

**Л.Т. Бойко\*, О.І. Бабаченко\*\*, Г.А. Кононенко\*\*, І.В. Попов\***

*\*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

*\*\*Інститут чорної металургії імені З.І. Некрасова НАН України*

## **АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РЕАЛЬНОЇ ОДНОВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ СУЦІЛЬНОГО НЕОБМЕЖЕНОГО СТАЛЕВОГО ЦИЛІНДРА**

Об'єктом дослідження є температурне поле суцільного, нескінченного циліндра, який у розігрітому стані переміщено в охолоджуюче середовище. Математична модель цієї задачі складається з одновимірного квазілінійного диференціального рівняння теплопровідності, початкових і граничних умов. Безрозмірний варіант цієї математичної задачі розв'язано сітковим методом. Програмна реалізація алгоритму перевірена на реальному прикладі. Результати очікувані.

Ключові слова: суцільний сталевий циліндр, квазілінійне рівняння теплопровідності, метод сіток, візуалізація результатів.

**L.T. Boiko\*, O.I. Babachenko\*\*, G.A. Kononenko\*\*, I.V. Popov\***

*\*Oles Honchar Dnipro National University*

*\*\*Iron and Steel Institute of Z.I. Nekrasov of NAS Ukraine*

## **ALGORITHM FOR SOLVING A REAL ONE-DIMENSIONAL HEAT CONDUCTION PROBLEM FOR A SOLID INFINITE STEEL CYLINDER**

An infinite continuous steel cylinder of radius  $R$  is considered. The temperature field  $T$  is assumed in the cylinder region, which is assumed to be symmetric about the  $Oz$  axis. At the initial time, the lateral surface of the cylinder is instantly cooled to a certain temperature, it is necessary to determine the temperature distribution  $T$  inside the cylinder at any time. Typical in thermophysical studies is a situation where the thermophysical properties depend on not only spatial coordinates and time but also on the temperature, in this case, we obtain a quasi-linear heat conduction equation.

There is a problem with rounding errors when you approach the task on a computer. To reduce the effect of rounding errors on the accuracy of the approximate solution, the transformation to dimensionless variables was made. The transition to dimensionless variables begins with the choice of values to be scaled. Scale factors were selected and the transformation to dimensionless variables for temperature, spatial coordinate, time coordinate, and thermophysical coefficients was made.

Thermal-physical coefficients of steel depend on temperature, but this dependence is established only experimentally. To obtain the values of the physical properties of the steel at any temperature, the method of least squares was used to obtain the density, heat conductivity, and specific heat dependences on the temperature in analytical form, these dependencies were used to find dimensionless coefficients of the physical properties of the steel.

This math problem is solved by the net-point method using the explicit template. The computer program is developed in C++ language for the numerical implementation of net-

point method algorithms in the software development environment MS Visual Studio 2017. The program is verified in a test case, the results are expected.

**Keywords:** solid steel cylinder, quasilinear equation of thermal conductivity, mesh method, results visualization.

**Л.Т. Бойко\***, **А.И. Бабаченко\*\***, **А.А. Кононенко\*\***, **И.В. Попов\***

*\*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

*\*\*Інститут чорної металургії імені З.І. Некрасова НАН України*

## **АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ РЕАЛЬНОЙ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ СПЛОШНОГО БЕСКОНЕЧНОГО СТАЛЬНОГО ЦИЛИНДРА**

Объектом исследования является температурное поле сплошного бесконечного цилиндра, который в разогретом состоянии перемещен в охлаждающую среду. Математическая модель этой задачи состоит из одномерного квазилинейного дифференциального уравнения теплопроводности, начальных и граничных условий. Безразмерный вариант этой математической задачи решен методом сеток. Программная реализация алгоритма решения проверена на реальном примере. Результаты ожидаемые.

**Ключевые слова:** сплошной стальной цилиндр, квазилинейное уравнение теплопроводности, метод сеток, визуализация результатов.

**Вступ.** При проведенні наукових досліджень широко використовують можливість сучасної обчислювальної техніки та методи комп'ютерного моделювання реальних процесів. Такий підхід дозволяє встановити більш тісну взаємодію експериментальних та теоретичних досліджень.

В умовах сучасного промислового виробництва велике значення має скорочення матеріальних та часових ресурсів при розробці нових технологій та освоєнні нового сортаменту продукції і нових марок сталей. Для термічної обробки металовиробів ці питання можна вирішити за допомогою сучасних методів моделювання та розрахунків, які при мінімальних витратах часу та матеріальних засобів дозволяють досліджувати різні технологічні процеси, проводити їх розробку та оптимізацію для різних матеріалів.

Ряд видів масового металопрокату має форму, наближену до циліндра великої довжини (арматура, круг, дріт, труби), більшість із них підлягають термічній обробці.

**Постановка задачі.** Розглядаємо суцільний сталевий круговий циліндр радіуса  $R$  та достатньо великої довжини. Матеріал циліндра вважаємо однорідним та ізотропним. В початковий момент часу розігрітий циліндр перенесемо в середовище охолодження. Досліджуємо температурне поле циліндра під час його охолодження. Вважаємо, що температурне поле не змінюється вздовж осі циліндра та є симетричним відносно цієї осі, тобто не залежить від полярного кута.

Математична модель такої фізичної задачі складається із рівняння теплопровідності, записаного в циліндричній системі координат  $(r, \theta, z)$  [1]

$$c(T) \cdot \rho(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \cdot k(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right) + f(r, t), \quad (t > 0, 0 < r < R). \quad (1)$$

Тут  $T(r, t)$  – шукана температура циліндра, яка є функцією лише двох змінних: просторової координати  $r \in [0, R]$  та часу  $t \in [0, t_{\max}]$ , момент часу  $t_{\max}$  фіксується користувачем-дослідником.

До теплофізичних характеристик матеріалу циліндра відносяться:  $c(T)$  – питома теплоємність,  $\rho(T)$  – густина матеріалу,  $k(T)$  – коефіцієнт теплопровідності. Теплофізичні характеристики матеріалу залежать від шуканої температури, але ці залежності для кожного конкретного матеріалу відомі лише у вигляді експериментально побудованих таблиць. При цьому, для одного і того ж матеріалу таблиці цих трьох теплофізичних характеристик відрізняються фіксованими значеннями температури.

Функція  $f(r, t)$  в рівнянні (1) описує щільність теплових джерел в циліндрі і вважається відомою аналітично.

До диференціального рівняння (1) беремо такі додаткові умови:

$$T(r, 0) = \varphi(r), \quad r \in [0, R]. \quad (2)$$

$$T(R, t) = T_{\text{нов}}(t), \quad t \in [0, t_{\max}]. \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0; \quad T(0, t) \neq \infty. \quad (4)$$

В початковій умові (2) відома аналітично функція  $\varphi(r)$  описує температуру циліндра в початковий момент часу  $t = 0$ .

В крайовій умові (3) функція  $T_{\text{нов}}(t)$  описує зміну за часом температури на боковій поверхні циліндра під час його охолодження. Ця функція змінюється не лише за часом, але також залежить від фізичних властивостей матеріалу циліндра та від температури середовища, в якому відбувається охолодження. Оскільки теплофізичні характеристики матеріалу зафіксовані лише у вигляді таблиць, то аналітичний вигляд функції  $T_{\text{нов}}(t)$  потрібно побудувати.

Умови (4) впливають із симетричності температурного поля відносно осі циліндра.

Початкова і крайові умови повинні бути узгодженими між собою в точках  $(r = 0; t = 0)$ ,  $(r = R; t = 0)$ . Це означає, що повинні виконуватися такі умови:

$$\varphi(R) = T_{\text{нов}}(0), \quad \left. \frac{\partial \varphi(r)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0. \quad (5)$$

Шукаємо функцію  $T(r, t)$  в області:  $r \in [0, R]$ ,  $t \in [0, t_{\max}]$ .

Перш ніж застосовувати чисельний метод до розв'язування задачі (1) – (5) потрібно тим функціям, які відомі лише у вигляді таблиць, надати аналітич-

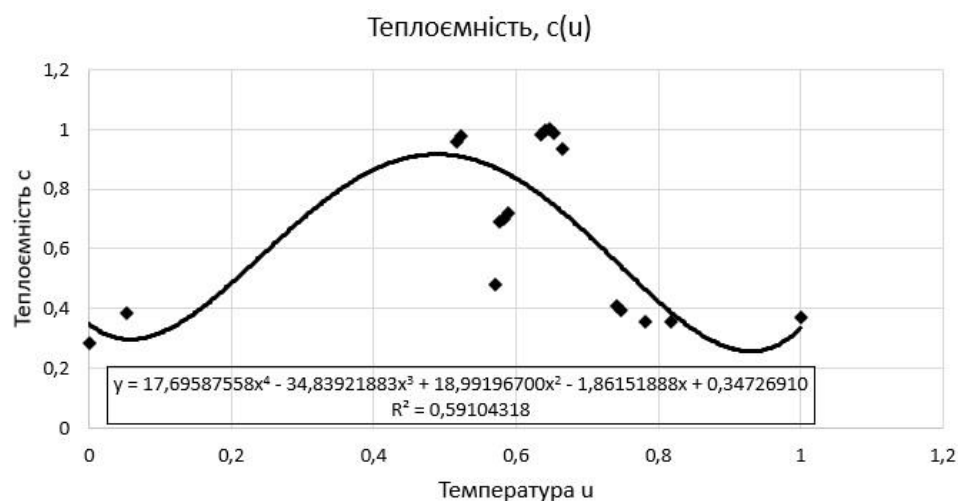
ного вигляду. Це дозволить обчислюватися значення цих відомих параметрів задачі у будь-якій точці області визначення шуканої функції  $T(r, t)$ .

**Алгоритм методу розв'язування задачі передбачає виконання таких кроків.**

1. Використовуючи відомі експериментальні дані для теплофізичних параметрів рівняння (1) і застосувавши метод середньоквадратичного наближення функцій, були побудовані аналітичні вирази для теплофізичних параметрів рівняння (1). Після виконання цього кроку алгоритму коефіцієнти  $c(T)$ ,  $\rho(T)$ ,  $k(T)$  в диференціальному рівнянні (1) стають відомими в аналітичному вигляді. Графіки цих коефіцієнтів для випадку безрозмірного варіанта задачі показані на рис. 1, 2, 3. Маркери на рисунках вказують на табличні значення цих коефіцієнтів.

Аналогічно, спираючись на експериментальні дані роботи [2], була побудована функція  $T_{нов}(t)$  крайової умови (3), яка описує процес охолодження бокової поверхні циліндра.

2. На другому кроці алгоритму диференціальне рівняння (1) та додаткові умови (2), (3), (4), (5) зведені до безрозмірного варіанта. Перехід виконано за рекомендаціями роботи [1].



**Рис. 1.** Апроксимація коефіцієнта питомої теплоємності

3. До безрозмірної задачі застосовано метод сіток з використанням явної різницевої схеми [1]. Був розроблений тестовий приклад, який дозволив встановити залежність між кроками по просторовій та часовій координатах, яка забезпечує стійкість явної різницевої схеми.

4. За рекомендаціями науковців ІЧМ був сформульований реальний приклад задачі (1) – (5). Приклад був переведений до безрозмірного варіанта, виконано розрахунок і результати переведені на розмірний (зручний для користувачів) варіант. За бажанням користувачів розроблена програма дозволяє подавати результати у вигляді таблиць, графіків, або виконати візуалізацію температурного поля.

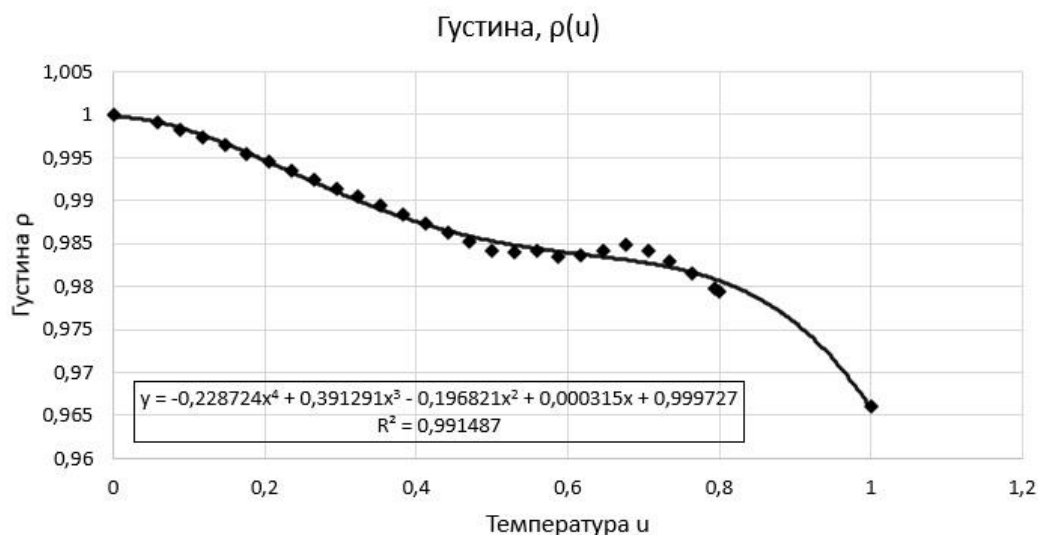


Рис. 2. Апроксимація коефіцієнта густини матеріалу

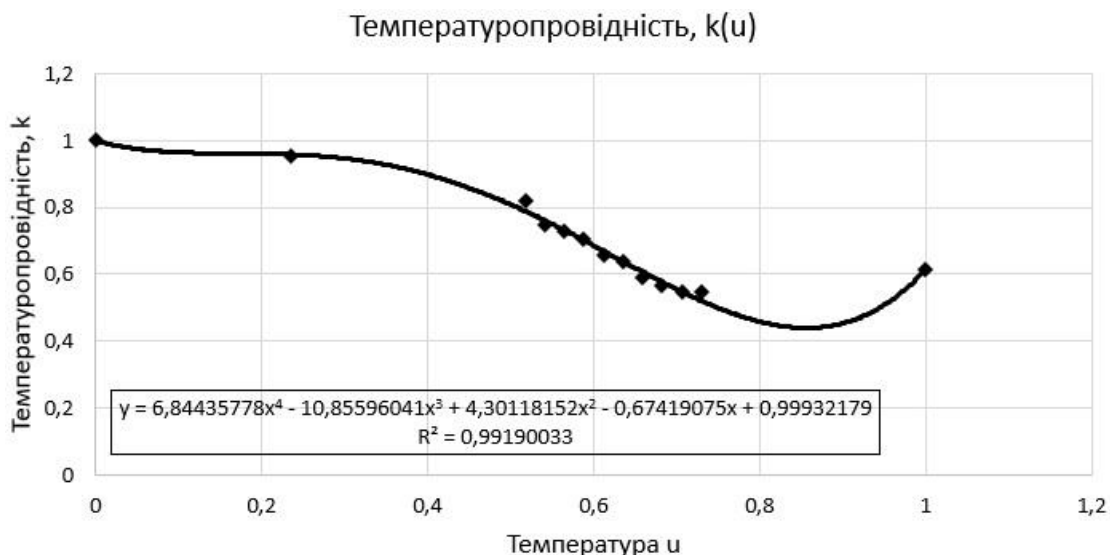


Рис. 3. Апроксимація коефіцієнта температуропровідності

**Опис розробленого програмного продукту.** Була створена програма, яке демонструє розподіл температури всередині циліндра по ізотермах і зміну цього розподілу із плином часу.

На рис. 4 показано головний екран програми. У правій частині екрану можна задати параметри охолодження, а саме: радіус циліндра, який охолоджується, час, протягом якого буде проходити охолодження, та кількість розбиттів по просторовій координаті.

Після запуску охолодження (після натискання на кнопку «Почати охолодження») розраховується температура у табличному вигляді у безрозмірних змінних та відбувається перехід до розмірних змінних. З'являється можливість побачити ці результати на вкладках «Розмірний результат» та «Безрозмірний результат» (рис. 6 та рис. 7 відповідно). Саме на результатах у розмірних змінних відбувається візуалізація процесу охолодження циліндра.

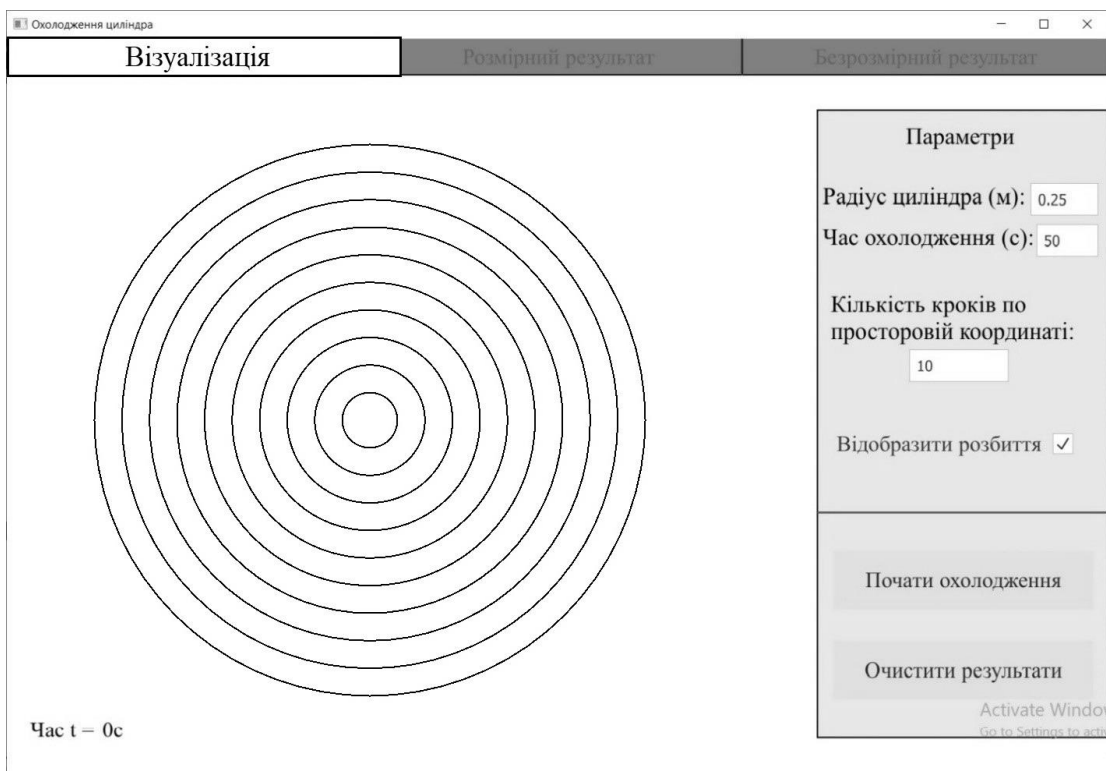


Рис. 4. Головний екран програми з візуалізацією

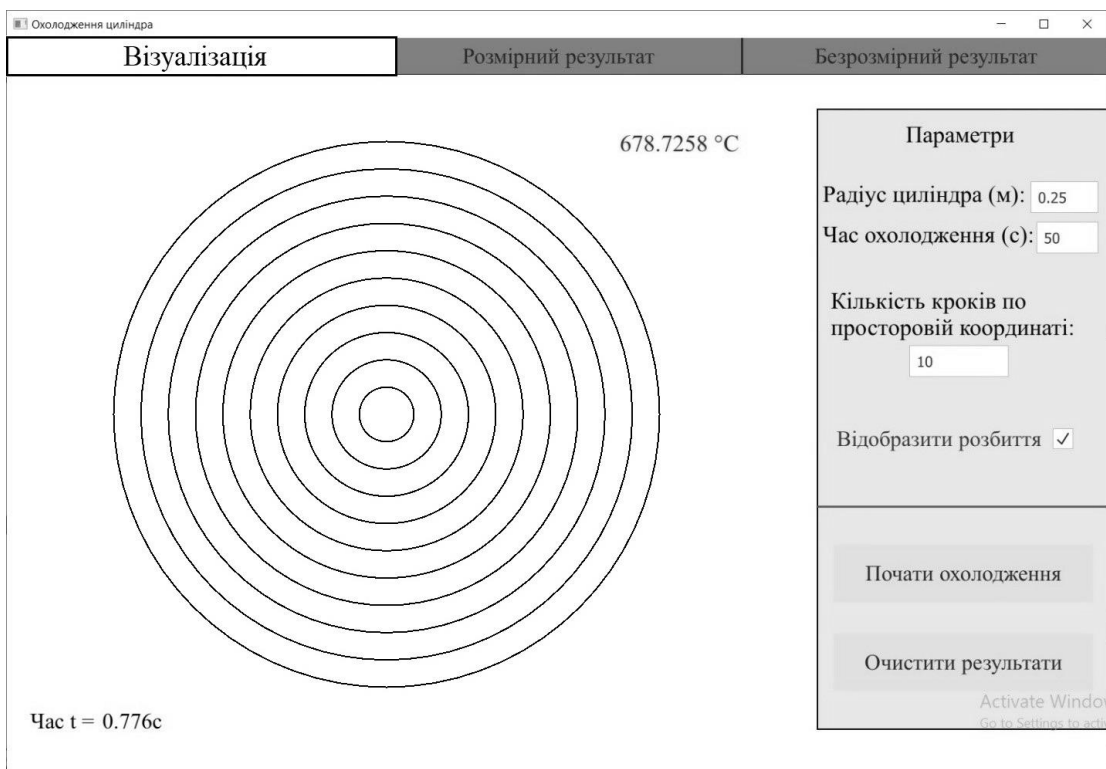


Рис. 5. Візуалізація процесу охолодження

Охолодження циліндра

Візуалізація		Розмірний результат										Безрозмірний
Час(с) / Радіус(м)	0.0	0.0025	0.005	0.0075	0.01	0.0125	0.015	0.0174	0.02	0.0225	0.0249	
0	850	850	850	850	850	850	850	850	850	850	850	
0.0369	850	850	850	850	850	850	850	850	850	850	771.3724	
0.0739	850	850	850	850	850	850	850	850	850	847.0185	680.087	
0.1108	850	850	850	850	850	850	850	850	849.8797	840.6939	631.9789	
0.1478	850	850	850	850	850	850	850	849.9951	849.5166	832.5594	598.1053	
0.1847	850	850	850	850	850	850	849.9998	849.9759	848.8612	823.1615	570.8027	
0.2217	850	850	850	850	850	849.9999	849.9988	849.9318	847.8892	812.8383	547.4064	
0.2586	850	850	850	850	849.9999	849.9999	849.9961	849.852	846.5889	801.9081	526.643	
0.2956	850	850	850	849.9999	849.9999	849.9997	849.9904	849.7261	844.9595	790.7006	507.793	
0.3325	850	850	849.9999	849.9999	849.9999	849.9994	849.9801	849.5447	843.0094	779.5316	490.4056	
0.3695	850	849.9999	849.9999	849.9999	849.9999	849.9986	849.9633	849.2992	840.7559	768.6559	474.177	
0.4064	850	849.9999	849.9999	849.9999	849.9999	849.9972	849.9378	848.9825	838.2236	758.2381	458.9919	
0.4434	850	849.9999	849.9999	849.9999	849.9998	849.9949	849.9016	848.5889	835.4407	748.3532	444.3912	
0.4804	850	849.9999	849.9999	849.9999	849.9996	849.9914	849.8523	848.1141	832.4373	739.0109	430.5536	
0.5173	850	849.9999	849.9999	849.9999	849.9993	849.9861	849.7876	847.5552	829.2434	730.1815	417.2846	
0.5543	850	849.9999	849.9999	849.9999	849.9987	849.9786	849.7054	846.9107	825.8874	721.8178	404.5083	
0.5912	850	849.9999	849.9999	849.9999	849.998	849.9683	849.6035	846.1799	822.3963	713.8676	392.1633	
0.6282	850	849.9999	849.9998	849.9998	849.9969	849.9548	849.48	845.3631	818.7951	706.2803	380.199	
0.6651	850	849.9999	849.9999	849.9997	849.9953	849.9372	849.3329	844.4615	815.1068	699.0101	368.5732	
0.7021	850	849.9999	849.9999	849.9995	849.9931	849.9151	849.1607	843.4768	811.3529	692.0166	357.25	
0.739	850	849.9999	849.9999	849.9993	849.9902	849.8878	848.9617	842.4114	807.5528	685.265	346.1994	
0.776	850	849.9999	849.9999	849.9989	849.9864	849.8544	848.7348	841.268	803.7241	678.7258	335.3952	
0.8129	850	849.9999	849.9998	849.9985	849.9816	849.8145	848.4786	840.0497	799.8824	672.3736	324.8153	
0.8499	850	849.9999	849.9998	849.9978	849.9755	849.7672	848.1924	838.7602	796.0416	666.1866	314.4404	
0.8869	850	849.9999	849.9997	849.997	849.968	849.7119	847.8753	837.4032	792.2133	660.1465	304.2539	
0.9238	850	849.9999	849.9996	849.9959	849.9588	849.648	847.5267	835.9825	788.4074	654.2375	294.2415	
0.9608	850	849.9999	849.9995	849.9946	849.9477	849.5747	847.1462	834.5023	784.6318	648.4459	284.3911	
0.9977	850	849.9998	849.9993	849.9929	849.9345	849.4916	846.7335	832.9668	780.893	642.76	274.6924	

Рис. 6. Результат роботи програми у розмірних змінних

Охолодження циліндра

Візуалізація		Розмірний результат										Безрозмірний
Час / Радіус	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.7999	0.9	0.9999	
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
0.0002	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9074	
0.0004	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9964	0.8001	
0.0006	1	1	1	1	1	1	1	1	0.9998	0.989	0.7435	
0.0008	1	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9994	0.9794	0.7036	
0.001	1	1	1	1	1	1	0.9999	0.9999	0.9986	0.9684	0.6715	
0.0012	1	1	1	1	1	0.9999	0.9999	0.9999	0.9975	0.9562	0.644	
0.0014	1	1	1	1	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9959	0.9434	0.6195	
0.0016	1	1	1	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9996	0.994	0.9302	0.5974	
0.0018	1	1	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9994	0.9917	0.917	0.5769	
0.002	1	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9991	0.9891	0.9043	0.5578	
0.0022	1	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9988	0.9861	0.892	0.5398	
0.0024	1	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9983	0.9828	0.8804	0.5228	
0.0026	1	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9977	0.9793	0.8694	0.5065	
0.0028	1	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9997	0.9971	0.9755	0.859	0.4909	
0.003	1	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9996	0.9963	0.9716	0.8491	0.4758	
0.0032	1	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9995	0.9955	0.9675	0.8398	0.4613	
0.0034	1	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9993	0.9945	0.9632	0.8309	0.4472	
0.0036	1	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9992	0.9934	0.9589	0.8223	0.4336	
0.0038	1	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.999	0.9923	0.9545	0.8141	0.4202	
0.004	1	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9987	0.991	0.95	0.8061	0.4072	
0.0042	1	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9985	0.9897	0.9455	0.7985	0.3945	
0.0044	1	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9997	0.9982	0.9882	0.941	0.791	0.3821	
0.0046	1	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9997	0.9978	0.9867	0.9365	0.7837	0.3699	
0.0047	1	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9996	0.9975	0.9851	0.932	0.7766	0.3579	
0.0049	1	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9995	0.997	0.9835	0.9275	0.7696	0.3461	
0.0051	1	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9994	0.9966	0.9817	0.923	0.7628	0.3345	
0.0053	1	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9994	0.9961	0.9799	0.9186	0.7561	0.3231	

Рис. 7. Результат роботи програми у безрозмірних змінних

Ізотерми, показані на рисунку 5, змінюють свій колір відповідно до температури у даний момент часу, час можна побачити у лівій нижній частині вікна програми. Колір ізотерм змінюється від червоного (максимальна початкова температура) до синього кольору (температура зовнішнього середовища). При наведенні курсором миші на ізотерм, у правій верхній частині вікна про-



грами можна побачити температуру на даний момент часу у даній області циліндра.

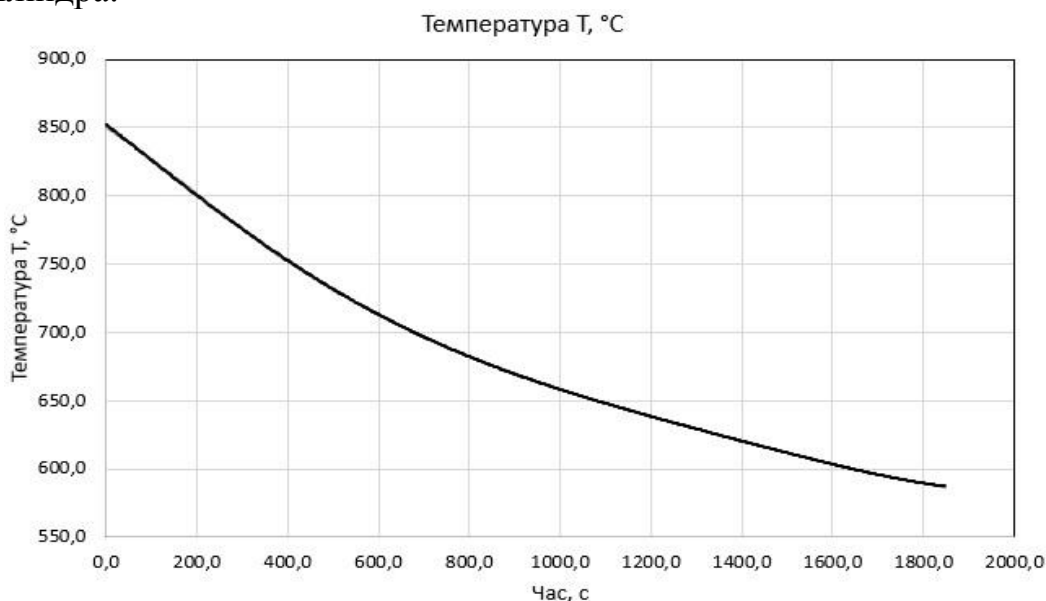


Рис. 8. Графік залежності температури бокової поверхні циліндра від часу

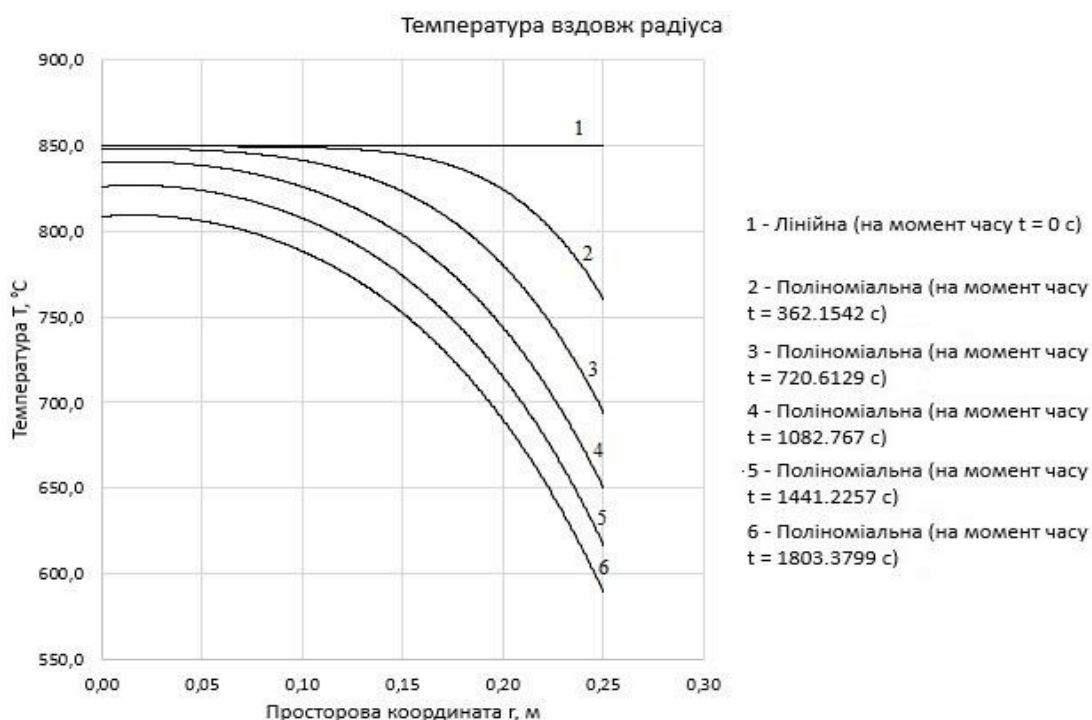


Рис. 9. Графік залежності температури вздовж радіуса циліндра від часу

Для спрощення аналізу результатів програма надає можливість будувати графіки залежності температури бокової поверхні циліндра від часу (рис. 8), та графіки залежності температури вздовж радіуса циліндра (рис. 9).

**Висновки.** Розроблено програмну реалізацію алгоритму розв'язування математичної моделі задачі теплопровідності для розігрітого циліндра під час його охолодження. Програма має зручний для користувача сервіс, який надає можливість проаналізувати процес охолодження циліндра.



Результати роботи можуть бути використані при розробці режимів термічної обробки металопрокату з формами, наближеними до циліндра великої довжини, із сталей з різними теплофізичними властивостями.

Результати роботи програми обговорювалися на конференціях [3, 4, 5].

#### Бібліографічні посилання

1. Самарский, А. А. Вычислительная теплопередача [Текст] / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 784 с.
2. Охлаждающие среды // Информационный некоммерческий ресурс metal-archive.ru. Дата оновлення: 20.01.2015. URL: [http:// metal-archive.ru/obrabotka-cvetnyh-metallov / 602-ohlazhdayuschie-sredy.html#](http://metal-archive.ru/obrabotka-cvetnyh-metallov/602-ohlazhdayuschie-sredy.html#) (дата звернення: 05.11.2019).
3. Попов, І. В. Розробка програмного продукту для розв'язування одновимірного квазілінійного рівняння теплопровідності [Текст] / І. В. Попов, Л. Т. Бойко // Всеукраїнська науково-технічна конференція «Наука і металургія» присвячена 80-річчю Інституту чорної металургії ім. З.І. Некрасова НАНУ / Тези доповідей. 9-10 жовтня, Дніпро, 2019. – 50 с. С. 28-29.
4. Попов, І. В. Software implementation of the algorithm for solving the one-dimensional quasi-linear heat conduction equation. [Текст] / I.V. Popov, L.T. Boyko // Тези доповіді. XVII міжнародна науково-практична конференція «Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем» (МПЗІС-2019) / Дніпро, 20-22 листопада 2019 р.– 308 с. – С. 211-212.
5. Бабаченко, О.І. Реальний варіант одновимірної задачі теплопровідності для суцільного необмеженого сталевго циліндра [Текст] / О.І. Бабаченко, Л.Т. Бойко, Г.А. Кононенко // Матеріали міжнародної науково-технічної конференції «Інформаційні технології в металургії та машинобудуванні» імені професора Михальова О.І. (ІТММ'2020), 17-19 березня 2020 р. Дніпро / Д.: НМетАУ, 2020. – 501 с. С. 73 – 76.

Надійшла до редколегії 10.09. 2020.