УДК 519.21 doi: 10.15421/322013

Н.І. Послайко
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

ЗАСТОСУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ МОДЕЛІ ЗАГИБЕЛІ ТА НАРОДЖЕННЯ ДО ЗАДАЧ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ І НАДІЙНОСТІ

Розглянуто узагальнення процесу загибелі та народження у вигляді немарковського процесу зі «слабкою післядією». Для його дослідження використано метод додаткових змінних. Визначені основні характеристики процесу. Наведені приклади застосувань узагальненої моделі до задач масового обслуговування та надійності.

Ключові слова: марковський процес, процес загибелі та народження, перехідний та стаціонарний режим, система масового обслуговування, резервована система, коефіцієнт готовності системи.

N.I. Poslaiko
Oles Honchar Dnipro National University

APPLICATION OF THE GENERALIZED DEATH AND REPRODUCTION MODEL TO QUEUING AND RELIABILITY PROBLEMS

A generalization of the process of death and reproduction $\xi(t)$ to the case when its probabilities of transition to a state j depend not only on the state k in which the process is at the present moment of time, but also on the state from which it is reached, that is, a generalization of the process to the case of "weak after-action. " This process is no longer Markovian. To study it, the method of additional variables was applied – the considered non-Markov process was reduced to a two-dimensional Markov process $\varsigma(t)=\left(\eta(t),\xi(t)\right)$. A system of direct differential Kolmogorov equations for the probabilities of the states of the process $\varsigma(t)$ is derived, the limiting probabilities of the states and the conditions for the existence of a stationary mode of the process are found.

The results obtained can be used to study queuing systems with an ordinary incoming flow of customers, in which the intensities of the arrival of customers and their servicing depend on what preceded the state of the process at the current time – the arrival of a new customer in the system or leaving the system of a served claim.

In the problems of determining the reliability of a system by the reliability of its elements, under the assumption that the elements fail independently of each other, and the residence times of the system in different states have an exponential distribution, the system functioning process is described by a Markov process. If the failure of a system element leads to a change in the operating modes of other related elements, then the load factors of the elements change, and, consequently, their reliability. In this case, it is necessary to apply mathematical models of a more complex nature. In this work, using a generalized model of the process of death and reproduction, an example is given of deriving the calculated ratios for the limiting probabilities of the states of the redundant system with restoration, taking into account the influence of the "aftereffect".

Keywords: Markov process, death and reproduction process, transient and stationary mode, queuing system, redundant system, system availability factor.

Н.И. Послайко

Днипровский национальный университет имени Олеся Гончара

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ГИБЕЛИ И РАЗМНОЖЕНИЯ К ЗАДАЧАМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ И НАДЕЖНОСТИ

Рассмотрено обобщение процесса гибели и размножения в виде немарковского процесса со «слабым последействием». Для его исследования был использован метод дополнительных переменных. Определены основные характеристики процесса. Приведены примеры применения обобщенной модели к задачам массового обслуживания и надежности.

Ключевые слова: марковский процесс, процесс гибели и размножения, переходной и стационарный режим, система массового обслуживания, резервированная система, коэффициент готовности системы.

Вступ. При розгляді марковських моделей систем масового обслуговування поява нових заявок і закінчення обслуговування заявок, які уже є в системі, припускаються незалежними від характеру попередніх змін станів системи. В ситуаціях, які зустрічаються на практиці, іноді такі припущення не відповідають дійсності, тому природно, що вивчення систем, в яких вплив «минулого» на «майбутнє» враховується в тій чи іншій мірі, представляє значний інтерес.

У цьому напрямку є ряд робіт, зокрема, в роботах [1, 2, 6] процеси обслуговування в різних системах узагальнюються на випадок «слабкої післядії».

У багатьох задачах масового обслуговування і надійності поведінка систем описується процесами загибелі та народження. У даній роботі розглядається узагальнення математичної моделі цього процесу на випадок, коли його ймовірності переходу в стан j залежать не тільки від стану k, в якому знаходиться процес у теперішній момент часу, а і від того, із якого стану i він досягнутий, тобто пропонується узагальнення на випадок «слабкої післядії».

Отримані результати можуть бути використані при розв'язанні деяких задач масового обслуговування і надійності.

Постановка задачі. Як відомо, використовуючи метод додаткових змінних [5], будь-який немарковський процес можна доповнити до марковського. Метод додаткових змінних полягає в тому, що до процесу $\xi(t)$, який не є марковським, підключається одна або декілька додаткових змінних, так що векторний процес $\{\xi(t),\ \eta_1(t),\ ...,\ \eta_m(t)\}$ є марковським процесом, і тоді можна розв'язувати задачу відомими методами.

Доповнимо розглядуваний процес $\xi(t)$ до марковського.

Позначимо через $\varsigma(t)=\left(\eta(t),\xi(t)\right)$ випадковий процес, стани якого в кожен момент часу t характеризуються парою $\left(i,k\right)$, $i,k\in\ \left\{0,\ 1,\ 2,\ ...\right\}$ ($i=k+1$ або $i=k-1$ при $k\geq 1$, при $k=0$ $i=1$).

Ймовірності переходів $\varsigma(t)$ при $\Delta t\to 0$ визначимо так:

$P\left\{\varsigma(t+\Delta t)=(i,k)/\varsigma(t)=(i,k)\right\}=1-(\lambda_{ik}+\mu_{ik})\Delta t+o(\Delta t),$

$P\left\{\varsigma(t+\Delta t)=(k,k+1)/\varsigma(t)=(i,k)\right\}=\lambda_{ik}\Delta t+o(\Delta t),$

$P\left\{\varsigma(t+\Delta t)=(k,k-1)/\varsigma(t)=(i,k)\right\}=\mu_{ik}\Delta t+o(\Delta t),$

$k\geq 0,\ \mu_{10}=0.$

Таким чином, означений процес $\varsigma(t)$ є однорідним за часом марковським процесом, який набуває значень з множини X :

$$X=\left\{(k,k+1),\ (k+1,k),\ k\geq 0\right\}.$$

Нехай $x,\mathrm{y}\in\mathrm{X}$. Покладемо

$$P\left\{\varsigma(t+\tau)=y/\varsigma(\tau)=x\right\}=P_x^y(t).$$

Розглядається задача знаходження перехідних ймовірностей процесу $\varsigma(t)$, їх граничних значень та умов існування ергодичного розподілу процесу $\varsigma(t)$.

Метод розв'язання.

1. Прямі диференціальні рівняння Колмогорова для $P_x^y(t)$**.** Покажемо, що система прямих диференціальних рівнянь Колмогорова для визначення ймовірностей $P_x^y(t)$, які характеризують поведінку процесу $\varsigma(t)$ у перехідному режимі, має вигляд:

$$\begin{aligned}
&\frac{dP_x^{(0,1)}(t)}{dt}=-(\lambda_{01}+\mu_{01})P_x^{(0,1)}(t)+\lambda_{1,0}P_x^{(1,0)}(t),\\
&\frac{dP_x^{(m,m+1)}(t)}{dt}=-(\lambda_{m,m+1}+\mu_{m,m+1})P_x^{(m,m+1)}(t)+\lambda_{m-1,m}P_x^{(m-1,m)}(t)+\\
&+\lambda_{m+1,m}P_x^{(m+1,m)}(t),\ m\geq 1,\\
&\frac{dP_x^{(m,m-1)}(t)}{dt}=-(\lambda_{m,m-1}+\mu_{m,m-1})P_x^{(m,m-1)}(t)+\mu_{m+1,m}P_x^{(m+1,m)}(t)+\\
&+\mu_{m-1,m}P_x^{(m-1,m)}(t),\ m\geq 1,\\
&\frac{dP_x^{(0,1)}(t)}{dt}=-(\lambda^{+}+\lambda_0^{+}(n-2)+\mu^{+})P_x^{(0,1)}(t)+(\lambda^{-}+\lambda_0^{-}(n-1))P_x^{(1,0)}(t);
\end{aligned}\qquad(1)$$

початкові умови: $P_x^y(0)=\delta_{xy}$ (δ_{xy} – символ Кронекера).

Дійсно, за формулою повної ймовірності маємо:

$P_x^{(0,1)}(t+\Delta t)=P_x^{(0,1)}(t)\left[1-(\lambda_{01}+\mu_{01})\Delta t\right]+P_x^{(1,0)}(t)\lambda_{1,0}\Delta t+o(\Delta t),$

$P_x^{(m,m+1)}(t+\Delta t)=P_x^{(m,m+1)}(t)\left(1-(\lambda_{m,m+1}+\mu_{m,m+1})\Delta t\right)+\lambda_{m-1,m}\Delta tP_x^{(m-1,m)}(t)+$

$+\lambda_{m+1,m}\Delta tP_x^{(m+1,m)}(t)+o(\Delta t),\ m\geq 1,$

$$P_x^{(m,m-1)}(t+\Delta t) = P_x^{(m,m-1)}(t)\left[1-(\lambda_{m,m-1}+\mu_{m,m-1})\Delta t\right] + P_x^{(m+1,m)}(t)\mu_{m+1,m}\Delta t +$$
$$+P_x^{(m-1,m)}(t)\mu_{m-1,m}\Delta t + o(\Delta t),\ m \ge 1.$$

Представимо останні співвідношення в наступному вигляді:

$$P_x^{(0,1)}(t+\Delta t) - P_x^{(0,1)}(t) = -(\lambda_{01}+\mu_{01})P_x^{(0,1)}(t)\Delta t + P_x^{(1,0)}(t)\lambda_{1,0}\Delta t + o(\Delta t),$$
$$P_x^{(m,m+1)}(t+\Delta t) - P_x^{(m,m+1)}(t) = -(\lambda_{m,m+1}+\mu_{m,m+1})P_x^{(m,m+1)}(t)\Delta t + \lambda_{m-1,m}\Delta t P_x^{(m-1,m)}(t) +$$
$$+\lambda_{m+1,m}\Delta t P_x^{(m+1,m)}(t) + o(\Delta t),\ m \ge 1,$$
$$P_x^{(m,m-1)}(t+\Delta t) - P_x^{(m,m-1)}(t) = -(\lambda_{m,m-1}+\mu_{m,m-1})P_x^{(m,m-1)}(t)\Delta t + P_x^{(m+1,m)}(t)\mu_{m+1,m}\Delta t +$$
$$+P_x^{(m-1,m)}(t)\mu_{m-1,m}\Delta t + o(\Delta t),\ m \ge 1.$$

Розділивши ліві і праві частини цих співвідношень на Δt, граничним переходом при $\Delta t \to 0$ отримуємо систему (1).

2. Ергодичний розподіл $\varsigma(t)$. Найбільший практичний інтерес представляє поведінка процесу $\varsigma(t)$ при $t \to \infty$ та ергодичний розподіл $\varsigma(t)$, умови його існування.

Нехай $t \to \infty$ Будемо вважати, що
$\lambda_{ik} > 0,\ k \ge 0,\ \mu_{ik} > 0,\ k \ge 1.$
Останні припущення є необхідними і достатніми для приводимості марковського процесу $\varsigma(t)$, тому існують границі

$$\lim_{t\to\infty} P_x^{(m,m+1)}(t) = P_{m,m+1},\ \ \lim_{t\to\infty} P_x^{(m+1,m)}(t) = P_{m+1,m},\ m \ge 0, \tag{2}$$

які не залежать від стану x.

Умова ергодичності процесу $\varsigma(t)$ еквівалентна умові додатності границь (2). Знайдемо цю умову.

У системі диференціальних рівнянь (1) спрямуємо t до ∞. Отримаємо:

$$\left(\lambda_{0,1}+\mu_{0,1}\right)P_{0,1} = \lambda_{1,0}P_{1,0}\ , \tag{3}$$
$$\left(\lambda_{m,m+1}+\mu_{m,m+1}\right)P_{m,m+1} = \lambda_{m-1,m}P_{m-1,m} + \lambda_{m+1,m}P_{m+1,m},\ m \ge 1\ , \tag{4}$$
$$\left(\lambda_{1,0}+\mu_{1,0}\right)P_{1,0} = \mu_{2,1}P_{2,1} + \mu_{0,1}P_{0,1}\ , \tag{5}$$
$$\left(\lambda_{m,m-1}+\mu_{m,m-1}\right)P_{m,m-1} = \mu_{m+1,m}P_{m+1,m} + \mu_{m-1,m}P_{m-1,m},\ m \ge 1. \tag{6}$$

У рівнянні (6) замінимо m на $m+1$, знайдемо $\lambda_{m+1,m}P_{m+1,m}$:

$$\lambda_{m+1,m}P_{m+1,m} = \mu_{m+2,m+1}P_{m+2,m+1} + \mu_{m,m+1}P_{m,m+1} - \mu_{m+1,m}P_{m+1,m}.$$

Підставимо цей вираз у рівняння (4), отримаємо:

$$\left(\lambda_{m,m+1}+\mu_{m,m+1}\right)P_{m,m+1} = \lambda_{m-1,m}P_{m-1,m} + \mu_{m+2,m+1}P_{m+2,m+1} + \mu_{m,m+1}P_{m,m+1} -$$
$$-\mu_{m+1,m}P_{m+1,m},\ m \ge 1,$$

звідки випливає рекурентне співвідношення для $P_{m,m+1}$:

$$\lambda_{m,m+1}P_{m,m+1} - \mu_{m+2,m+1}P_{m+2,m+1} = \lambda_{m-1,m}P_{m-1,m} - \mu_{m+1,m}P_{m+1,m} =$$
$$= \lambda_{m-2,m-1}P_{m-2,m-1} - \mu_{m,m-1}P_{m,m-1} = \ldots = \lambda_{0,1}P_{0,1} - \mu_{2,1}P_{2,1}\ .$$

З рівнянь (3) та (5), враховуючи, що $\mu_{10} = 0$, отримуємо

$$\lambda_{0,1}P_{0,1}-\mu_{2,1}P_{2,1}=0.$$

Остаточно маємо

$$P_{m,m+1}=\frac{\mu_{m+2,m+1}}{\lambda_{m,m+1}}P_{m+2,m+1},\ m\geq 0.$$

При $m=0$

$$P_{0,1}=\frac{\mu_{2,1}}{\lambda_{0,1}}P_{2,1}=\frac{\lambda_{1,0}P_{1,0}-\mu_{0,1}P_{0,1}}{\lambda_{0,1}},$$

звідки одержуємо

$$P_{0,1}=\frac{\lambda_{1,0}}{\lambda_{0,1}+\mu_{0,1}}P_{1,0}.$$

Випишемо $P_{m-1,m}$, $P_{m+1,m}$ через $P_{1,0}$.

З рівняння (4) маємо:

$$\left(\lambda_{m,m+1}+\mu_{m,m+1}\right)P_{m,m+1}=\lambda_{m-1,m}P_{m-1,m}+\lambda_{m+1,m}\frac{\lambda_{m-1,m}}{\mu_{m+1,m}}P_{m-1,m}=$$

$$=\frac{\lambda_{m-1,m}}{\mu_{m+1,m}}(\lambda_{m+1,m}+\mu_{m+1,m})P_{m-1,m},$$

тому

$$P_{m,m+1}=\frac{\lambda_{m-1,m}}{\mu_{m+1,m}}\frac{(\lambda_{m+1,m}+\mu_{m+1,m})}{\left(\lambda_{m,m+1}+\mu_{m,m+1}\right)}P_{m-1,m},\quad m\geq 1,$$

$$P_{m,m+1}=\left(\prod_{k=1}^{m}\frac{\lambda_{k-1,k}}{\mu_{k+1,k}}\cdot\prod_{k=0}^{m}\frac{\lambda_{k+1,k}+\mu_{k+1,k}}{\lambda_{k,k+1}+\mu_{k,k+1}}\right)P_{1,0}.$$

Позначимо

$$B_m=\prod_{k=1}^{m}\frac{\lambda_{k-1,k}}{\mu_{k+1,k}}\cdot\prod_{k=0}^{m}\frac{\lambda_{k+1,k}+\mu_{k+1,k}}{\lambda_{k,k+1}+\mu_{k,k+1}}.$$

Тоді маємо

$$P_{m+2,m+1}=\frac{\lambda_{m,m+1}}{\mu_{m+2,m+1}}B_m\cdot P_{1,0},\ m\geq 0.$$

Використовуючи умову нормування

$$P_{1,0}+\sum_{m=0}^{\infty}\left(P_{m,m+1}+P_{m+2,m+1}\right)=1,$$

отримаємо вираз для $P_{1,0}$:

$$P_{1,0}=\frac{1}{1+\sum\limits_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda_{m,m+1}+\mu_{m+2,m+1}}{\mu_{m+2,m+1}}\cdot B_m}.$$

Для додатності границь (2) необхідно і достатньо, щоб

$$1+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda_{m,m+1}+\mu_{m+2,m+1}}{\mu_{m+2,m+1}}\cdot B_m<\infty. \qquad (7)$$

Теорема. За умови $\lambda_{ik}>0,\ k\geq 0,\ \mu_{ik}>0,\ k\geq 1$ процес $\varsigma(t)$ є ергодичним тоді і тільки тоді, коли виконується умова (7).

3. Система масового обслуговування з очікуванням. Розглянемо одноканальну систему масового обслуговування з очікуванням. Припустимо, що вхідний потік заявок є ординарним. Нехай $\xi(t)$ співпадає в кожен момент часу t з числом заявок у системі (включаючи ту, що обслуговується), $\xi(t)\in\ \{0,\,1,\,2,\,...\}$. Будемо вважати, що процес $\varsigma(t)$ знаходиться в момент часу t у стані (i,k), $i,k\in\ \{0,\,1,\,2,\,...\}$ ($i=k+1$ або $i=k-1$ при $k\geq 1$, при $k=0$ $i=1$), якщо число заявок у системі $\xi(t)$ дорівнює k, і процес $\xi(t)$ прийшов в цей стан зі стану i. Якщо $i=k+1$, перехід в стан k відбувся в результаті виходу з системи обслуженої заявки, а при $i=k-1$ – за рахунок приходу в систему нової заявки. При зроблених припущеннях λ_{ik} – інтенсивність надходження заявок, μ_{ik} – інтенсивність їх обслуговування. Перехідні ймовірності такої системи визначаються із системи диференціальних рівнянь (1), вирази для граничних ймовірностей станів виведені в пункті **2.** Умовою існування стаціонарного режиму в системі є збіжність ряду (7). При невиконанні цієї умови, довжина черги з часом необмежено зростає.

Якщо $\lambda_{i,k}=\lambda_k,\ \mu_{i,k}=\mu_k,\ i,k\in\ (0,\,1{,}2,\,...)$, отримаємо одноканальну систему масового обслуговування, в якій черга описується процесом загибелі та народження, а умова (7) переходить у відому умову існування стаціонарного режиму для процесу загибелі та народження ([3]):

$$\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{k}\frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}<\infty.$$

Резервована система з відновленням. Припустимо, що система складається з n елементів і працює у режимі теплого резерву – один елемент (основний) знаходиться під загальним навантаженням, а інші в недовантаженому стані. Є ремонтна бригада, яка відновлює елементи, що виходять з ладу, причому одночасно вона може відновлювати тільки один елемент. Елемент, що вийшов з ладу, негайно починає відновлюватись, якщо бригада не зайнята; якщо ж зайнята, елемент стає в чергу.

За припущення, що елементи виходять з ладу незалежно один від одного, час безвідмовної роботи основного елемента та резервних елементів і час відновлення розподілені за показниковими розподілами з параметрами $\lambda,\ \lambda_0,\ \mu$ відповідно ($\lambda_0<\lambda$), процес $\xi(t)$, який співпадає з числом несправних елементів в момент часу t, є марковським процесом, а саме процесом загибелі та народження зі скінченною множиною станів: $\xi(t)\in\{0,1,2,...,n\}$ (див. [4]). Резервована система знаходиться у стані відмови, коли $\xi(t)=n$. Коефіцієнт готовності такої системи відомий:

$$k_{\Gamma} = 1 - P_n = 1 - \frac{\prod_{i=1}^{n}\left[\rho + \rho_0(n-i)\right]}{1 + \sum_{k=1}^{n}\prod_{i=1}^{k}\left[\rho + \rho_0(n-i)\right]}\text{, де } \rho_0 = \frac{\lambda_0}{\mu},\ \rho = \frac{\lambda}{\mu}. \qquad (8)$$

Якщо ж вихід з ладу елемента системи приводить до зміни режимів інших, пов'язаних з ним елементів – змінюються коефіцієнти навантаження елементів, а, отже, і їх надійність. У цьому випадку доводиться застосовувати математичні моделі більш складного характеру.

Узагальнимо цю задачу на випадок «слабкої післядії». Будемо вважати, що процес $\varsigma(t)$, який описує роботу системи, знаходиться в момент часу t_0 у стані $(k-1,k)$, якщо число несправних елементів у цей момент часу дорівнює k і остання зміна в системі (до моменту t_0) була викликана виходом з ладу чергового елемента, і в стані $(k+1,k)$, якщо перед цим було відновлення елемента, і це позначається на величині параметрів $\lambda,\ \lambda_0,\ \mu$. Процес $\varsigma(t)$ у цьому випадку має множину станів $\{(k-1,k),\ (k,k-1)\},\ 1 \le k \le n$.

Ймовірності переходів зі стану в стан за час $\Delta t \to 0$ визначимо наступним чином:

$$P\{(1,0) \to (1,0)\} = 1 - \left(\lambda^- + \lambda_0^-(n-1)\right)\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P\{(1,0) \to (0,1)\} = \left(\lambda^- + \lambda_0^-(n-1)\right)\Delta t + o(\Delta t),$$

$$\begin{cases} P\{(m+1,m) \to (m+1,m)\} = 1 - \left(\lambda^- + \lambda_0^-(n-m-1) + \mu^-\right)\Delta t + o(\Delta t), \\ P\{(m+1,m) \to (m,m+1)\} = \left(\lambda^- + \lambda_0^-(n-m-1)\right)\Delta t + o(\Delta t), \\ P\{(m+1,m) \to (m,m-1)\} = \mu^-\Delta t + o(\Delta t), \qquad 1 \le m \le n\text{-}1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} P\{(m-1,m) \to (m-1,m)\} = 1 - \left(\lambda^+ + \lambda_0^+(n-m-1) + \mu^+\right)\Delta t + o(\Delta t) \\ P\{(m-1,m) \to (m,m+1)\} = \left(\lambda^+ + \lambda_0^+(n-m-1)\right)\Delta t + o(\Delta t), \\ P\{(m-1,m) \to (m,m-1)\} = \mu^+\Delta t + o(\Delta t), \qquad 1 \le m \le n\text{-}1, \end{cases}$$

$$P\{(n-1,n) \to (n-1,n)\} = 1 - \mu^+\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P\{(n-1,n) \to (n,n-1)\} = \mu^+\Delta t + o(\Delta t).$$

Тут λ^- (λ_0^-) – інтенсивність виходу з ладу основного (резервного) елемента у припущенні, що до цього в систему повернувся відремонтований елемент, а λ^+ (λ_0^+) – у припущенні, що перед цим вийшов з ладу один з елементів. Аналогічно μ^+ (μ^-) – інтенсивність відновлення при тих же припущеннях. Можна показати, що система диференціальних рівнянь для ймовірностей переходу із стану в стан має вигляд:

$$\frac{dP_x^{(0,1)}(t)}{dt} = -(\lambda^+ + \lambda_0^+(n-2) + \mu^+)P_x^{(0,1)}(t) + (\lambda^- + \lambda_0^-(n-1))P_x^{(1,0)}(t),$$

$$\frac{dP_x^{(m,m+1)}(t)}{dt} = -(\lambda^+ + \lambda_0^+(n-m-2) + \mu^+)P_x^{(m,m+1)}(t) +$$
$$+(\lambda^+ + \lambda_0^+(n-m-1))P_x^{(m-1,m)}(t) +$$
$$+(\lambda^- + \lambda_0^-(n-m-1))P_x^{(m+1,m)}(t),\ 1 \le m \le n-2,\ n > 3,$$
$$\frac{dP_x^{(n-1,n)}(t)}{dt} = -\mu^+ P_x^{(n-1,n)}(t) + \lambda^- P_x^{(n,n-1)}(t)$$
$$\frac{dP_x^{(1,0)}(t)}{dt} = -(\lambda^- + \lambda_0^-(n-1))P_x^{(1,0)}(t) + \mu^+ P_x^{(0,1)}(t) + \mu^- P_x^{(2,1)}(t),$$
$$\frac{dP_x^{(m,m-1)}(t)}{dt} = -(\lambda^- + \lambda_0^-(n-m) + \mu^-)P_x^{(m,m-1)}(t) + \mu^- P_x^{(m+1,m)}(t) +$$
$$+\mu^+ P_x^{(m-1,m)}(t),\ 1 \le m \le n-1,$$
$$\frac{dP_x^{(n,n-1)}(t)}{dt} = -(\lambda^- + \mu^-)P_x^{(n,n-1)}(t) + \mu^+ P_x^{(n-1,n)}(t).$$

Позначимо

$$\lim_{t\to\infty} P_x^{(m,m+1)}(t) = P_{m,m+1}, \quad \lim_{t\to\infty} P_x^{(m+1,m)}(t) = P_{m+1,m},\ 0 \le m \le n\text{-}1.$$

Ймовірності $P_{m,m+1}$, $P_{m+1,m}$, $0 \le m \le n\text{-}1$задовольняють системі рівнянь:

$$(\lambda^+ + \lambda_0^+(n-2) + \mu^+)P_{0,1} = (\lambda^- + \lambda_0^-(n-1))P_{1,0}, \tag{9}$$
$$(\lambda^+ + \lambda_0^+(n-m-2) + \mu^+)P_{m,m+1} = (\lambda^+ + \lambda_0^+(n-m-1))P_{m-1,m} +$$
$$+(\lambda^- + \lambda_0^-(n-m-1))P_{m+1,m}, \qquad 1 \le m \le n-2, \tag{10}$$
$$\mu^+ P_{n-1,n} = \lambda^- P_{n,n-1}, \tag{11}$$
$$(\lambda^- + \lambda_0^-(n-1))P_{1,0} = \mu^- P_{2,1} + \mu^+ P_{0,1}, \tag{12}$$
$$(\lambda^- + \lambda_0^-(n-m) + \mu^-)P_{m,m-1} = \mu^- P_{m+1,m} + \mu^+ P_{m-1,m}, \qquad 1 < m \le n-1, \tag{13}$$
$$(\lambda^- + \mu^-)P_{n,n-1} = \mu^+ P_{n-1,n}. \tag{14}$$

Замінимо в рівнянні (13) m на $m+1$ і визначимо $(\lambda^- + \lambda_0^-(n-m-1))P_{m,m+1}$:

$$(\lambda^- + \lambda_0^-(n-m-1))P_{m+1,m} = \mu^- P_{m+2,m+1} + \mu^+ P_{m,m+1} - \mu^- P_{m+1,m}.$$

Підставивши цей вираз у рівняння (10), отримаємо рекурентне співвідношення:

$$(\lambda^+ + \lambda_0^+(n-m-2))P_{m,m+1} - \mu^- P_{m+2,m+1} =$$
$$= (\lambda^+ + \lambda_0^+(n-m-1))P_{m-1,m} - \mu^- P_{m+1,m} = \ldots = (\lambda^+ + \lambda_0^+(n-2))P_{0,1} - \mu^- P_{2,1}\ .$$

Використовуючи співвідношення (9) та (12), можна показати, що

$$(\lambda^+ + \lambda_0^+(n-2))P_{0,1} - \mu^- P_{2,1} = 0\ .$$

У результаті перетворень маємо

$$P_{m,m+1} = \frac{\mu^-}{\lambda^+ + \lambda_0^+(n-m-2)} P_{m+2,m+1},\ 0 \le \mathrm{m} \le n-2. \tag{15}$$

Якщо $m = 0$,

$$P_{0,1} = \frac{\mu^-}{\lambda^+ + \lambda_0^+(n-2)} P_{2,1} = \frac{\left(\lambda^- + \lambda_0^-(n-1)\right)P_{1,0} - \mu^+ P_{0,1}}{\lambda^+ + \lambda_0^+(n-2)} \quad ,$$

звідки після нескладного перетворення одержуємо:

$$P_{0,1} = \frac{\left(\lambda^- + \lambda_0^-(n-1)\right)}{\lambda^+ + \lambda_0^+(n-2) + \mu^+} P_{1,0} \ .$$

Виразимо ймовірності $P_{m-1,m}$, $P_{m+1,m}$ через $P_{1,0}$.

З рівняння (9) і рекурентного співвідношення (15) маємо:

$$P_{m,m+1} = \frac{(\lambda^+ + \lambda_0^+(n-m-1))}{\mu^-} \cdot \frac{(\lambda^- + \lambda_0^-(n-m-1) + \mu^-)}{(\lambda^+ + \lambda_0^+(n-m-2) + \mu^+)} P_{m-1,m}, \ 1 \le \ m \le n-2.$$

Вираз ймовірностей $P_{m,m+1}$ через $P_{1,0}$ має вигляд:

$$P_{m,m+1} = \frac{\lambda^- + \lambda_0^-(n-1)}{\lambda^+ + \lambda_0^+(n-2) + \mu^+} \left(\prod_{k=1}^{m} \frac{\lambda^+ + \lambda_0^+(n-k-1)}{\mu^-} \cdot \frac{\lambda^- + \lambda_0^-(n-k-1) + \mu^-}{\lambda^+ + \lambda_0^+(n-k-2) + \mu^+} \right) P_{1,0},$$

$1 \le m \le n - 2.$

Ймовірність відмови резервної групи (один елемент ремонтується, а всі інші чекають ремонту) дорівнює:

$$P_{n-1,n} = \frac{\lambda^- + \lambda_0^-(n-1)}{\lambda^+ + \lambda_0^+(n-2) + \mu^+} \cdot \frac{\lambda^+}{\mu^-} \cdot \frac{\lambda^- + \mu^-}{\mu^+} \times$$

$$\times \left(\prod_{k=1}^{n-2} \frac{\lambda^+ + \lambda_0^+(n-k-1)}{\mu^-} \cdot \frac{\lambda^- + \lambda_0^-(n-k-1) + \mu^-}{\lambda^+ + \lambda_0^+(n-k-2) + \mu^+} \right) P_{1,0}.$$

Введемо позначення:

$$B_m = \frac{\lambda^- + \lambda_0^-(n-1)}{\lambda^+ + \lambda_0^+(n-2) + \mu^+} \left(\prod_{k=1}^{m} \frac{\lambda^+ + \lambda_0^+(n-k-1)}{\mu^-} \cdot \frac{\lambda^- + \lambda_0^-(n-k-1) + \mu^-}{\lambda^+ + \lambda_0^+(n-k-2) + \mu^+} \right),$$

$1 \le m \le n - 2.$

Це дозволить записати вирази для ймовірностей $P_{m,m+1}$, $P_{n-1,n}$, $P_{m+2,m+1}$, $P_{2,1}$ наступним чином:

$P_{m,m+1} = B_m P_{1,0}, \ 1 \le m \le n - 2,$

$$P_{n-1,n} = \cdot \frac{\lambda^+}{\mu^-} \cdot \frac{\lambda^- + \mu^-}{\mu^+} B_{n-2} P_{1,0},$$

$$P_{m+2,m+1} = \frac{(\lambda^+ + \lambda_0^+(n-m-1))}{\mu^-} \cdot B_m P_{1,0}, \ 1 \le m \le n - 2,$$

$$P_{2,1} = \frac{\lambda^+ + \lambda_0^+(n-2)}{\mu^-} \cdot \frac{\lambda^- + \lambda_0^-(n-1)}{\lambda^+ + \lambda_0^+(n-2) + \mu^+} P_{1,0} \, .$$

Із умови нормування

$$\sum_{m=0}^{n-1} \left(P_{m,m+1} + P_{m+1,m} \right) = 1$$

знаходимо $P_{1,0}$:

$$P_{1,0} = \left(1 + \frac{\lambda^- + \lambda_0^-(n-1)}{\lambda^+ + \lambda_0^+(n-2) + \mu^+} \cdot \frac{\lambda^+ + \lambda_0^+(n-2) + \mu^-}{\mu^-} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=1}^{n-2} \frac{\lambda^+ + \lambda_0^+(n-m-1) + \mu^-}{\mu^-} \cdot B_m + \frac{\lambda^+}{\mu^-} \cdot \frac{\lambda^- + \mu^-}{\mu^+} B_{n-2} \right)^{-1}.$$

Коефіцієнт готовності такої системи дорівнює:

$$k_{\Gamma} = 1 - P_{n-1,n}. \qquad (16)$$

При $\lambda^+ = \lambda^- = \lambda,\ \lambda_0^+ = \lambda_0^- = \lambda_0,\ \mu^+ = \mu^-$ вираз (16) співпадає з виразом (8).

Висновки. Застосування узагальненої моделі процесу загибелі та народження, що пропонується в роботі, було проілюстровано на двох прикладах. Отримані основні характеристики для одноканальної системи масового обслуговування з ординарним вхідним потоком. Результат не складно розповсюдити на випадок багатоканальної системи масового обслуговування. Для резервованої системи з відновленням отримані граничні ймовірності станів, знайдено вираз коефіцієнта готовності системи.

Бібліографічні посилання

1. **Аннаев, Т**. Применение марковских процессов, однородных по второй компоненте, к решению некоторых задач теории массового обслуживания [Текст] / Т. Аннаев // Кандидатская диссертация – КГУ– 1971
2. **Арсенишвили, Г.Л.** Об одной задаче массового обслуживания [Текст] / Г.Л. Арсенишвили// Сообщения АН ГССР – 1970, 59. №3– С. 545-548.
3. **Гнеденко, Б.В.** Введение в теорию массового обслуживания [Текст] /Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко. – М.: URSS, 2013. – 400 с.
4. **Гнеденко, Б.В.** Математические методы в теории надежности [Текст] /Б.В. Гнеденко, Ю.К. Беляев, А.Д. Соловьев. – М.: URSS, 2019. – 584 с.
5. **Ивченко Г.И.** Теория массового обслуживания [Текст] / Г.И. Ивченко, В.А. Каштанов, И.Н. Коваленко. – М.: URSS, 2012. – 304 с.
6. **Послайко, Н.И.** Исследование стационарного режима в системе массового обслуживания типа $(M/G/1)^{\pm}$ [Текст] / Н.И. Послайко //Сборник «Исследования по теории случайных процессов – Изд. Института математики АН УССР, 1976. – С. 141-151.

Надійшла до редколегії 13.10. 2020.