}^{(0)} = \Phi_{n+1}\Phi_n^{-1}\, \tilde{x}_n^{(k_n)} \tag{9}$$

$$(k = 0, 1, \ldots, k_n - 1; \quad n \ge N; \quad \tilde{x}_N^{(0)} \in \tilde{\Omega}_N).$$

Теорема о существовании решения $x*$ уравнения (1), области его расположения, а также сходимости процесса (9) содержится в [7].

Приведем здесь обобщение упомянутой теоремы, когда вместо обратных операторов $\Gamma(x) = [A'(x)]^{-1}$ в шаре $S(x_N^{(0)}, R)$ и $\tilde{\Gamma}_n(\tilde{x}_n) = [\tilde{A}'_n(\tilde{x}_n)]^{-1}$ на множестве $\tilde{\Omega}_n$ требуется существование лишь операторов $D(x)$ и $\tilde{D}_n(\tilde{x}_n)$, близких к $\Gamma(x)$ и $\tilde{\Gamma}_n(\tilde{x}_n)$ соответственно.

Теорема 1. *Пусть оператор* A *дифференцируем по Фреше в некотором шаре* $S(x_N^{(0)}, R) \subset X$, *а оператор* $\tilde{A}_n$ *для всех* $n \ge N$ *дифференцируем на множестве* $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{X}_n$ *и его производная* $\tilde{A}'_n(\tilde{x}_n)$ *удовлетворяет на* $\tilde{\Omega}_n$ *условию Липшица (5). Пусть выполнены условия близости (6)-(8), а также существуют линейные непрерывно обратимые операторы* $D(x)$, *обладающий свойствами:*

$$\|D(x)\| \le b\,, \tag{10}$$

$$\|D(x)A'(x)-I\| \le \delta < 1 \tag{11}$$

для всех $x \in S(x_N^{(0)},R)$, *и* $\tilde{D}_n(\tilde{x}_n)$ *такие, что*

$$\left\|\tilde{D}_n(\tilde{x}_n)\tilde{A}'_n(\tilde{x}_n)-I\right\| \le \tilde{\delta}_n < 1 \tag{12}$$

для всех $\tilde{x}_n \in \tilde{\Omega}_n$, $n \ge N$, I *– тождественный оператор. Если начальное приближение* $\tilde{x}_N^{(0)} \in \tilde{\Omega}_N$ *удовлетворяет условиям*

$$\left\|\tilde{A}_N\tilde{x}_N^{(0)} - \tilde{f}_N\right\|_{\tilde{X}_N} \le \tilde{\eta}_N^{(0)}, \tag{13}$$

$$\tilde{h}_N^{(0)} = \tilde{b}_N^2\,\tilde{\eta}_N^{(0)}\tilde{L} < 2\,, \quad \tilde{r}_N = \tilde{b}_N\,\tilde{\eta}_N^{(0)}\tilde{H}_N \le R\,, \quad \tilde{b}_N = \frac{b}{1-b(\tilde{\alpha}'_N+\beta'_N)-\delta}\,,$$

где

$$\tilde{H}_N = \tilde{G}_N + \sum_{i=N}^{\infty}\left(\frac{\tilde{h}_N^{(0)}}{2}\right)^{2^{Z_i}-1} < 2\,\tilde{G}_N\,, \quad \tilde{G}_N = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\tilde{h}_N^{(0)}}{2}\right)^{2^{i}-1}, \tag{14}$$

$Z_i = \sum_{m=N}^{i}(k_m-1)$, *то уравнение (1) имеет в шаре* $S(x_N^{(0)},\tilde{r}_N) \subset X$ *радиуса* $\tilde{r}_N$ *с центром в точке* $x_N^{(0)} = \Phi_N^{-1}\tilde{x}_N^{(0)}$ *решение* x^*, *к которому сходится процесс последовательных приближений* $\left\{\Phi_n^{-1}\tilde{x}_n^{(k_n)}\right\}_{n=N}^{\infty}$, *определя-емый формулами (9), с оценкой погрешности*

$$\left\|\Phi_n^{-1}\tilde{x}_n^{(k_n)} - x^*\right\|_X \le \tilde{\rho}_n = \tilde{b}_N\,\tilde{\eta}_N^{(0)}\,\tilde{V}_n\left(\frac{\tilde{h}_N^{(0)}}{2}\right)^{2^{Z_n}-1},$$

где

$$\tilde{V}_n = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\tilde{h}_N^{(0)}}{2}\right)^{2^{Z_n}(2^i-1)} + \sum_{i=n+1}^{\infty}\left(\frac{\tilde{h}_N^{(0)}}{2}\right)^{2^{Z_i}-2^{Z_n}} < 2\,\tilde{G}_N\,. \tag{15}$$

Если к тому же выполнено условие

$$\left\|\Phi_n^{-1}\overline{\Phi}_n\,x^* - x^*\right\|_X \le \sigma_n\,, \tag{16}$$

где $\sigma_n \to 0$ *при* $n \to \infty$, *то сама последовательность* $\left\{\tilde{x}_n^{(k_n)}\right\}_{n=N}^{\infty}$ *сходится к элементу* $\overline{\Phi}_n\,x^*$ *с оценкой погрешности*

$$\left\|\tilde{x}_n^{(k_n)} - \overline{\Phi}_n\,x^*\right\|_{\tilde{X}_n} \le \tilde{\rho}_n + \sigma_n\,.$$

Доказательство теоремы 1 можно найти в [4]. Там же сформулированы условия, на основании которых можно судить о разрешимости уравнения (1) по решению уравнения

$$Ax \equiv T\,x + Q\,x = f\,,$$

близкого к нему, но уже более простого (также, вообще говоря, нелинейного), где T и Q – некоторые дифференцируемые по Фреше операторы, действующие в X.

Такая ситуация является частным случаем более общей, когда левая часть уравнения (1) зависит от числового или иного параметра, причем при одном значении параметра решение уравнения известно и требуется установить существование решения для значений параметра, близких к начальному. Предположим, что упомянутый параметр входит в уравнение линейно, то есть будем рассматривать операторное уравнение вида (3)

$$Ax(\mu) \equiv T\,x + \mu\,Q\,x = f\,,$$

где μ – числовой множитель.

Метод решения. Аппроксимируем уравнение (3) последовательностью приближенных уравнений

$$\tilde{A}_n\,\tilde{x}_n(\mu) \equiv \tilde{T}_n\,\tilde{x}_n + \mu\,\tilde{Q}_n\,\tilde{x}_n = \tilde{f}_n\,, \quad n = 1,2,\ldots, \tag{17}$$

заданных в пространствах $\tilde{X}_n$, изоморфных подпространствам $X_n \subset X$. Будем предполагать, что начиная с некоторого номера $n \ge N$, операторы $\tilde{T}_n$ и $\tilde{Q}_n$ дифференцируемы по Фреше на множестве $\tilde{\Omega}_n \subset \tilde{X}_n$ и выполняются условия близости

$$\left\|\tilde{T}_n\,\tilde{x}_n - \overline{\Phi}_n\,T\,\Phi_n^{-1}\tilde{x}_n\right\|_{\tilde{X}_n} \le \tilde{\tau}_n\,, \quad \left\|\tilde{Q}_n\,\tilde{x}_n - \overline{\Phi}_n\,Q\,\Phi_n^{-1}\tilde{x}_n\right\|_{\tilde{X}_n} \le \tilde{\theta}_n\,, \tag{18}$$

$$\left\|\widetilde{T}_n'(\widetilde{x}_n)-\overline{\Phi}_n\, T'(\Phi_n^{-1}\widetilde{x}_n)\Phi_n^{-1}\right\|\le\widetilde{\tau}_n',\quad \left\|\widetilde{Q}_n'(\widetilde{x}_n)-\overline{\Phi}_n\, Q'(\Phi_n^{-1}\widetilde{x}_n)\Phi_n^{-1}\right\|\le\widetilde{\theta}_n'$$

для всех $\widetilde{x}_n\in\widetilde{\Omega}_n$, причем $\widetilde{\tau}_n,\ \widetilde{\tau}_n',\ \widetilde{\theta}_n,\ \widetilde{\theta}_n'\to 0$ при $n\to\infty$, и

$$\left\|\Phi_n^{-1}\overline{\Phi}_n\, T\,x-T\,x\right\|_X\le\chi_n,\quad \left\|\Phi_n^{-1}\overline{\Phi}_n\, Q\,x-Q\,x\right\|_X\le\lambda_n, \tag{19}$$

$$\left\|\Phi_n^{-1}\overline{\Phi}_n\, T'(x)-T'(x)\right\|\le\chi_n',\quad \left\|\Phi_n^{-1}\overline{\Phi}_n\, Q'(x)-Q'(x)\right\|\le\lambda_n'$$

для всех $x\in S(x_N^{(0)},R)$, причем $\chi_n,\ \chi_n',\ \lambda_n,\ \lambda_n'\to 0$ при $n\to\infty$.

Условия существования и область расположения решения $x^*\equiv x^*(\mu)$ уравнения (3), а также условия сходимости к нему проекционно-итерационной последовательности приближений, основанной на методе Ньютона-Канторовича, устанавливает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть операторы T и Q дифференцируемы по Фреше в некотором шаре $S(x_N^{(0)},R)\subset X$, а операторы $\widetilde{T}_n$ и $\widetilde{Q}_n$ для $n\ge N$ дифференцируемы на множестве $\widetilde{\Omega}_n\subset\widetilde{X}_n$ и их производные $\widetilde{T}_n'(\widetilde{x}_n)$ и $\widetilde{Q}_n'(\widetilde{x}_n)$ удовлетворяет на этом множестве условию Липшица с константами $\widetilde{K}$ и $\widetilde{M}$ соответственно. Пусть выполняются условия близости (8), (18), (19), для всех $x\in S(x_N^{(0)},R)$ существует непрерывный линейный оператор $\left[T'(x)\right]^{-1}$, причем*

$$\left\|\left[T'(x)\right]^{-1}\right\|\le b, \tag{20}$$

$$\left\|Q'(x)\right\|\le\nu, \tag{21}$$

а для всех $\widetilde{x}_n\in\widetilde{\Omega}_n$, $n\ge N$ существуют непрерывные линейные операторы $\left[\widetilde{T}_n'(\widetilde{x}_n)\right]^{-1}$ такие, что

$$\left\|\left[\widetilde{T}_n'(\widetilde{x}_n)\right]^{-1}\widetilde{Q}_n'(\widetilde{x}_n)\right\|\le\widetilde{\nu}_n. \tag{22}$$

Пусть элемент $\widetilde{x}_N^{(0)}\in\widetilde{\Omega}_N$ является решением уравнения $\widetilde{T}_N\,\widetilde{x}_N=\widetilde{f}_N$, т. е.

$$\widetilde{A}_N\,\widetilde{x}_N^{(0)}(0)\equiv\widetilde{T}_N\,\widetilde{x}_N^{(0)}=\widetilde{f}_N, \tag{23}$$

и удовлетворяет условию

$$\left\|\widetilde{Q}_N\,\widetilde{x}_N^{(0)}\right\|_{\widetilde{X}_N}\le\widetilde{\zeta}_N^{(0)}. \tag{24}$$

Тогда, если μ таково, что

$$|\mu|\,b\,\nu<1,\quad |\mu|\,\widetilde{\nu}_n<1,\quad \widetilde{h}_N^{(0)}=\widetilde{b}_N^2\,|\mu|\,\widetilde{\zeta}_N^{(0)}(\widetilde{K}+|\mu|\,\widetilde{M})<2, \tag{25}$$

$$\widetilde{r}_N=\widetilde{b}_N\,|\mu|\,\widetilde{\zeta}_N^{(0)}\widetilde{H}_N\le R,\quad \widetilde{b}_N=\frac{b}{1-b(\widetilde{\tau}_N'+\chi_N'+|\mu|(\widetilde{\theta}_N'+\lambda_N'+\nu))},$$

где $\widetilde{H}_N$ определено в (14), то уравнение (3) имеет в шаре $S(x_N^{(0)},\widetilde{r}_N)\subset X$ радиуса $\widetilde{r}_N$ с центром в точке $x_N^{(0)}=\Phi_N^{-1}\widetilde{x}_N^{(0)}$ решение $x^*\equiv x^*(\mu)$, к которому сходится процесс последовательных приближений $\left\{\Phi_n^{-1}\widetilde{x}_n^{(k_n)}(\mu)\right\}_{n=N}^{\infty}$, определяемый формулами (9), с оценкой погрешности

$$\left\|\Phi_n^{-1}\widetilde{x}_n^{(k_n)}(\mu)-x^*\right\|_X\le\widetilde{\rho}_n=\widetilde{b}_N\,|\mu|\,\widetilde{\zeta}_N^{(0)}\,\widetilde{V}_n\left(\frac{\widetilde{h}_N^{(0)}}{2}\right)^{2^{Z_n}-1},$$

где $\widetilde{V}_n$ дается формулой (15), $Z_n=\sum_{m=N}^{n}(k_m-1)$. Если к тому же выполнено условие (16), то сама последовательность $\left\{\widetilde{x}_n^{(k_n)}(\mu)\right\}_{n=N}^{\infty}$ сходится к элементу $\overline{\Phi}_n\,x^*$ с оценкой погрешности

$$\left\|\widetilde{x}_n^{(k_n)}(\mu)-\overline{\Phi}_n\,x^*\right\|_{\widetilde{X}_n}\le\widetilde{\rho}_n+\sigma_n.$$

Доказательство. Утверждение настоящей теоремы получается непосредственно из теоремы 1, если положить в ней $D(x)=\left[T'(x)\right]^{-1}$, $\widetilde{D}_n(\widetilde{x}_n)=\left[\widetilde{T}_n'(\widetilde{x}_n)\right]^{-1}$ ($n\ge N$). Проверим выполнимость условий теоремы 1.

По свойствам производных [2], из дифференцируемости операторов T и Q в шаре $S(x_N^{(0)},R)\subset X$ следует дифференцируемость оператора $A=T+\mu Q$ в том же шаре, а из дифференцируемости для всех $n\ge N$ операторов $\widetilde{T}_n$ и $\widetilde{Q}_n$ на множестве $\widetilde{\Omega}_n\subset\widetilde{X}_n$ следует дифференцируемость на $\widetilde{\Omega}_n$ оператора $\widetilde{A}_n=\widetilde{T}_n+\mu\,\widetilde{Q}_n$, при этом

$$A'(x)=T'(x)+\mu Q'(x), \quad x\in S(x_N^{(0)},R),$$
$$\tilde{A}'_n(\tilde{x}_n)=\tilde{T}'_n(\tilde{x}_n)+\mu \tilde{Q}'_n(\tilde{x}_n), \quad \tilde{x}_n\in\tilde{\Omega}_n.$$
Поэтому для произвольных $\tilde{x}_n,\tilde{y}_n\in\tilde{\Omega}_n$ будем иметь:
$$\left\|\tilde{A}'_n(\tilde{x}_n)-\tilde{A}'_n(\tilde{y}_n)\right\|=\left\|\tilde{T}'_n(\tilde{x}_n)+\mu\tilde{Q}'_n(\tilde{x}_n)-\tilde{T}'_n(\tilde{y}_n)-\mu\tilde{Q}'_n(\tilde{y}_n)\right\|\le$$
$$\le\left\|\tilde{T}'_n(\tilde{x}_n)-\tilde{T}'_n(\tilde{y}_n)\right\|+|\mu|\left\|\tilde{Q}'_n(\tilde{x}_n)-\tilde{Q}'_n(\tilde{y}_n)\right\|\le(\tilde{K}+|\mu|\tilde{M})\|\tilde{x}_n-\tilde{y}_n\|_{\tilde{X}_n},$$
то есть выполняется условие Липшица (5) с константой $\tilde{L}=\tilde{K}+|\mu|\tilde{M}$.

Легко видеть также, что выполнимость условий близости (18), (19) влечет выполнимость условий (6), (7) соответственно, при этом
$$\tilde{\alpha}_n=\tilde{\tau}_n+|\mu|\tilde{\theta}_n,\ \tilde{\alpha}'_n=\tilde{\tau}'_n+|\mu|\tilde{\theta}'_n,\ \beta_n=\chi_n+|\mu|\lambda_n,\ \beta'_n=\chi'_n+|\mu|\lambda'_n \quad (n\ge N).$$
Далее с учетом (20), (21) и первого из условий (25) получаем
$$\|D(x)A'(x)-I\|=\left\|[T'(x)]^{-1}(T'(x)+\mu Q'(x))-I\right\|= =|\mu|\left\|[T'(x)]^{-1}Q'(x)\right\|\le|\mu|\,b\nu<1$$
для всех $x\in S(x^{(0)},R)$, то есть выполняется условие (11) с константой $\delta=|\mu|\,b\nu$. Аналогично, с учетом (22) и второго из условий (25) получаем
$$\left\|\tilde{D}_n(\tilde{x}_n)\tilde{A}'_n(\tilde{x}_n)-I\right\|=|\mu|\left\|\left[\tilde{T}'_n(\tilde{x}_n)\right]^{-1}\tilde{Q}'_n(\tilde{x}_n)\right\|\le|\mu|\,\tilde{\nu}_n<1$$
для всех $\tilde{x}_n\in\tilde{\Omega}_n$, $n\ge N$, то есть условие (12) выполняется с константой $\tilde{\delta}_n=|\mu|\,\tilde{\nu}_n$.

Что касается условия (13) для начального приближения $\tilde{x}_N^{(0)}\in\tilde{\Omega}_N$, то оно с учетом представления $\tilde{A}_N=\tilde{T}_N+\mu\tilde{Q}_N$, очевидно, выполняется с константой $\tilde{\eta}_N^{(0)}=|\mu|\,\tilde{\zeta}_N^{(0)}$ на основании выполнимости условий (23), (24)
$$\left\|\tilde{A}_N\tilde{x}_N^{(0)}-\tilde{f}_N\right\|_{\tilde{X}_N}\equiv\left\|\tilde{T}_N\tilde{x}_N^{(0)}+\mu\tilde{Q}_N\tilde{x}_N^{(0)}-\tilde{f}_N\right\|_{\tilde{X}_N}\le|\mu|\,\tilde{\zeta}_N^{(0)}.$$
Таким образом, все условия теоремы 1 выполнены, из чего следует справедливость утверждений настоящей теоремы.

Теорема доказана.

Выводы. Заметим, что в формулировке теоремы 1 оценки норм (10), (11) для оператора $D(x)$, с помощью которых могут быть установлены на основании теоремы Банаха об обратном операторе [8] факт существования оператора $\Gamma(x)=[A'(x)]^{-1}$ и оценка $\|\Gamma(x)\|\le\dfrac{b}{1-\delta}$ его нормы, предполагаются известными не только в точке $x_N^{(0)}$, но и во всем шаре $S(x_N^{(0)},R)\subset X$. Кроме того, оценка нормы (12) для оператора $\tilde{D}_n(\tilde{x}_n)$, из которой по тем же соображениям вытекает факт существования оператора $\tilde{\Gamma}_n(\tilde{x}_n)=\left[\tilde{A}'_n(\tilde{x}_n)\right]^{-1}$ при каждом $n\ge N$ и оценка его нормы $\left\|\tilde{\Gamma}_n(\tilde{x}_n)\right\|\le\dfrac{b}{1-\delta-b(\tilde{\alpha}'_n+\beta'_n)}$, предполагается известной не только в точке $\tilde{x}_n^{(0)}\in\tilde{\Omega}_n$, но и во всем множестве $\tilde{\Omega}_n\subset\tilde{X}_n$. Такая замена условий типа Канторовича условиями типа Коши позволила ослабить ограничения, накладываемые на выбор начального приближения $\tilde{x}_N^{(0)}=\Phi_N x_N^{(0)}$ в формулах (9). Это обстоятельство является чрезвычайно важным, поскольку при решении итерационными методами нелинейных задач выбор подходящего начального приближения – один из наиболее сложных моментов.

Сформулированная и доказанная в данной работе теорема 2 может быть применена к исследованию конкретных функциональных уравнений, в частности, нелинейных интегральных и дифференциальных уравнений, а также операторных уравнений, возникающих в теории возмущений и задачах приближенного построения конформных отображений.

Следует отметить, что для автора в дальнейшем представляет интерес обоснование сходимости к точному решению x^* уравнения (1) процесса приближений $\left\{\Phi_n^{-1}\tilde{x}_n^{(k_n)}\right\}_{n=N}^{\infty}$, определяемого формулами
$$\tilde{x}_n^{(k+1)}=\tilde{x}_n^{(k)}-\tilde{D}_n(\tilde{x}_n^{(k)})\left(\tilde{A}_n\tilde{x}_n^{(k)}-\tilde{f}_n\right),\quad \tilde{x}_{n+1}^{(0)}=\Phi_{n+1}\Phi_n^{-1}\,\tilde{x}_n^{(k_n)}$$
$$(k=0,1,\ldots,k_n-1;\quad n\ge N;\quad \tilde{x}_N^{(0)}\in\tilde{\Omega}_N),$$
а также обоснование сходимости к точному решению $x^*\equiv x^*(\mu)$ уравнения (3) процесса $\left\{\Phi_n^{-1}\tilde{x}_n^{(k_n)}(\mu)\right\}_{n=N}^{\infty}$,
$$\tilde{x}_n^{(k+1)}(\mu)=\tilde{x}_n^{(k)}(\mu)-\left[\tilde{T}'_n(\tilde{x}_n^{(k)}(\mu))\right]^{-1}\left(\tilde{A}_n\tilde{x}_n^{(k)}(\mu)-\tilde{f}_n\right),\tilde{x}_{n+1}^{(0)}(\mu)=\Phi_{n+1}\Phi_n^{-1}\,\tilde{x}_n^{(k_n)}(\mu)$$

$$(k = 0,1,\dots,k_n - 1 ; \quad n \geq N ; \quad \tilde{x}_N^{(0)}(\mu) = \tilde{x}_N^{(0)} \in \tilde{\Omega}_N),$$

и соответствующего ему модифицированного процесса $\left\{ \Phi_n^{-1} \tilde{x}_n^{(k_n)}(\mu) \right\}_{n=N}^{\infty}$,

$$\tilde{x}_n^{(k+1)}(\mu) = \tilde{x}_n^{(k)}(\mu) - \left[\tilde{T}_n'(\tilde{x}_n^{(0)}(\mu)) \right]^{-1} \left(\tilde{A}_n \tilde{x}_n^{(k)}(\mu) - \tilde{f}_n \right), \tilde{x}_{n+1}^{(0)}(\mu) = \Phi_{n+1} \Phi_n^{-1} \tilde{x}_n^{(k_n)}(\mu)$$

$$(k = 0,1,\dots,k_n - 1 ; \quad n \geq N ; \quad \tilde{x}_N^{(0)}(\mu) = \tilde{x}_N^{(0)} \in \tilde{\Omega}_N).$$

Этот последний процесс имеет то достоинство, что в нем используется обратный оператор, соответствующий при каждом $n \geq N$ лишь начальной точке $\tilde{x}_n^{(0)}(\mu) \in \tilde{\Omega}_n$ (а при $n = N$ – еще и начальному значению параметра $\mu = 0$), что, очевидно, приводит к уменьшению вычислительных затрат на построение приближений.

Библиографические ссылки

1. **Канторович Л.В.** Функциональный анализ и прикладная математика / Л. В. Канторович // УМН. – 1948. – Т. 3, № 6. – С. 89-85.
2. **Канторович Л.В.** Функциональный анализ / Л. В. Канторович, Г. П. Акилов – СПб., 2004. – 816 с.
3. **Мысовских И.П.** О сходимости метода Л.В. Канторовича для решения нелинейных уравнений и его применениях / И. П. Мысовских // Вестник ЛГУ.– 1953.– № 11.– С. 25-48.
4. **Тавадзе Л.Л.** Проекционно-итерационные методы решения краевых задач для уравнений эллиптического типа: дисс. … канд. физ.-мат. наук / Л. Л. Тавадзе – Д., 1995. – 152 с.
5. **Гарт Л.Л.** О численном моделировании решения нелинейного параметрического уравнения проекционно-итерационным методом / Л. Л. Гарт // Питання прикладної математики і математич-ного моделювання. – Д., 2011. – С. 66-75.
6. **Балашова С.Д.** О дальнейшем применении проекционно-итерационных методов к решению задач минимизации / С. Д. Балашова – Днепропетровск, 1991.– 15 с. – Деп. в ВИНИТИ 13.06.91, № 2487 – В 91.
7. **Гарт Л.Л.** Проекционно-итерационная реализация метода Ньютона-Канторовича для решения нелинейных интегральных уравнений. / Л. Л. Гарт, Н.В. Поляков // Проблемы управления и информатики. – 2012. – № 1. – С. 70-78.
8. **Люстерник Л.А.** Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В. И. Соболев. – М., 1965. – 520 с.

Надійшла до редколегії 1.05.2012.