

Л.В. Волошко

Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

РОЗВ'ЯЗОК КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ І ПОСТАНОВКА ЗВОТНОЇ КОЕФІЦІЄНТНОЇ ЗАДАЧІ

Розроблено ефективний алгоритм розв'язку крайової задачі для неоднорідного бігармонічного рівняння з неоднорідними крайовими умовами і запропоновано зворотню коефіцієнтну задачу для подальшого розв'язування.

Разработан эффективный алгоритм решения граничной задачи для неоднородного бигармонического уравнения с неоднородными граничными условиями и предложена обратная коэффициентная задача для дальнейшего решения.

An efficient algorithm is developed for solution of boundary-value problems for inhomogeneous biharmonic equation subject to inhomogeneous boundary conditions, and a possible setup of inverse problem is proposed for further treatment.

Ключові слова: бігармонічне рівняння, крайова задача, неканонічна форма області, зворотня коефіцієнтна задача.

Вступ. Для постановки і розв'язування складних задач оптимізації [6], механіки [2], теорії керування [7] необхідні ефективні обчислювальні алгоритми розв'язку крайових задач рівнянь математичної фізики. Далі розглядається метод потенціалу для розв'язку задач для неоднорідного бігармонічного рівняння з однорідними та неоднорідними крайовими умовами.

Крайова задача для неоднорідного бігармонічного рівняння з однорідними крайовими умовами. Фізичний приклад. Розглянемо рівняння Софі Жермен, тобто рівняння згину серединних точок тонкої пружної пластини

$$\Delta \Delta w(x, y) = \frac{q}{D}, \quad (1) \quad w(x, y)|_{\Gamma} = 0, \quad \left. \frac{\partial w(x, y)}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0, \quad (2)$$

де $w = w(x, y)$ – невідома функція згину серединної точки (x, y) пластини; Γ – контур пластини, який обмежує її область Ω ; $q/D = const$, де q – інтенсивність поперечного навантаження; D – циліндрична жорсткість пластини. Крайові умови (2) означають, що пластини має жорстко закріплені краї. Легко перевірити безпосередньою підстановкою, що одним з розв'язків рівняння (1) буде

$$w_1(x, y) = (q(x^2 + y^2)^2)/D. \quad (3)$$

Далі розв'яжемо однорідну задачу з неоднорідними крайовими умовами:

$$\Delta \Delta w_2(x, y) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (4)$$

$$w_2(x, y)|_{\Gamma} = -w_1(x, y) \\ \left. \frac{\partial w_2(x, y)}{\partial n} \right|_{\Gamma} = -\left. \frac{\partial w_1(x, y)}{\partial n} \right|_{\Gamma}. \quad (5)$$

тобто при формуванні крайових умов (5) ми фактично обчислюємо на контурі Γ відому функцію $w_1(x, y)$ та її нормальну похідну. В [3; 5] викладений алгоритм розв'язування задачі (4) – (5), відповідно до якого розв'язок задачі (1) – (2) маємо у вигляді суми бігармонічних потенціалів з відомими функціями щільності μ_1, μ_2 ,

$$w(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y) \quad \text{або}$$

$$w(x, y) = \frac{q(x^2 + y^2)^2}{64D} + \int_{\Gamma} (r^2 \ln r) \cdot \mu_1(\xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta) + \\ + \int_{\Gamma} [-r(2 \ln r + 1)] \cdot \mu_2(\xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta),$$

де $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, а (x, y) – внутрішня точка області Ω .

Крайова задача для неоднорідного бігармонічного рівняння з неоднорідними крайовими умовами.

$$\Delta \Delta w(x, y) = f \quad \text{в } \Omega, \quad (6)$$

$$w|_{\Gamma} = \varphi, \quad \left. \frac{dw}{dn} \right|_{\Gamma} = \psi, \quad (7)$$

де $w = w(x, y)$ – невідома функція, f, φ, ψ – задані неперервні функції, Γ – контур, який обмежує область Ω [2; 10].

За теоремою Гілберта [1] розв'язок рівняння (6) має вигляд:

$$w_1(x, y) = \frac{1}{8\pi D} \iint_{\Omega} r^2 \ln r \cdot f(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta), \quad (8)$$

тобто $w_1(x, y)$ знайдена через подвійний інтеграл задовольняє рівняння (6), але не задовольняє крайовим умовам (7). Отже, $\Delta \Delta w_1(x, y) = f(x, y)$.

Для того, щоб задовольнити крайові умови формулюємо таку задачу:

$$\Delta \Delta w_2(x, y) = 0 \quad \text{в } \Omega \quad (9)$$

$$w_2|_{\Gamma} = (\varphi - w_1)|_{\Gamma}, \quad \left. \frac{dw_2}{dn} \right|_{\Gamma} = \left(\psi - \frac{\partial w_1}{\partial n} \right)|_{\Gamma}, \quad (10)$$

де при формуванні крайових умов (10) треба знайти різницю значень функцій φ, ψ та $w_1(x, y)$ та її нормальної похідної на границі Γ відповідно. Для знаходження функції $w_1(x, y)$ та її нормальної похідної треба обчислити відповідні подвійні інтеграли по області прямокутної форми, що охоплює контур Γ . Цю область, покриваємо прямокутною сіткою. Алгоритм розв'язку задачі (9) – (10) є відомим [3; 5]. А остаточно розв'язком задачі (6) – (7) буде

$$w(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y) \quad \text{або}$$

$$w(x, y) = \frac{1}{8\pi D} \iint_{\Omega} r^2 \ln r \cdot f(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} (r^2 \ln r) \cdot \mu_1(\xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} [-r(2 \ln r + 1)] \cdot \mu_2(\xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta),$$

де $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, а (x, y) – тепер внутрішня точка області Ω .

Наведемо приклади модельних функцій та різних форм областей Ω , які ілюструють ефективність методу. Для перевірки достовірності розв'язку обираємо деяку модельну функцію $g(x, y)$. Подівавши на цю функцію бігармонічним оператором отримаємо $f(x, y)$, тобто $\Delta \Delta g(x, y) = f(x, y)$. Знайшовши значення $g(x, y)$ та її нормальної похідної в точках контуру визначимо крайові умови $\varphi(x, y), \psi(x, y)$. Таким чином, у силу єдності розв'язку, значення функції $g(x, y)$ мають співпадати з розв'язком $w(x, y)$.

Приклад 1. Нехай $g(x, y) = x^2 y^4 / 24$ – розв'язок задачі. Тоді задамо $f \equiv x^2 + y^2$, $\varphi = x^2 y^4 / 24$, $\psi = xy^4 \cos(n^\wedge x) / 12 + x^2 y^3 \cos(n^\wedge y) / 6$.

Таблиця 1

Розрахунки для круга $R = 1$

| (x, y) | w (наближ.) | w (точно) | Похибка |
|------------|---------------|-------------|---------|
| (0; 0) | 10.00184 | 10 | 0.00184 |
| (0.5; 0) | 10.00235 | 10 | 0.00235 |
| (1; 0) | 10.00234 | 10 | 0.00234 |
| (0.5; 0.2) | 10.00238 | 10.00001 | 0.00236 |
| (0.5; 0.5) | 10.00308 | 10.00065 | 0.00243 |

Відносна похибка складає 0,02 %.

Розрахунки для гіпоциклоїди з параметрами $R = 1$, $r = 0,6$, $d = 0,2$

| (x, y) | w (наближ.) | w (точне) | Похибка |
|------------|---------------|-------------|---------|
| (0.7; 0) | 10.00258 | 10 | 0.00258 |
| (0.2; 0.1) | 10.02561 | 10.00000 | 0.02561 |
| (0.2; 0.2) | 9.986467 | 10.00000 | 0.01353 |
| (0.9; 0.2) | 10.00218 | 10.00005 | 0.00212 |
| (0.2; 0.4) | 9.984118 | 10.00004 | 0.01592 |

Відносна похибка – 0,2 %.

Приклад 2. Нехай $g(x, y) = x^6 + y^4$ – розв'язок задачі. Тоді задамо $f \equiv 360x^2 + 24$, $\varphi = x^6 + y^4$, $\psi = 6x^5 \cos(n^{\wedge} x) + 4y^3 \cos(n^{\wedge} y)$.

Розрахунки для овала Кассіні з параметрами $a = 1,2$, $c = 1$

| (x, y) | w (наближ.) | w (точне) | Похибка |
|------------|---------------|-------------|---------|
| (0.5; 0) | 0.01294 | 0.01562 | 0.00267 |
| (0.6; 0) | 0.04607 | 0.04665 | 0.00058 |
| (1; 0) | 1.02286 | 0.99999 | 0.02286 |
| (0.7; 0.1) | 0.12029 | 0.11774 | 0.00254 |
| (0.8; 0.2) | 0.27020 | 0.26374 | 0.00645 |

Відносна похибка складає 0,2 %.

Розрахунки для квадрата зі стороною $a = 1$,

| (x, y) | w (наближ.) | w (точне) | Похибка |
|------------|---------------|-------------|------------|
| (0.4; 0) | 0.00418 | 0.00409 | 9.06768E-5 |
| (0; 0.1) | 0.00018 | 0.0001 | 8.71697E-5 |
| (0.4; 0.2) | 0.00582 | 0.00569 | 0.00013 |
| (0.2; 0.3) | 0.00827 | 0.00816 | 0.00011 |
| (0.5; 0.3) | 0.02230 | 0.02372 | 0.00142 |

Відносна похибка – 0,01 %

Аналіз одержаних даних свідчить про обчислювальну ефективність алгоритму розв'язку задачі, тому він може бути основою для розв'язування складних задач оптимізації, крайових задач рівнянь математичної фізики в нелінійній постановці з побудовою різних схем ітераційних процесів та дослідження їх збіжності.

Як приклад, розглянемо задачу статичного згину жорстко закріпленої по краям тонкої пружної пластини в лінійній постановці:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D} \quad (12), \quad \frac{\partial w(x, y)}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 0 \quad (13)$$

з додатковою умовою, яка не виводить задачу за межі лінійної постановки,

$$w(x^*, y^*) = w^* \quad (14)$$

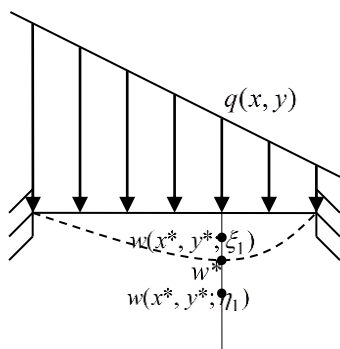


Рис. 1

Вважаємо, що $q(x, y)$ змінюється за лінійним законом, тобто $q(x, y) = ax + by + c$, або, іншими словами, маємо гідростатичне навантаження на пластину. При цьому b, c – задані коефіцієнти, а a – коефіцієнт, який необхідно визначити (відновити). Таким чином, отримали зворотну коефіцієнтну задачу [4; 8] по ідентифікації правій частині рівняння (12). Вона має такий фізичний зміст: за заданим у додатковій умові (14) прогином у точці (x^*, y^*) частково відтворимо закон (знаходимо лише коефіцієнт a) гідростатичного навантаження пластини.

Для цього використовуємо метод ділення навпіл. Будемо позначати $w(x^*, y^*; a)$ розв'язок задачі (12) – (13) для параметра a . Знайдемо проміжок, якому належить шукане a . Для цього обираємо ξ_1 і η_1 , такі що $w(x^*, y^*; \xi_1) < w^* < w(x^*, y^*; \eta_1)$ (рис. 1), тобто $a \in [\xi_1, \eta_1]$. Розбиваємо відрізок навпіл точкою

$$a_1 = \frac{\xi_1 + \eta_1}{2}.$$

З двох відрізків $[\xi_1, a_1]$ та $[a_1, \eta_1]$ обираємо той, для якого виконається

одна з нерівностей $w(x^*, y^*; \xi_1) < w^* < w(x^*, y^*; a_1)$ або $w(x^*, y^*; a_1) < w^* < w(x^*, y^*; \eta_1)$ і позначаємо його $[\xi_2, \eta_2]$, і далі

$$a_2 = \frac{\xi_2 + \eta_2}{2}, \quad \dots \quad a_k = \frac{\xi_k + \eta_k}{2},$$

використавши умову закінчення ітераційного процесу $|w(x^*, y^*; a_k) - w^*| < \varepsilon$, де ε - задана точність. Очевидно, що $a \in [\xi_i, \eta_i]$, $i = 1, 2, \dots, k$, і за левою про вкладені відрізки числові послідовності збігаються до шуканого a .

Моделна задача: для перевірки розв'язуємо пряму задачу (12) – (13) для відомого коефіцієнта a знаходимо $w(x^*, y^*) = w^*$. Потім, використавши цю додаткову умову, за допомогою викладеного алгоритму розв'язуємо задачу (12) – (14). Знайдене a повинно співпадати з наперед заданим.

У зв'язку з високою точністю розв'язування лінійної задачі, а також ефективністю і обґрунтованістю застосування методу ділення навпіл, припускаємо, що отримаємо вірний і достатньо точний розв'язок поставленої задачі.

Бібліографічні посилання

1. **Арсенін В. Я.** Методи математичної фізики і спеціальні функції / В.Я. Арсенін. М., 1984.
2. **Боборикін В. Г.** Про розв'язування задачі пружного згину пластини зі змішаними граничними умовами / В.Г. Боборикін // International applied mechanics 2006. Т.42, №5.
3. **Волошко Л. В.** Обчислювальна ефективність бігармонічного потенціалу / Л.В. Волошко, Л.С. Коряшкіна // Тези доповідей VII міжнародної науково-практичної конференції «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2009)». – Дніпропетровськ, 25 – 27 листопада 2009 року. С.132 – 133.
4. **Денисов А. М.** Введення в теорію зворотних задач. / А.М. Денисов – М., 1994, 208 с.
5. **Кисельова О. М.** Щодо розв'язування крайової задачі для неоднорідного бігармонічного рівняння для області складної форми / О.М. Кисельова, В.Д. Ламзюк, Л.В. Волошко // ВІСНИК Дніпропетр. ун-ту, Серія: «Моделювання», – 2011. – Вип. 3, №8, – С 20 – 28.
6. **Кисельова О. М.** Неперервні задачі оптимального розбиття множин: теорія, алгоритми, додатки / О.М. Кисельова, Н.З. Шор. Монографія – К., 2005, – 564 с.
7. **Коряшкіна Л. С.** Розв'язок однієї задачі керування параболічною системою / Л.С. Коряшкіна // Проблеми керування і інформатики 1998. С. 94 – 102.
8. **Самарський А. А.** Чисельні методи розв'язку зворотних задач математичної фізики / А.А. Самарський, П.Н. Вабищевич. – М., 2009, 480 с.
9. **Самуль В. І.** Основи теорії пружності і пластичності / В.І. Самуль. – М., 1970, 287 с.
10. **Melnikov Yu. A.** [Influence Functions and Matrices](#). – New York-Basel, 1999.

Надійшла до редколегії 20.02.2012

