УДК 532.516 doi: 10.15421/321917

І.С. Тонкошкур, К.В. Калініченко
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

МОДЕЛЮВАННЯ ГРАВІТАЦІЙНИХ ТЕЧІЙ В'ЯЗКОПЛАСТИЧНОЇ РІДИНИ ПО КОНІЧНІЙ ПОВЕРХНІ

Розглянуто задачу про плівкову течію в'язкопластичної рідини по поверхні конуса з довільним гладким поперечним перерізом під дією сили тяжіння. За допомогою метода малого параметра одержано наближений розв'язок рівнянь динаміки рідкої плівки по конічній поверхні.

Ключові слова: рідка плівка, метод малого параметра, конічна поверхня, в'язкопластична рідина.

Рассмотрена задача о пленочном течении вязкопластической жидкости по поверхности конуса с произвольным гладким поперечным сечением под действием силы тяжести. С помощью метода малого параметра получено приближенное решение уравнений динамики жидкой пленки по конической поверхности.

Ключевые слова: жидкая пленка, метод малого параметра, коническая поверхность, вязкопластичные жидкость.

The problem of a stationary waveless gravitational flow of a viscoplastic fluid over the surface of a cone with an arbitrary smooth cross section is considered. It is assumed that the axis of the body is located at a certain angle to the vertical, and the film of liquid flows down from its top. A curvilinear orthogonal coordinate system (ξ, η, ζ) associated with the body surface is introduced: ξ is the coordinate along the generatrix of the body, η is the polar angle in the plane perpendicular to the axis of the body of revolution, ζ is the distance along the normal to the surface.

To describe the flow of a liquid film, a viscous incompressible fluid model is used, which is based on partial differential equations - the equations of motion and continuity. The following boundary conditions are used: sticking conditions on the solid surface; on the surface separating liquid and gas, the conditions for continuity of stresses and normal component of the velocity vector. To close the system of differential equations, the Shvedov-Bingham rheological model is used.

To simplify the system of differential equations, the small parameter method is used. The small parameter is the relative film thickness. It is assumed that the generalized Reynolds number has an order equal to one. The solution of the equations of continuity and motion (taking into account the principal terms of the expansion) was obtained in an analytical form. The obtained formulas for the components of the velocity and pressure vector generalize the known relations for flat surfaces. To determine the unknown film thickness, an initial-boundary value problem was formulated for a first-order partial differential equation. The solution to this problem is found with the help of the finite difference method.

The results of calculations by the proposed method for cones with a cross section in the form of a circle and a square with rounded corners are presented. Calculations show that the plasticity parameter and the cross-sectional shape significantly affect the velocity and distribution profiles of the thickness of the viscous layer over the surface of the body.

Key words: liquid film, small parameter method, conical surface, viscoplastic liquid.

Вступ. Течії неньютоновскіх рідин по твердих поверхнях широко застосовуються в різних технологічних процесах енергетики, металургії, в хімічній, будівельній та інших галузях промисловості. При цьому в технічних пристроях часто реалізуються суттєво тривимірні течії рідини по криволінійним поверхням.

Дослідження просторових течій рідини по твердій поверхні проводились в роботах [1-4]. В [3,4] розглядались течії нелінійно-в'язкої і в'язкопластичної рідини поблизу твердих тіл, що обертаються навколо своєї осі. В роботі [2] проведено чисельне дослідження течій неньютоновскіх рідин у зігнутому каналі. В [1] запропонована методика наближеного розрахунку плівкових течій в'язкопластичної рідини Шведова-Бінгама по поверхні тіла обертання. В даній роботі ця методика поширюється на клас конічних тіл з довільним гладким поперечним перерізом.

Постановка задачі. Розглядається задача про просторову безхвильову стаціонарну течію в'язкопластичної рідини по конічній поверхні під дією сили тяжіння. Припускається, що вісь конуса розташована під деяким кутом до вертикалі, а плівка рідини стікає від його вершини вниз. Введемо криволінійну ортогональну систему координат (ξ, η, ζ), зв'язану з поверхнею тіла: координата ξ відраховується від вершини конуса уздовж твірної, η – полярний кут в площині, перпендикулярній осі тіла обертання, ζ – відстань по нормалі до поверхні. Рівняння поверхні тіла в сферичній системі координат (r, θ, φ) задається у вигляді

$$\theta = \theta(\varphi),$$

де θ – кут між твірною і віссю конуса.

Для опису течії рідкої плівки приймається модель в'язкої нестисливої рідини, що заснована на рівняннях імпульсу і нерозривності. У векторній формі ці рівняння мають вигляд

$$\rho \frac{d\overline{V}}{dt} = -grad\ p + Div\,\overset{=}{\tau} + \rho\overline{g}\,, \tag{1}$$

$$div\,\overline{V} = 0\,, \tag{2}$$

де $\overline{V}$ – вектор швидкості руху рідини, p – тиск, ρ – густина рідини, $\overset{=}{\tau}$ – тензор в'язких напружень, $\overline{g}$ – інтенсивність сили тяжіння.

В якості крайових умов використовуються умова прилипання на поверхні конуса, а також умови неперервності напружень і нормальної складової вектора швидкості – на поверхні, що розділяє рідину і газ.

$$\overline{V} = 0 \qquad \text{при } \zeta = 0, \tag{3}$$

$$\overline{\overline{\tau}}\,\overline{N} - (p - p_0)\overline{N} = 2\sigma\chi\overline{N} + \nabla_\Gamma \sigma, \tag{4}$$

$$\overline{V}\,\overline{N} = 0 \qquad \text{при } \zeta = F. \tag{5}$$

Тут $F = F(\xi,\zeta)$ – рівняння вільної поверхні Γ , p_0 – атмосферний тиск в газі, $\overline{N} = \overline{N}(\xi,\eta)$ – одинична нормаль до Γ, χ – середня кривизна поверхні Γ, σ – коефіцієнт поверхневого натягу, $\nabla_\Gamma \sigma$ – поверхневий градієнт коефіцієнта σ.

Для замикання системи рівнянь (1)-(2) використовується реологічна модель вязкопластичної рідини Шведова-Бінгама [5]:

$$\tau_{ij} = 2\left[\frac{\tau_0}{\sqrt{2I_2}} + \mu_p\right]\dot{e}_{ij} \qquad \text{при } \ |\tau| > \tau_0 \ ,$$

$$\dot{e}_{ij} = 0 \qquad \text{при } \ |\tau| \le \tau_0 \ ,$$

де τ_{ij} – компоненти тензора в’язких напружень $\overset{=}{\tau}$, τ_0 – граничне напруження зсуву, μ_p – коефіцієнт пластичної в’язкості, I_2 – другий інваріант тензора швидкостей деформацій $\dot{e}_{ij}$.

Метод розв'язання. Система диференціальних рівнянь (1)-(2) з крайовими умовами (3)-(5) спрощується за допомогою метода малого параметра, в якості якого обрана відносна товщина плівки $\varepsilon = h_0 / l_0$ (h_0, l_0 – характерні поперечний і поздовжній розміри).

Вводяться безрозмірні змінні за формулами:

$$\xi = \xi' l_0, \quad \eta = \eta', \quad \zeta = \varepsilon l_0 \zeta',$$

$$u = U_0 u', \quad w = U_0 w', \quad v = \varepsilon U_0 v',$$

$$p = \rho U_0^2 p', \quad \sigma = \sigma_0 \sigma', \quad F = \varepsilon l_0 F'.$$

Тут u, w, v – складові вектора швидкості, відповідні координатам (ξ,η,ζ), U_0, σ_0 – характерні значення швидкості руху і коефіцієнта поверхневого натягу. Введемо також допоміжну функцію $P(\xi,\eta,\zeta)$, зв'язану з тиском p співвідношенням:

$$p = p_0 - 2\sigma\chi + \rho U_0^2 P$$

Подамо невідомі функції (складові вектора швидкості і тиск) у вигляді розкладів в ряд по ε

$$A = A^0 + \varepsilon A^1$$

і підставимо їх в систему отриманих рівнянь.

В роботі розглядаються течії рідкої плівки, для яких число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \rho h_0 U_0 / \mu$ має порядок одиниці, тобто ε Re << 1. Враховуючи головні члени розкладань, отримаємо спрощену систему рівнянь (надалі для скорочення запису знак «'» опущений)

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi\psi(\eta)}\frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{1}{\xi}u = 0, \ \frac{\partial P}{\partial \zeta} = \frac{(\overline{en})}{Fr},$$

$$\frac{\partial\tau_{31}}{\partial\zeta}=-\frac{\mathrm{Re}}{Fr}(\overline{e}\overline{e}_1),\quad \frac{\partial\tau_{32}}{\partial\zeta}=-\frac{\mathrm{Re}}{Fr}(\overline{e}\overline{e}_2).$$

Крайові умови:

$$u=w=v=0 \qquad \text{при } \zeta=0,$$

$$\tau_{31}=\tau_{32}=P=0,\ v-u\frac{\partial F}{\partial\xi}-\frac{w}{\xi\psi(\eta)}\frac{\partial F}{\partial\eta}=0 \ \text{ при } \zeta=F.$$

Тут $Fr=U_0^2/(gh_0)$ – число Фруда; $\overline{e}$ – одиничний вектор, що задає напрям дії сили тяжіння; $\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{n}$ – базисні вектори криволінійної системи координат (ξ,η,ζ); g – прискорення вільного падіння. Поверхня $\zeta=F_1(\xi,\eta)$, що розділяє в'язку і пластичну області течії рідини, визначається параметром пластичності $S=\tau_0 h_0/(\mu U_0)$.

Розв’язок задачі (в нульовому наближенні) для складових вектора швидкості має вигляд:

у в'язкій області течії (при $\zeta<F_1$)

$$u=\varphi_1\left[\frac{\zeta^2}{2}-\left(F-\overline{S}\right)\zeta\right],\qquad w=\varphi_2\left[\frac{\zeta^2}{2}-\left(F-\overline{S}\right)\zeta\right],$$

$$v=-\varphi_3\left[\frac{\zeta^3}{6}-\left(F-\overline{S}\right)\frac{\zeta^2}{2}\right]+\left(\varphi_1\frac{\partial F}{\partial\xi}+\frac{\varphi_2}{\xi\psi(\mu)}\frac{\partial F}{\partial\eta}+\overline{S}\varphi_5\right)\frac{\zeta^2}{2},$$

у пластичній області (при $\zeta\ge F_1$)

$$u=-\frac{1}{2}\varphi_1\left(F-\overline{S}\right)^2,\qquad u=-\frac{1}{2}\varphi_1\left(F-\overline{S}\right)^2,$$

$$v=\frac{1}{3}\varphi_3\left(F-\overline{S}\right)^3+\frac{1}{2}\left(\varphi_1\frac{\partial F}{\partial\xi}+\frac{\varphi_2}{\xi\psi(\mu)}\frac{\partial F}{\partial\eta}+\overline{S}\varphi_5\right)\left(F-\overline{S}\right)^2,$$

для функції тиску

$$P=\varphi_4(\zeta-F),$$

де $F_1=F-\overline{S}$ – товщина в'язкого шару, $\overline{S}=S/(\varphi_1^2+\varphi_2^2)$, φ_i – відомі функції, які залежать від геометричних і фізичних параметрів:

$$\varphi_1=-\frac{\mathrm{Re}}{Fr}(\overline{e},\overline{e}_1),\quad \varphi_2=-\frac{\mathrm{Re}}{Fr}(\overline{e},\overline{e}_2),\quad \varphi_4=\frac{(\overline{e},\overline{n})}{Fr},$$

$$\varphi_3=\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}+\frac{1}{\xi\psi(\eta)}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta}+\frac{1}{\xi}\varphi_1,\qquad D=\left(\varphi_1^2+\varphi_2^2\right)^{-1},$$

$$\varphi_5=D\left[\varphi_1^2\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}+\varphi_1\varphi_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi}+\frac{1}{\xi\psi(\eta)}\left(\varphi_1\varphi_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta}+\varphi_2^2\frac{\partial\varphi_2}{\partial\eta}\right)\right],$$

Невідома товщина плівки F визначається в результаті розв'язання крайової задачі

$$\varphi_1\frac{\partial F}{\partial\xi}+\frac{\varphi_2}{\xi\psi(\eta)}\frac{\partial F}{\partial\eta}+\frac{1}{3}\varphi_3 F+\overline{S}\left(\frac{1}{2}\varphi_5-\frac{1}{3}\varphi_3\right)=0, \tag{6}$$

$$F(1,\eta)=1, \quad F(\xi,\eta_p)=F_0(\xi), \tag{7}$$

де η_p – координата, що визначає лінію розтікання $\eta=\eta_p$. Система рівнянь (6)-(7) розв’язується чисельно з використанням різницевої схеми біжучого обчислення. Функція $F_0(\xi)$ знаходиться в результаті розв’язання задачі на лінії розтікання $\eta=\eta_p$.

Для конічних тіл з некруговим поперечним перерізом течія може мати декілька ліній розтікання і стікання. При розв'язанні крайової задачі (6)-(7) розрахункова область розбивається на n прямокутних підобластей Ω_i, обмежених двома сусідніми лініями стікання

$$\Omega_i=\left\{\eta_{cm,i}\le\eta\le\eta_{cm,i+1}, \quad \xi_1\le\xi\le\xi_2\right\},$$

де n – число ліній розтікання. В кожній такій підобласті розв'язок будується незалежно від інших областей. Інтегрування починається з лінії розтікання $\eta=\eta_p$, на якій $\varphi_2=0$ і вихідне рівняння вироджується в звичайне диференціальне рівняння. Значення шуканої величини на цій лінії використовується в якості початкової умови при знаходженні розв'язків в підобластях Ω_i^1 і Ω_i^2, обмежених лінією розтікання і найближчими лініями стікання.

Аналіз одержаних результатів. За описаною методикою проведені розрахунки течії рідкої плівки по поверхні конічних тіл з поперечним перерізом у вигляді кола, еліпса і багатокутника із закругленими кутами. Результати розрахунків для кругового конуса з кутом θ=30° при куті скосу потоку γ=10° і значеннях фізичних параметрів *Re*=1, *Fr*=1 представлені на рисунках 1. На рис. 1.а показані профілі поздовжньої складової вектора швидкості u в шарі плівки для точки поверхні з координатами (ξ=2; η=45°) при значеннях параметра пластичності *S*=0; 0.1; 0.2; 0.3 , на рис. 1.б - розподіли товщини плівки F в поперечних перерізах ξ=1; 1.5; 2.

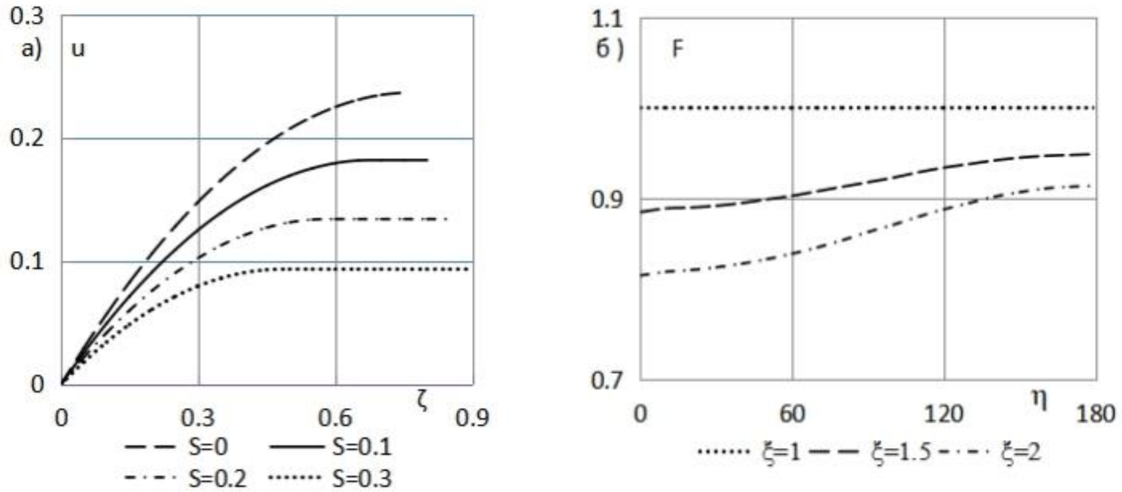

Рис. 1 Профілі поздовжньої складової вектора швидкості u і розподіли товщини плівки F в поперечному перерізі кругового конуса

На рис. 2 наведені розподіли товщини плівки F в перерізі ξ=2 конуса з поперечним перерізом у вигляді квадрата із закругленими кутами при значеннях геометричних параметрів $\theta_к$=30°; r=0.25; γ=0°,10°,15° ($\theta_к$ - кут конуса, вписаного в піраміду; r - радіус закруглення в площині поперечного перерізу). Розрахунки показують, що параметр пластичності S і форма поперечного перерізу істотно впливають на профілі швидкості і розподіли товщини в'язкого шару по поверхні тіла.

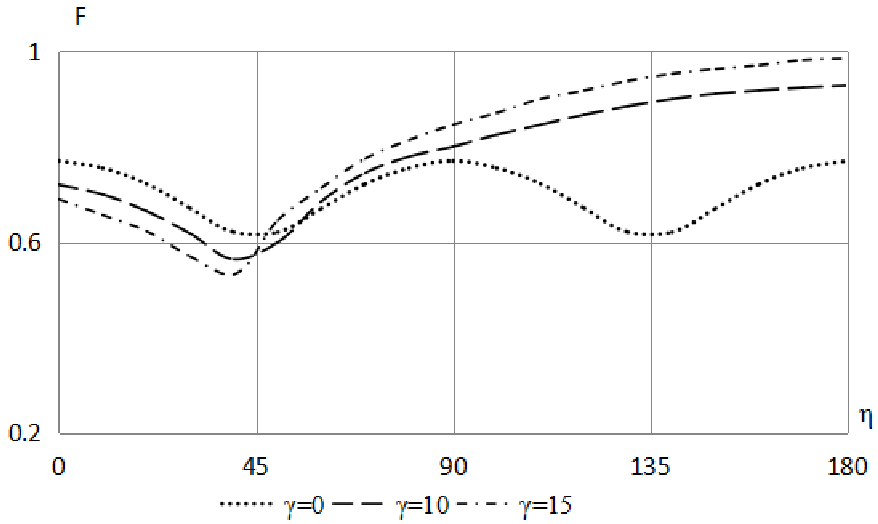

Рис. 2. Розподіли товщини плівки *F* в поперечному перерізі пірамідального тіла

Висновки. За допомогою методу малого параметра розроблено методику наближеного розрахунку плівкових течій в'язкопластичної рідини Шведова-Бінгама по поверхні конічного тіла з довільним гладким поперечним перерізом. Одержано аналітичні вирази для компонентів вектора швидкості. Сформульовано крайову задачу для визначення товщини плівки. Наведено результати розрахунків для тіл з різними поперечними перерізами.

Бібліографічні посилання

1. **Дудник, А.С**. Моделирование течения вязкопластической жидкости по поверхности тела вращения [Текст]/ А.С. Дудник, И.С. Тонкошкур // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Дніпропетровськ: Ліра, 2014. – С. 98-104.
2. **Кадыйров, А.И.** Исследование гидродинамики при ламинарном течении не ньютоновских жидкостей в изогнутом канале [Текст] / А.И.Кадыйров, Е.К. Вачагина // Теплофизика и аэромеханика – 2012. – Вып. 3. – С. 279-289.
3. **Рябчук, Г.В.** Течение нелинейно-вязкой жидкости по поверхности вращающегося плоского диска [Текст] / Г.В. Рябчук, А.Г. Щукина // Изв. РАН. Механика жидкости и газа – 2003. – № 6. – С. 155-161.
4. **Шаповалов, В.М.** Влияние гравитационных сил на течение среды Шведова-Бингама в валковой сушилке [Текст] / В. М. Шаповалов, С. О. Зубович // Известия вузов. Химия и химическая технология. - 2006. - Т. 49, N 6. - С. 59-61.
5. **Шульман, З.П.** Реодинамика и тепломассообмен в пленочных течениях [Текст] / З.П. Шульман, В.Н. Байков.– Минск: Наука и техника, 1979.– 296 с.

Надійшла до редколегії 11.10. 2019.