УДК 512.562; 519.17

В. Я. Бурдюк, І. В. Бурдюк
Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

ПРО ДУАЛЬНІ АВТОМОРФІЗМИ

Досліджуються характеризація та поведінка дуальних автоморфізмів скінченних орієнтованих графів. Сформульовано проблему.

Исследуется характеризация и поведение двойственных автоморфизмов конечных ориентированных графов. Сформулирована проблема.

Characterization and behavior of dual automorphizms of finite oriented graphs are investigated. The problem was formulated.

Ключові слова: простір, бінарне відношення, орграф, дуальний автоморфізм, група.

Вступ. Розглядаємо багатоточковий простір (X,R) непорожнього бінарного відношення $R \subseteq X^2$, або ж орграф (X,R), в якому для множини вершин виконується $|X| \geq 2$, а для множини дуг – $|R| \geq 1$. Якщо $(a,b) \in R$, то пишемо aRb, а також $bR^{-1}a$.

Дуальним автоморфізмом простору (X,R) називають кожну таку бієкцію $f : X \to X$, яка має властивість

$$\forall a,b \in X\left(aRb \Leftrightarrow f(a)R^{-1}f(b)\right). \qquad (1)$$

Якщо ж бієкція f має властивість $(aRb \Leftrightarrow f(a)Rf(b))$ при будь-яких значеннях $a,b \in X$, то її називають *автоморфізмом* простору (X,R). Отже, автоморфізм f перейменовує вершини оргафу (X,R) так, щоб кожній дузі $(a,b) \in R$ відповідала, причому взаємно однозначно, дуга $(f(a), f(b)) \in R$; в той же час дуальний автоморфізм f, якщо він існує, перейменовує вершини оргафа (X,R) так, щоб кожній дузі $(a,b) \in R$ взаємно однозначно відповідала дуга $(f(b), f(a)) \in R$. Нехай $Aut(X,R)$ та $Tua(X,R)$ – класи всіх автоморфізмів та, відповідно, дуальних автоморфізмів простору (X,R). Відомо, що $Aut(X,R)$ для кожного орграфа (X,R) – це *група* з бінарною операцією композиції бієкцій, з унарною операцією зворотньої бієкції $f \to f^{-1}$ та нульарною операцією тотожньої бієкції id_X. Але клас $Tua(X,R)$ може бути порожнім, а в непорожньому $Tua(X,R)$ – не завжди присутня бієкція id_X.

Дослідженням класу $Aut(X,R)$ присвячено [4 та 5], а класу $Tua(X,\leq)$ [2 та 3].

Постановка задачі. Дослідити характеризацію та поведінку класу $Tua(X,R)$ для довільних R, а також для транзитивних R.

Характеризація дуальних автоморфізмів; приклади

Теорема 1. *Клас $Tua(X,R)$ для даного R буде непорожнім, якщо і тільки якщо R та R^{-1} є ізоморфними бінарними відношеннями.*

Доведення. Твердження «клас $Tua(X,R)$ є непорожнім» означає, що існує бієкція f з властивістю (1). Але ж бієкція f з такою властивістю є ізоморфним відображенням просторів (X,R) та (X,R^{-1}). Це означає, що R та R^{-1} є ізоморфними бінарними відношеннями. Кінець.

Отже, орграф (X,R) має дуальні автоморфізми, якщо і тільки якщо він є ізоморфним оберненому орграфу (X,R^{-1}) (див. $[7, c.234]$).

Теорема 2. *Для кожної бієкції $f : X \to X$ і для кожного відношення $R \subseteq X^2$ такі два твердження є логічно еквівалентні:*

1) $f \in Tua(X,R)$;

2) f є ізоморфізмом просторів (X,R) та (X,R^{-1}).

Доведення. Нехай виконується 1). Це означає, що бієкція f має влас-тивість (1), а отже, бієкція f є ізоморфним відображенням просторів (X, R) та (X, R^{-1}). Отже, маємо 1) $\Longrightarrow$ 2).

Навпаки, бієкції f з властивістю 2) є, за означенням, дуальним автоморфізмом простору (X, R), і тому маємо 2) $\Longrightarrow$ 1).

Приклад 1. Для $X = \{1, 2, \dots, n\}$, де $n \geq 2$, нехай $R = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)\}$, а тому (X, R) -- це орієнтований шлях. Тоді (X, R^{-1}) – також орієнтований шлях. Маємо ізоморфні відношення R та R^{-1}, причому існує лише один ізоморфізм f орграфу (X, R) на орграф (X, R^{-1}), а саме: $f(j) = n + 1 - j$ для $j = 1, 2, \dots, n$. Звідси отримуємо $|Tua(X, R)| = 1$. Між іншим, $|Aut(X, R)| = 1$, причому $Aut(X, R) = \{id_X\}$.

Приклад 2. Для $X = \{1, 2, \dots, n\}$, де $n \geq 2$, нехай $R = \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n), (n, 1)\}$, а тому (X, R) – це орієнтований цикл. Тоді (X, R^{-1}) – також орієнтований цикл. Маємо ізоморфні відношення R та R^{-1}, причому у випадку $n = 2$ виконується $R = R^{-1}$. За теоремою 1, клас $Tua(X, R)$ є непорожнім. Покажемо, що $|Tua(X, R)| = |Aut(X, R)| = n$. Для кожного $i \in X$ будуємо бієкцію $f_i : X \to X$, а саме: $f_i(1) = i$, $f_i(2) = i + 1$, … , $f_i(i) = n$, $f_i(i+1) = 1$, … , $f_i(n) = i - 1$. Бачимо, що бієкція f_i перейменовує вершини орцикла (X, R) так, що по цьому орциклу відбувається рух у напрямку $i \to i+1 \to \dots \to n \to 1 \to \dots \to i-1 \to i$, і тому бієкція f_i є автоморфізмом. Тож отримуємо $|Aut(X, R)| = n$. Дуальний автоморфізм $g : X \to X$ повинен перейменовувати вершини орцикла (X, R) так, що, починаючи з вершини $g(1)$, рух по орциклу (X, R) повинен здійснюватись у зворотному напрямку, тобто проти орієнтації дуг, тож якщо $g_i(1) = i$ для $i \in X$, то $g_i(2) = i - 1$, $g_i(3) = i - 2$, …, $g_i(i) = 1$, $g_i(i+1) = n$, … , $g_i(n) = i + 1$, тож $|Tua(X, R)| = n$.

Для кожної вершини $x_1 \in X$ орграфа (X, R) визначаємо, як і в $[6, c.314]$, множини $D(x_1)$ та $D^{-1}(x_1)$ за такими правилами:

1) $x_1 \in D(x_1) \cap D^{-1}(x_1)$; 2) для кожної послідовності x_1, x_2, … , x_n попарно неоднакових вершин орграфу (X, R) повинно виконуватись: a) $x_n \in D(x_1)$ у випадку $\forall i \ (x_i \ R \ x_{i+1})$;

b) $x_n \in D^{-1}(x_1)$ у випадку $\forall i \ (x_i \ R^{-1} \ x_{i+1})$.

Отже, множина $D(x_1)$ складається із вершини $x_1 \in X$ та із всіх тих вершин x_n, кожну з яких можна досягути із вершини x_1, рухаючись по дугам (x_1, x_2), … , (x_{n-1}, x_n) орграфу (X, R). Аналогічно, множина $D^{-1}(x_1)$ складається із вершини $x_1 \in X$ та із всіх тих вершин x_n, з яких можна досягнути вершини x_1, рухаючись по дугам (x_n, x_{n-1}), … , (x_2, x_1) орграфу (X, R).

Приклад 3. Розглянемо $X = \{a_1, \dots, a_k, b, c_1, \dots, c_k\}$ та $R = \{(a_1, b), \dots, (a_k, b), (b, c_1), \dots, (b, c_k)\}$, тож орграф (X, R) має: вершин $2k + 1$, дуг $2k$, $D(b) = \{b, c_1, \dots, c_k\}$, $D^{-1}(b) = \{b, a_1, \dots, a_k\}$. Покажемо, що виконується таке:

$$|Tua(X, R)| = |Aut(X, R)| = (k!)^2.$$

Дійсно, відношення R та R^{-1} є ізоморфні, тож клас $Tua(X, R)$ є непорожнім. Для елемента $f \in Tua(X, R)$ з цього класу повинно виконуватись $f(b) = b$, і тому для вершини $a_i \in X$ повинно виконуватись $f(a_i) = c_j$, тож отримуємо $k!$ варіантів для побудови $f \in Tua(X, R)$. Незалежно від цього для вершини $c_i \in X$ повинно виконуватись $f(c_i) = a_j$, тож отримуємо $k! \times k!$ варіантів для побудови $f \in Tua(X, R)$. Для автоморфізму f також повинно виконуватись $f(b) = b$, але для вершини $a_i \in X$ повинно виконуватись $f(a_i) = c_j$, тож отримуємо $k!$ варіантів для побудови автоморфізму f. Незалежно від цього для вершини $c_i \in X$ повинно виконуватись $f(c_i) = c_j$, і тому отримуємо $k! \times k!$ варіантів для побудови $f \in Aut(X, R)$.

Теорема 3. *Якщо виконується твердження А:* $f \in Tua(X, R)$, *то для кожної точки* $x \in X$ *буде виконуватись і твердження В:* $f(D(x)) = D^{-1}(f(x)) \wedge f(D^{-1}(x)) = D^{-1}(f(x))$, *а якщо відношення* R *– транзитивне, то А та В логічно еквівалентні.*

Доведення. Маємо $f(D(x_1)) = \{f(x) : x \in D(x_1)\}$. Звідси та з твердження А випливає, що множина $f(D(x_1))$ складається з вершини $f(x_1)$ та всіх тих вершин $f(x_n)$, для яких існує послідовність $x_1, x_2, \ldots, x_n$ попарно неоднакових вершин орграфу (X, R) таких, що $x_1 R x_2 \wedge x_2 R x_3 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} R x_n$, тож

$$f(x_1) R^{-1} f(x_2) \wedge \ldots \wedge f(x_{n-1}) R^{-1} f(x_n). \qquad (*)$$

З іншого боку, множина $D^{-1}(f(x_1))$ складається з вершини $f(x_1)$ та всіх тих вершин $f(x_n)$, з кожної з яких можна досягнути вершини $f(x_1)$, йдучи за дугами $(f(x_n), f(x_{n-1}))$, … , $(f(x_2), f(x_1))$, тобто для яких виконується співвідношення (*). Бачимо, що має місце рівність $f(D(x_1)) = D^{-1}(f(x_1))$. Аналогічно перевіряється рівність $f(D^{-1}(x_1)) = D(f(x_1))$. Отже, отримали потрібне: якщо А, то В. Нехай тепер відношення R – транзитивне. Потрібно довести, що із В випливає А. З істинності твердження В та виконання aRb отримуємо $b \in D(a)$ та $f(b) \in f(D(a))$, і тому $f(b) \in D^{-1}(f(a))$, адже $f(D(a)) = D^{-1}(f(a))$. Тепер з $f(b) \in D^{-1}(f(a))$ маємо: з вершини $f(b)$ орграфу (X, R) можна досягнути вершини $f(a)$, йдучи за дугами (x_n, x_{n-1}), … , (x_2, x_1) орграфу (X, R), де $x_n = f(b)$ та $x_1 = f(a)$. Звідси, застосувавши транзитивність відношення R, отримуємо: існує дуга $(f(b), f(a))$ орграфу (X, R), і тому $f(a) R^{-1} f(b)$. Таким чином, якщо aRb, то $f(a) R^{-1} f(b)$. Якщо ж $f(a) R^{-1} f(b)$, то $f(b) \in D^{-1}(f(a))$, а отже, $f(b) \in f(D(a))$, і тому $f^{-1}(f(b)) \in f^{-1}(f(D(a)))$, тобто $b \in D(a)$. Останнє означає, що з вершини $a \in X$ орграфу (X, R) можна досягнути вершину $b \in X$, йдучи за дугами (a_1, a_2), … , (a_{n-1}, a_n), де $a_1 = a$ та $a_n = b$. Тепер, застосувавши транзитивність відношення R, отримуємо: орграф (X, R) має дугу (a, b). Отже, із $f(a) R^{-1} f(b)$ випливає aRb. Висновок: якщо R – транзитивне відношення, то з твердження В випливає твердження А, тож А та В логічно еквівалентні.

Приклад 4. Для $k \geq 2$ нехай $X = \{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k\}$ та $R = \{(a_i, b_j) : 1 \leq i, j \leq k\}$. Тоді (X, R) та (X, R^{-1}) -- ізоморфні простори, причому їх ізоморфізмами будуть всі такі бієкції $f : X \to X$, що $f(a_i) = b_j \wedge f(b_j) = a_k$, і тому маємо $|Tua(X, R)| = (k!)^2 = ((n/2)!)^2$, де $n = 2k$.

Приклад 5. Для $n \geq 3$ нехай $X = \{a, b_1, \ldots, b_{n=2}, c\}$ та $R = \{(a, b_1), \ldots, (a, b_{n-2}), (b_1, c), \ldots, (b_{n-2}, c)\}$. Тоді простори (X, R) та (X, R^{-1}) -- ізоморфні, причому їх ізоморфізмами будуть всі такі бієкції $f : X \to X$, що $f(a) = c \wedge f(c) = a$, але $f(b_i) = b_j$ для всіх i та j, тож $|Tua(X, R)| = (n-2)!$.

Дуальні автоморфізми скінченних упорядкованих просторів

Рефлексивне, антисиметричне і транзитивне бінарне відношення позначають $\leq$, а простір $(X, \leq)$ називають у-простором, тобто упорядкованим простором. Для кожної точки a у-простору $(X, \leq)$ визначають (див. $[1]$) верхній та нижній напівконуси $a^{\vee} = \{x \in X : a \leq x\}$ та $a^{\wedge} = \{x \in X : x \leq a\}$. Маємо $a^{\vee} = D(a)$, $a^{\wedge} = D^{-1}(a)$.

Теорема 4 ($[2]$). *Для кожної бієкції* $f : X \to X$ *і для кожного у-простору* $(X, \leq)$ *такі два твердження є логічно еквівалентні:*

1) $f \in Tua(X, \leq)$;

2) $\forall a \in X \;\; f\left(a^{\vee}\right) = \left(f(a)\right)^{\wedge} \wedge f\left(a^{\wedge}\right) = \left(f(a)\right)^{\vee}$.

Доведення. Відношення $\leq$ є транзитивним, а тому, використовуючи теорему 3 і співвідношення $a^{\vee} = D(a)$ та $a^{\wedge} = D^{-1}(a)$, отримуємо теорему 4. Кінець.

Для n-вершинного орграфу (X, R) маємо $|Tua(X, R)| \leq n\,!$, причому $|Aut(X, =)| = |Tua(X, =)| = n\,!$, адже у $(X, =)$ присутні лише петлі, і тому кожна бієкція $f : X \to X$ буде і автоморфізмом, і дуальним автоморфізмом простору $(X, =)$. Отже, має місце

Теорема 5. *На класі n-точкових у-просторів з ізольованими точками максимльна кількість дуальних автоморфізмів дорівнює $n\,!$, і ця кількість реалізується на просторі $(X, =)$.*

Теорема 6 ([2]). *На n-точкових у-просторах ($n \geq 3$) без ізольованих точок максимльну кількість дуальних автоморфізмів мають:*

a) *у випадку $n \neq 4$ та $n \neq 6$ – у-простори з діаграмою Хассе з прикладу 5, і ця кількість дорівнює $(n-2)!$;*

b) *у випадку $n = 4$ та $n = 6$ – у-простори з діаграмою Хассе з прикладу 4, і ця кількість дорівнює $((n/2)!)^2$.*

Доведення цієї теореми є у роботі $[2]$, але воно занадто ускладнене, тож пропонуємо бажаючим побудувати більш просте доведення.

Теорема 7 ($[3]$). *Якщо $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, n > 1$, то*

$$\left|Aut\left(2^X, \subseteq\right)\right| = \left|Tua\left(2^X, \subseteq\right)\right| = |X|!.$$

Доведення. Для елементів $x_1, x_2, \ldots, x_j \in X$ виконується

$$\{x_1\} \subset \{x_1, x_2\} \subset \ldots \subset \{x_1, x_2, \ldots, x_j\} \subset \ldots \subset X \;. \quad (2)$$

Якщо бієкція f – автоморфізм простору $\left(2^X, \subseteq\right)$, то з (2) отримуємо $f(\{x_1\}) \subset f(\{x_1, x_2\}) \subset \ldots \subset f(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\})$. Звідси маємо $\left|f\left(x_1, x_2, \ldots, x_j\right)\right| = j$ для кожного $j = 1, 2, \ldots, n$. Отже, при автоморфізмі f образом довільної одноелементної множини $\{x_1\}$ є одноелементна множина $f(\{x_1\})$. Для двоелементної множини $f(\{x_1, x_2\})$ маємо $f(\{x_1\}) \subset f(\{x_1, x_2\})$, а також $f(\{x_2\}) \subset f(\{x_1, x_2\})$. Звідси, враховуючи, що $x_1 \neq x_2$, отримуємо $f(\{x_1, x_2\}) = f(\{x_1\}) \cup f(\{x_2\})$. Маємо аналогічно: $f(\{x_1, \ldots, x_j\}) = f(\{x_1\}) \cup \ldots \cup f(\{x_j\})$. Отже, автоморфізм f однозначно визначається своїми значеннями $f(\{x_i\})$ для елементів $x_i \in X$, а тому кількість автоморфізмів дорівнює $n\,!$.

Зрозуміло, що простори $\left(2^X, \subseteq\right)$ та $\left(2^X, \supseteq\right)$ є ізоморфними, а тому, за теоремою 2, простір $\left(2^X, \subseteq\right)$ має дуальні автоморфізми, тож для дуального автоморфізму g цього простору із (2) отримаємо

$$g(\{x_1\}) \supset g(\{x_1, x_2\}) \supset \ldots \supset g(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

а також $g(\{x_2\}) \supset g(\{x_1, x_2\})$, причому для $i = 1, 2, \ldots, n$ маємо $|g(x_1, x_2, \ldots, x_i)| = n - i$. Звідси маємо $g(\{x_1, x_2\}) = g(\{x_1\}) \cap g(\{x_2\})$. І взагалі,

$$g(\{x_1, \ldots, x_j\}) = g(\{x_1\}) \cap \ldots \cap g(\{x_j\}).$$

Отже, дуальний автоморфізм g однозначно визначається своїми значеннями $g(\{x_i\}) = X - \{x_k\}$ для елементів $x_i, x_k \in X$, а тому кількість дуальних автоморфізмів дорівнює $n\,!$.

Аналіз одержаних результатів. Усі одержані результати щодо кількості дуальних автоморфізмів скінченних орграфів підтверджують **таку гіпотезу:** якщо скінченний орграф має дуальні автоморфізми, то їх кількість є такою ж, як і кількість автоморфізмів. **Проблема** полягає у доведенні сформульованої гіпотези.

Бібліографічні посилання

1. **Бурдюк В. Я.** Простори дискретної математики: Монографія / В.Я. Бурдюк. – Дніпропетровськ, 2008. – 156 с.

2. **Бурдюк В. Я.** Конечные частично упорядоченные множества с максимальным числом дуальных автоморфизмов / В. Я. Бурдюк, И. В. Бурдюк – М., деп. Рук. 7497 – В89 от 19.12.1989. – 9 с.
3. **Бурдюк В. Я.** О дуальных изоморфизмах упорядоченных множеств / В. Я. Бурдюк, Г. А. Коцюба // Решение прикл. задач матем. физики и дискр. матем.: сб. научн. тр.. – Днепропетровск, 1987. – С. 40 – 42.
4. **Великович Л. Л.** Структура графа, определяемая группой автоморфизмов: дисс. … канд. физ.-мат. наук /Л.Л. Великович. – Гомель, 1989. – 131 с.
5. **Давыдов Э. Г.** О конечных графах и их автоморфизмах /Э.Г. Давыдов // Проблемы кибернетики. – М., 1966. -- № 17. – С. 27 – 39.
6. **Зыков А. А.** Теория графов /А.А. Зыков. – М., 1987. – 384 с.
7. **Харари Ф.** Теория графов /Ф. Харари. – М., 1973. – 304 с.

Надійшла до редколегії 17.04.2012