УДК 532.516 doi: 10.15421/321916

І.С. Тонкошкур
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТЕПЛОМАСООБМІНУ В ПЛІВКОВИХ ТЕЧІЯХ НЕЛІНІЙНО-В'ЯЗКОЇ РІДИНИ

Розглядається задача про тепломасообмін в плівці нелінійно-в'язкої рідини, що стікає по поверхні тіла обертання. Пропонується методика наближеного розв'язання рівнянь руху і тепломассопереноса в рідкій плівці, що основана на методах малого параметра і локальної подібності.

Ключові слова: рідка плівка, метод малого параметра, нелінійно-в'язка рідина, тепломасообмін.

Рассматривается задача о тепломассообмене в пленке нелинейно-вязкой жидкости, стекающей по поверхности тела вращения. Предлагается методика приближенного решения уравнений движения и тепломассопереноса в жидкой пленке, основанная на методах малого параметра и локального подобия.

Ключевые слова: жидкая пленка, метод малого параметра, нелинейно-вязкая жидкость, тепломассообмен.

The problem of heat and mass transfer in a liquid film of a nonlinearly viscous fluid flowing down the surface of a body of revolution under the influence of gravity is considered. The axis of the body is located at a certain angle to the vertical, and the film of liquid flows down from its top. It is assumed that the thermal and diffusion Prandtl numbers are large and the main changes in the temperature and diffusion fields occur in thin boundary layers near the solid wall and near the free surface separating the liquid and gas. A curvilinear orthogonal coordinate system (ξ, η, ζ) connected with the surface of the body is introduced. To describe the flow of a liquid film, a model of a viscous incompressible liquid is used, which is based on differential equations in partial derivatives - the equations of motion and continuity. As boundary conditions, the conditions of adhesion are used on the surface of a solid body, as well as the conditions of continuity of stresses and the normal component of the velocity vector - on the surface separating the liquid and gas. To simulate heat and mass transfer in a liquid film, the equations of thermal and diffusion boundary layers with boundary conditions of the first and second kind are used. To close the system of differential equations, the Ostwald-de-Ville rheological model is used.

To simplify the system of differential equations, the small parameter method is used, in which the relative film thickness is selected. It is assumed that the generalized Reynolds number is of the order of unity. The solution of the equations of continuity and motion (taking into account the main terms of the expansion) is obtained in an analytical form. To determine the unknown film thickness, an initial-boundary-value problem is formulated for a first-order partial differential equation. The solution to this problem is found numerically using a running count difference scheme. To reduce the dimension of the problem for the equations of the boundary layer, the local similarity method is used. To integrate simplified equations, the finite-difference method is used.

Key words: liquid film, small parameter method, nonlinearly viscous liquid, heat and mass transfer.

Вступ. Моделювання плівкових течій рідини по твердим поверхням становить інтерес у зв'язку з широким застосуванням таких течій в тепломасообмінних апаратах, при нанесенні лакофарбових і полімерних покриттів на різні поверхні і в інших технологічних процесах. В технічних пристроях часто використовують течії реологічно складних рідин.

Математичному моделюванню тепломассообміну в рідких плівках присвячена значна кількість теоретичних досліджень (наприклад, [1, 3, 4, 6]), але при цьому число робіт, в яких досліджуються тривимірні течії рідини, є доволі обмеженим. В даній роботі пропонується методика наближеного розрахунку просторових течій нелінійно-в'язкої рідини по поверхні тіла обертання з урахуванням процесів тепломасообміну.

Постановка задачі. Розглядається задача про тепломасообмін в ламінарної плівці в'язкої рідини, що стікає під дією сили тяжіння по поверхні тіла обертання. Тіло розташоване під деяким кутом до вертикалі. Припускається, що теплове і дифузійне числа Прандтля великі і основні зміни температурного і дифузійного полів відбуваються в тонких примежових шарах поблизу твердої стінки і близько вільної поверхні, що розділяє рідину і газ.

Введемо криволінійну ортогональну систему координат (ξ, η, ζ), зв'язану з поверхнею тіла: координата ξ відраховується від вершини тіла уздовж твірної, η – полярний кут в площині, перпендикулярній осі тіла обертання, ζ – відстань по нормалі до поверхні. Рівняння поверхні тіла задається у вигляді,

$$r = r_w(\xi),$$

де r_w – відстань від точки поверхні до осі тіла.

Для опису течії рідкої плівки застосовується модель в'язкої нестисливої рідини, яка заснована на рівняннях імпульсу і нерозривності. У векторній формі ці рівняння мають вигляд

$$\rho \frac{d\overline{V}}{dt} = -\,grad\ p + Div\,\overline{\overline{\tau}} + \rho\overline{g}\,, \tag{1}$$

$$div\,\overline{V} = 0\,, \tag{2}$$

де $\overline{V}$ – вектор швидкості руху рідини, p – тиск, ρ – густина рідини, $\overline{\overline{\tau}}$ – тензор в'язких напружень, $\overline{g}$ – інтенсивність сили тяжіння.

В якості крайових умов використовуються умова прилипання на поверхні твердого тіла, а також умови неперервності напружень і нормальної складової вектора швидкості – на поверхні, що розділяє рідину і газ

$$\overline{V} = 0 \qquad \text{при } \zeta = 0, \tag{3}$$

$$\overline{\overline{\tau}}\,\overline{N} - (p - p_0)\overline{N} = 2\sigma\chi\overline{N} + \nabla_\Gamma\sigma, \tag{4}$$

$$\overline{V}\,\overline{N} = 0 \qquad \text{при } \zeta = F. \tag{5}$$

Тут $F = F(\xi,\zeta)$ – рівняння вільної поверхні, p_0 – атмосферний тиск в газі, $\overline{N} = \overline{N}(\xi,\eta)$ – одинична нормаль до Γ, χ – середня кривизна поверхні Γ, σ – коефіцієнт поверхневого натягу, $\nabla_\Gamma \sigma$ – поверхневий градієнт коефіцієнта σ. Для визначення компонентів тензора в'язких напружень τ_{ij} використовується степеневий реологічний закон [4]:

$$\tau_{ij} = 2k(2I_2)^{\frac{n-1}{2}}\dot{e}_{ij}, \quad I_2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\dot{e}_{ij}\dot{e}_{ji},$$

де *k, n* – сталі величини. Компоненти тензора швидкостей деформацій визначаються за формулою

$$2\dot{e}_{ij} = \frac{1}{h_j}\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{1}{h_i}\frac{\partial V_j}{\partial x_i} + 2\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3}\frac{V_k}{h_k}\frac{\partial \ln h_i}{\partial x_k} - \frac{1}{h_i h_j}\left(V_i\frac{\partial h_i}{\partial x_j} + V_j\frac{\partial h_j}{\partial x_i}\right),$$

де δ_{ij} - символи Кронекера, V_i - складові вектора швидкості в напрямках осей координат, h_i - коефіцієнти Ламе.

Для моделювання процесів стаціонарного теплообміну в рідкій плівці, використовується рівняння просторового теплового примежового шару на поверхні тіла обертання

$$\frac{u}{h_1}\frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{w}{h_2}\frac{\partial T}{\partial \eta} + \frac{v}{h_3}\frac{\partial T}{\partial \zeta} = a\frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2}, \tag{6}$$

де *u*, *w*, *v* – компоненти вектора швидкості $\overline{V}$ вздовж координат ξ,η,ζ, *T* – температура рідини, *a* – коефіцієнт температуропровідності.

За крайові умови беруться умови першого або другого роду на поверхні твердого тіла, а також умови на зовнішній межі примежового шару

$$T = T_w \quad \text{або} \quad \frac{\partial T}{\partial \zeta} = q_w \qquad \text{при } \zeta = 0, \tag{7}$$

$$T \to T_E \qquad \text{при } \zeta \to F. \tag{8}$$

Аналогічну задачу для моделювання масообміну в рідкій плівці можна подати у вигляді

$$\frac{u}{h_1}\frac{\partial C}{\partial \xi} + \frac{w}{h_2}\frac{\partial C}{\partial \eta} + \frac{v}{h_3}\frac{\partial C}{\partial \zeta} = D\frac{\partial^2 C}{\partial \zeta^2}, \tag{9}$$

$$C = C_E \qquad \text{при } \zeta = F, \tag{10}$$

$$C \to C_W \qquad \text{при } \zeta \to 0, \tag{11}$$

де *C* – концентрація домішки в рідині, *D* – коефіцієнт дифузії, індекси «w» і «E» відносяться до поверхні твердого тіла і вільної межі відповідно.

Метод розв'язання. Для спрощення системи диференціальних рівнянь (1)-(2) з крайовими умовами (3)-(5) застосовується метод малого параметра, в якості якого обрана відносна товщина плівки $\varepsilon = h_0 / l_0$ (h_0, l_0 – характерні поперечний і поздовжній розміри). Припускається, що узагальнене число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \rho h_0^n U_0^{2-n} / \mu^n$ має порядок одиниці (тобто $\varepsilon\mathrm{Re} \ll 1$) [2].

Розв’язок задачі (в нульовому наближенні) для складових вектора швидкості і функції тиску має вигляд:

$$u = -\frac{n}{n+1}\varphi_1(\eta)BF^{\frac{n+1}{n}}\left(1-\left(1-\frac{\zeta}{F}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right),$$

$$w = -\frac{n}{n+1}\varphi_2(\eta)BF^{\frac{n+1}{n}}\left(1-\left(1-\frac{\zeta}{F}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right),$$

$$v = \left(\varphi_1(\eta)\frac{\partial F}{\partial \xi}+\frac{\varphi_2(\eta)}{r_w}\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)BF^{\frac{n+1}{n}}\left[\frac{\zeta}{F}+\frac{n}{n+1}\left(\left(1-\frac{\zeta}{F}\right)^{\frac{n+1}{n}}-1\right)\right]+$$

$$+\frac{n}{n+1}\frac{\varphi_3}{\xi}F^{\frac{2n+1}{n}}\left[\frac{\zeta}{F}+\frac{n}{2n+1}\left(\left(1-\frac{\zeta}{F}\right)^{\frac{2n+1}{n}}-1\right)\right],$$

$$P = -\varphi_4(\eta)F\left(1-\frac{\zeta}{F}\right),$$

де $\varphi_i(\eta)$ і B – відомі функції, що залежать від геометричних и фізичних параметрів.

Невідома товщина плівки F визначається в результаті розв'язання крайової задачі

$$\varphi_1\frac{\partial F}{\partial \xi}+\frac{\varphi_2}{r_w}\frac{\partial F}{\partial \eta}+\varphi_3 F = 0, \tag{12}$$

$$F(\xi_0,\eta)=\mu_1(\eta), \quad F(\xi,0)=\mu_2(\xi). \tag{13}$$

Система рівнянь (12)-(13) розв’язується чисельно з використанням різницевої схеми біжучого обчислення. Функція $\mu_1(\xi)$ є заданою, а $\mu_2(\xi)$ знаходиться в результаті розв’язання задачі на лінії розтікання η=0, на якій виконується умова $\varphi_2(0)=0$.

Відзначимо, що в примежовому шарі навколо твердої поверхні вирази для компонентів вектора швидкості, які входять в рівняння (6), можна значно спростити, провівши лінеаризацію при малих значеннях координати ζ. Аналогічне спрощення можливе і поблизу вільної межі при $\zeta \to F$.

Для розв'язання крайових задач (6)-(8) і (9)-(11) застосовується локально-автомодельний підхід [5], який дозволяє звести початкову просторову задачу до ряду двовимірних (для кожного поперечного перерізу $\xi = const$).

Введемо наступну заміну незалежних змінних

$$\xi_1=\xi, \quad \eta_1=\eta, \quad \varsigma_1=\frac{\varsigma}{\alpha(\xi)},$$

де $\alpha(\xi)$ – деяка задана функція. Похідні від шуканої функції $A(\xi,\eta,\zeta)$ по координатам ξ, ζ можуть бути представлені у наступному вигляді

$$\frac{\partial A}{\partial \xi}=\frac{\partial A}{\partial \xi_1}+\frac{\partial A}{\partial z}\left(-\frac{\varsigma}{\alpha^2(\xi)}\frac{\partial \alpha}{\partial \xi}\right),\qquad \frac{\partial A}{\partial \zeta}=\frac{\partial A}{\partial z}\frac{1}{\alpha(\xi)}.$$

Будемо припускати, що у системі координат $\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1$ рівняння примежового шару має властивість локальної подібності, тобто $\partial A/\partial \xi_1=0.$
Тоді з попередніх рівностей можна одержати співвідношення

$$\frac{\partial A}{\partial \xi}=-\frac{\zeta}{\alpha(\xi)}\frac{d\alpha}{d\xi}\frac{\partial A}{\partial \zeta}.$$

Для даних крайових задач функція $\alpha(\xi)$ вибиралась у вигляді $\alpha=\xi^n$, де n=1/3, 1/2 для рівнянь теплопровідності і дифузії відповідно. За допомогою цих перетворень рівняння (6) можна звести до вигляду

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \lambda^2}+\frac{A_1}{3}\lambda^2\frac{\partial T}{\partial \lambda}-\frac{A_2}{\cos\alpha}\lambda\frac{\partial T}{\partial \eta}=0,$$

де

$$\lambda=\left(\frac{U_0}{ah_0}\right)^{1/3}\frac{\varsigma}{\xi^{1/3}},\quad A_0=-B\left(\frac{F}{h_0}\right)^{\frac{1}{n}},\quad A_1=\varphi_1 A_0,\ A_2=\varphi_2 A_0.$$

Аналогічні перетворення проводяться і з рівнянням (9). Для інтегрування одержаних рівнянь з відповідними крайовими умовами застосовується скінченно-різницевий метод.

Аналіз одержаних результатів. На рис. 1,2 наведені результати розрахунків за викладеною методикою для конуса з кутом α=30° при куті скосу потоку γ=10° і значеннях фізичних параметрів *Re*=1, *Fr*=1, *n*=0.5; 1; 2; 10. На рис. 1.а представлені профілі температури $\theta=T/T_E$ в примежовому шарі навколо твердої поверхні для точки з координатами (ξ=2; η=0°) при різних значеннях параметра нелінійності *n*. Аналогічні профілі концентрації домішки $\theta_C=C/C_E$ поблизу вільної межі наведені на рис. 1.б (координата λ відкладається від вільної межі всередину плівки).

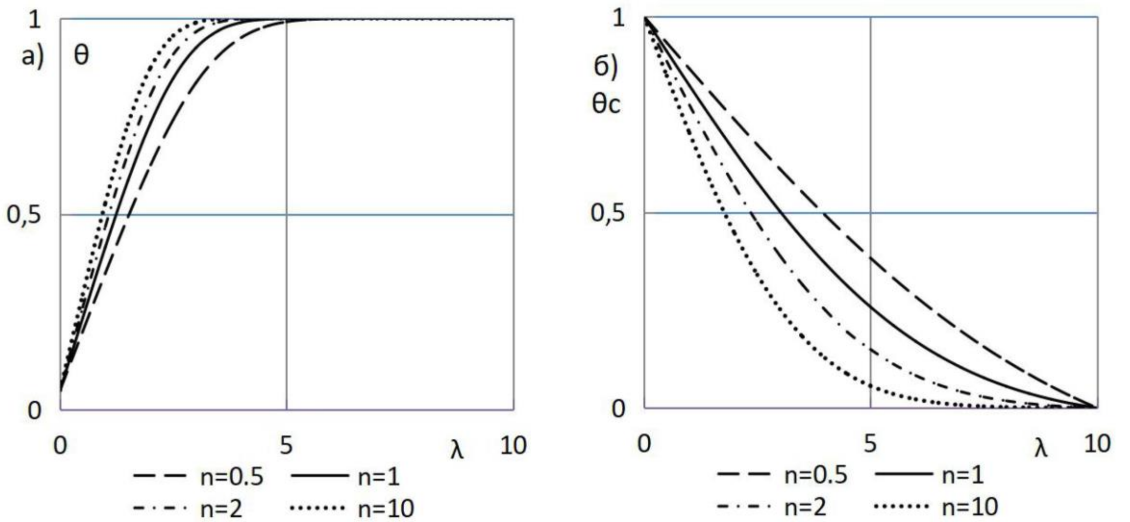

Рис. 1 Профілі температури θ і концентрації домішки θ_C в примежовому шарі

На рис. 2а показані розподіли величини похідної $\theta'(0)$, що характеризує теплові потоки на твердій поверхні, вздовж твірної $\eta=0°$ для крайової умови першого роду $\theta_w=0.05$. Такі ж розподіли температури $\theta(0)$ для крайової умови другого роду $\theta'_w=0.1$ наведені на рис 2б.

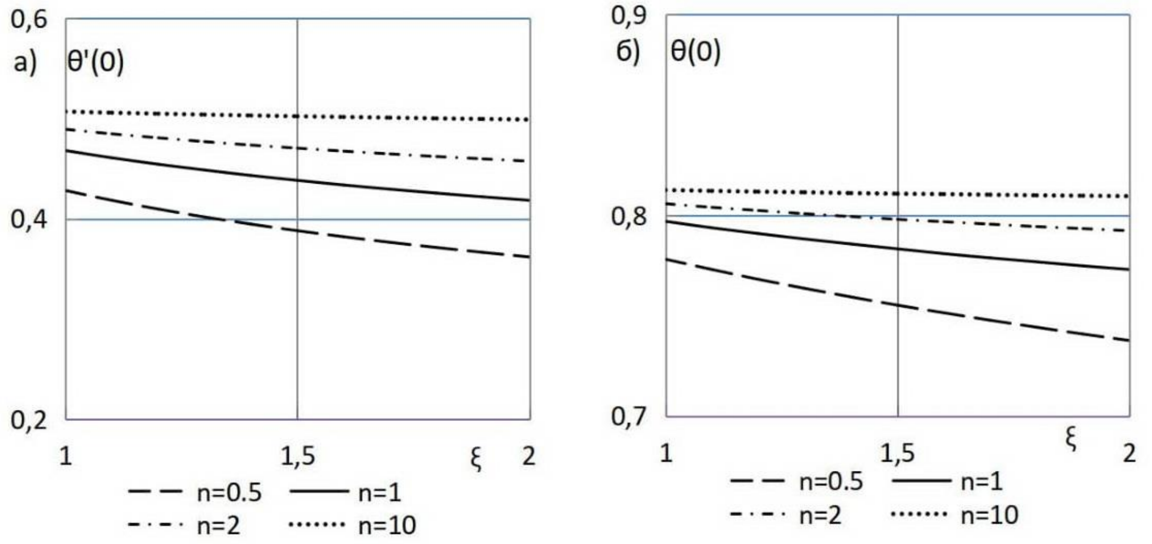

Рис. 2. Розподіли теплових характеристик вздовж твірної тіла

Висновки. За допомогою методів малого параметра і локальної подібності розроблена методика розв'язання задачі про тепломасообмін в плівці нелінійно-в'язкої рідини, що рухається по поверхні тіла обертання під дією сили тяжіння. Сформульовано спрощені крайові задачі для визначення товщини плівки, а також для характеристик тепло- і масообміну в рідкій плівці. Отримано аналітичні вирази для профілів швидкості.

Бібліографічні посилання

1. **Бояджиев, Х.** Массоперенос в движущихся пленках жидкости [Текст] / Х. Бояджиев, В. Бешков. – М.: Мир, 1988. – 136 с.
2. **Тонкошкур, И.С.** Математическое моделирование течения жидкой пленки по конической поверхности [Текст] / И.С. Тонкошкур // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: ДНУ, 2010. – С. 284-291.
3. **Холпанов, Л.П.** Гидродинамика и тепломассообмен с поверхностью раздела [Текст] / Л.П. Холпанов, В.Я. Шкадов . – М.: Наука, 1990. – 271 с.
4. **Шульман, З.П.** Реодинамика и тепломассообмен в пленочных течениях [Текст] / З.П. Шульман, В.Н. Байков.– Минск: Наука и техника, 1979.– 296 с.
5. **Kaups, K.** Prediction of turbulent boundary layers on cones at incidence [Text] / K. Kaups and T. Cebeci // AIAA Journal. – 1977. – Vol. 15, No. 5. – P. 727-730
6. **Shevchuk, I.V.** Convective Heat and Mass Transfer in Rotating Disk Systems [Text] / I.V. Shevchuk. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2009, XIX. – 236 p.

Надійшла до редколегії 25.09.2019