УДК 519.8 doi: 10.15421/321912

О.М. Кісельова[1], О.М. Притоманова[1], С.В. Дзюба[2], В.Г. Падалко[1]
[1] *Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*
[2] *Придніпровський науковий центр НАН України та МОН України*

ПОБУДОВА МУЛЬТИПЛІКАТИВНО ЗВАЖЕНОЇ ДІАГРАМИ ВОРОНОГО З НЕЧІТКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Запропоновано алгоритм побудови мультиплікативно зваженої діаграми Вороного при наявності нечітких параметрів з оптимальним розміщенням точок-генераторів в обмеженій множині n-вимірного евклідового простору E_n. Алгоритм розроблений на основі синтезу методів розв'язання задач теорії оптимального розбиття множин з нейронечіткими технологіями і модифікаціями r-алгоритма Н.З. Шора для розв'язання негладких оптимізаційних задач.

Ключові слова. Мультиплікативно зважена діаграма Вороного, задача оптимального розбиття множин, оптимальне розміщення точок-генераторів, нейронечіткі технології, r-алгоритм Н.З. Шора, негладкі оптимізаційні задачі.

Предложен алгоритм построения мультипликативно взвешенной диаграммы Вороного при наличии нечетких параметров с оптимальным размещением точек-генераторов в ограниченном множестве n-мерного евклидова пространства E_n. Алгоритм разработан на основе синтеза методов решения задач теории оптимального разбиения множеств с нейронечеткими технологиями и модификациями r-алгоритма Н.З. Шора для решения негладких оптимизационных задач.

Ключевые слова. Мультипликативно взвешенная диаграмма Вороного, задача оптимального разбиения множеств, оптимальное размещение точек-генераторов, нейронечеткие технологии, r-алгоритм Н.З. Шора, негладкие оптимизационные задачи.

An algorithm for constructing a multiplicatively weighted Voronoi diagram in the presence of fuzzy parameters with optimal location of a finite number of generator points in a bounded set of n-dimensional Euclidean space E_n is proposed in the paper. The algorithm is based on the formulation of a continuous set partitioning problem from E_n into non-intersecting subsets with a partitioning quality criterion providing the corresponding form of Voronoi diagram.

Algorithms for constructing the classical Voronoi diagram and its various generalizations, which are based on the usage of the methods of the optimal set partitioning theory, have several advantages over the other used methods: they are out of the dependence of E_n space dimensions, which containing a partitioned bounded set into subsets, independent of the geometry of the partitioned sets, the algorithm's complexity is not growing under increasing of number of generator points, it can be used for constructing the Voronoi diagram with optimal location of the points and others. The ability of easily construction not only already known Voronoi diagrams but also the new ones is the result of this general-purpose approach.

The proposed in the paper algorithm for constructing a multiplicatively weighted

Voronoi diagram in the presence of fuzzy parameters with optimal location of a finite number of generator points in a bounded set of n-dimensional Euclidean space E_n is developed using a synthesis of methods for solving optimal set partitioning problems, neurofuzzy technologies and modifications of the Shor's r-algorithm for solving non-smooth optimization problems.

Keywords: multiplicatively weighted Voronoi diagram, optimal set partitioning problem, optimal location of generator points, neurofuzzy technologies, Shor's r-algorithm, non-smooth optimization problems.

Вступ. В даний час налічується кілька сотень літературних джерел, присвячених діаграмам Вороного та їх додаткам у різних областях [1]. Діаграми Вороного для двох і тривимірних просторів використовуються в самих різних областях прикладних наук. Незважаючи на те, що велика кількість з відомих алгоритмів побудови діаграм Вороного заданої скінченної множини M точок площини (простору), які називають точками-генераторами, мають складність $O(|M|\log(|M|))$, всі ці алгоритми досить складні. Крім того, часто в практичних задачах параметри діаграм Вороного можуть бути описані нечітко.

У роботах [2, 3] запропоновано алгоритми побудови стандартної (класичної) діаграми Вороного з чіткими параметрами і різних її узагальнень, які засновані на застосуванні методів теорії оптимального розбиття множин (ОРМ) і мають ряд переваг у порівнянні з відомими, описаними в науковій літературі [1, 4 , 5]. А саме: не залежать від розмірності простору E_n, що містить обмежену множину, яка підлягає розбиттю; не залежить від геометрії множин, які підлягають розбиттю; складність алгоритмів побудови діаграм Вороного на основі описаного підходу не збільшується при збільшенні кількості точок-генераторів; можуть бути застосовні до побудови не тільки діаграм Вороного заданої кількості точок-генераторів з фіксованим їх розташуванням, а й з оптимальним розміщенням цих точок в обмеженій множині простору E_n та інші. Результатом такого універсального підходу є можливість легко будувати не тільки вже відомі діаграми Вороного, а й конструювати нові.

Універсальність пропонованого в роботах [2, 3] підходу до побудови діаграм Вороного підтверджується ще і тим, що моделі і методи розв'язання неперервних задач оптимального розбиття множин можуть бути узагальнені на випадок нечіткого завдання вихідних параметрів задачі або вимоги нечіткого розбиття множини, в результаті чого і результуючі діаграми Вороного можуть носити нечіткий характер.

У даній роботі розроблено алгоритм побудови мультиплікативно зваженої діаграми Вороного при наявності нечітких параметрів з оптимальним розміщенням скінченної кількості N точок-генераторів в обмеженій множині Ω з n-вимірного евклідового простору E_n $(n \geq 2)$. Алгоритм розроблений на основі синтезу методів розв'язання задач теорії ОРМ [7]) з нейронечіткими технологіями [8]) та модифікаціями r-алгоритму Н.З. Шора для розв'язання негладких задач оптимізації [9, 10].

Постановка задачі. Класичною діаграмою Вороного скінченної множини $M = \{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_N\} \subset E_n$ точок-генераторів $\tau_i = (\tau_i^{(1)}, \tau_i^{(2)}, ..., \tau_i^{(n)})$, $i = 1, 2, ..., N$ в n-

вимірному евклідовому просторі E_n $(n \ge 2)$ називається сукупність багатогранників Вороного

$$Vor\left(\tau_i\right) = \left\{ x \in \mathrm{E}_n : \; c\left(x, \tau_i\right) \le c\left(x, \tau_j\right), \; j = 1,2,...,N, \; j \ne i \; \right\}, \quad i = 1,2,...,N,$$

вихідних точок $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_N$, де функції $c_i\left(x, \tau_i\right)$ є функціями відстані між точками x і τ_i та можуть визначатися в E_n як евклідова метрика.

У мультиплікативно зваженій діаграмі Вороного множини $M = \{\tau_1, \tau_2, ..., \tau_N\} \subset E_n$

$$MW \; Vor\left(\mathrm{M}\right) = \bigcup_{\tau_i \in \mathrm{M}} MW \; Vor\left(\tau_i\right)$$

кожний багатогранник Вороного

$$MW \; Vor(\tau_i) = \left\{ x \in E_n : \; c(x, \tau_i) / w_i \le c(x, \tau_j) / w_j, \; j = 1,2,...,N, \; j \ne i \; \right\}, \; i = 1,2,...,N, \quad (1)$$

представляє собою множину простору, зважена відстань від яких до точки-генератора $\tau_i \in \mathrm{M}$ не перевищує зваженої відстані до будь-якої іншої вихідної точки ($w_i > 0$, $i = 1,2,...,N$, – задані вагові коефіцієнти).

Одним з наочних способів отримання мультиплікативно зваженої діаграми Вороного є вирощування кристалів [6]. У разі, коли всі кристали починають рости одночасно, але ростуть з різною швидкістю, кожна точка $\tau_i \in M$ отримує ваговий коефіцієнт і, при вимірюванні відстані до неї, потрібно помножити функцію, яка задає відстань, на цей ваговий коефіцієнт.

Діаграми Вороного з нечіткими параметрами з’являються, наприклад, у тому випадку, коли вагові коефіцієнти функцій відстані двох точок, що визначають елементи діаграми Вороного, задані нечітко. Задамо для кожної функції $c_i\left(x, \tau_i\right)$ з (1) нечітку вагу $\tilde{w}_i$, яка залежить від зовнішніх факторів, які теж можуть бути задані нечітко, причому вид цієї залежності заздалегідь невідомий.

Тоді запишемо (1) у виді

$$MW \; Vor(\tau_i) = \left\{ x \in E_n : \; c(x, \tau_i) / \tilde{w}_i \le c(x, \tau_j) / \tilde{w}_j, \; j = 1,2,...,N, \; j \ne i \; \right\}, \; i = 1,2,...,N, \quad (2)$$

Для формулювання математичної постановки задачі побудови мультиплікативно зваженої діаграми Вороного з оптимальним розміщенням скінченної кількості N точок-генераторів у обмеженій множині Ω з n-вимірного евклідового простору E_n $(n \ge 2)$ на основі методів розв’язання задач ОРМ знімемо нечіткість у (2) за допомогою методу нейролінгвістичної ідентифікації невідомих складних нелінійних залежностей з [8].

Для застосування указаного методу для відновлення значень нечітких параметрів $\tilde{w}_1, ..., \tilde{w}_N$, не обмежуючи узагальнення міркувань, позначимо їх відновленні значення як w та розглянемо функціональну залежність виходу w від входів $y_1, ..., y_q$ об’єкта ідентифікації у виді:

$$w = w(y_1, ..., y_q), \quad (3)$$

тут $y_1,...,y_q$ - фактори, що впливають на w, та, як указувалося раніше, можуть бути теж задані нечітко.

Після застосування методу нейролінгвістичної ідентифікації невідомих складних нелінійних залежностей, розробленого у [8], отримаємо точне (чітке) значення вихідної змінної w, яке розраховується за такими формулами:

$$w = \frac{\sum_{k=1}^{L} d_k \cdot \mu *_{D_k}(w)}{\sum_{k=1}^{L} \mu *_{D_k}(w)}, \tag{4}$$

$$\mu *_{D_k}(w) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{s_k} p *_j^k (y_1, y_2, ..., y_q), & \text{якщо} \quad \sum_{j=1}^{s_k} p *_j^k (y_1, y_2, ..., y_q) \le 1, \\ 1 & \text{в інших випадках,} \end{cases} \tag{5}$$

$$p *_j^k (y_1, y_2, ..., y_q) = v *_j^k \prod_{i=1}^{q} \mu *_{ij}^k (y_i), \tag{6}$$

$$\mu *_{ij}^k (y_i) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y_i - b *_{ij}^k}{e *_{ij}^k} \right)^2}, \ i = 1,...,q, \ j = 1,...,s_k, \ \text{k = 1, 2, …, L}, \tag{7}$$

де у формулах (4)-(7):

- $\mu *_{D_k}(w)$ - функція належності вихідної змінної w класу D_k, $k = 1, 2, \ldots, L$, L - кількість класів (лінгвістичних термів) вихідної змінної w, d_k - центр класу D_k;
- $p *_j^k (y_1, y_2, ..., y_q)$ - нечіткі продукційні правила, які отримуються з експертно-експериментальної інформації про залежність (6), j - номер правила у k-у класі, $j = 1, 2, \ldots, s_k$, s_k - кількість правил у k-у класі; $v *_j^k$ - вага j-го правила у k-у класі виходу w;
- $\mu *_{ij}^k (y_i)$ - дзвонова функція належності змінної y_i її лінгвістичному терму у j-у правилі k-го класу виходу вихідної змінної w, $b *_{ij}^k$ - координата максимуму і $e *_{ij}^k$ - коефіцієнт концентрації цієї функції належності.

Необхідно зауважити, що значення $v *_j^k$ - ваг правил у (6) та параметрів $b *_{ij}^k$, $e *_{ij}^k$ функції належності (7) відмічені зірочкою як оптимальні, тобто такі, що отримані у результаті етапу параметричної ідентифікації методу нейролінгвістичної ідентифікації, для яких відхилення експериментальних даних від модельних, отриманих після настройки нечіткої моделі об’єкта (3), досягає мінімального значення. Значення $\mu^*_{D_k}(w)$, $p^{*k}_j(y_1, y_2, ..., y_q)$ та $\mu^{*k}_{ij}(y_i)$ у (4)-(7) обчислюються при оптимальних значеннях v^{*k}_j, b^{*k}_{ij}, e^{*k}_{ij}.

Таким чином, після відновлення значень нечітких параметрів $\tilde{w}_1, ..., \tilde{w}_N$ в (2) за допомогою описаного методу нейролінгвістичної ідентифікації, отримуємо їх відновлені (чіткі) значення $w_1, ..., w_N$.

Сформулюємо тепер математичну постановку задачі побудови мультиплікативно зваженої діаграми Вороного з оптимальним розміщенням скінченної кількості N точок-генераторів у обмеженій множині Ω з n-вимірного евклідового простору E_n $(n \geq 2)$ на основі методів розв'язання задач ОРМ та відновленими значеннями її нечітких параметрів.

Нехай Ω – деяка задана обмежена множина з E_n, $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_N$ – скінченна множина точок-генераторів в Ω. У тих випадках, коли розташування точок $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_N$ в Ω невідомо і їх потрібно розмістити (вибрати) в Ω, можна ввести ще один варіант діаграми Вороного на множині $\Omega \subset E_n$, а саме діаграму Вороного скінченної множини точок, оптимально розміщених в обмеженій множині.

Під мультиплікативно зваженою діаграмою Вороного скінченної кількості N точок-генераторів $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_N$ у обмеженій множині $\Omega \subset E_n$, будемо розглядати таку сукупність многогранників Вороного

$$MW\ Vor(\tau_i) = \left\{ x \in E_n :\ c(x, \tau_i) / w_i \leq c(x, \tau_j) / w_j,\ j = 1, 2, ..., N,\ j \neq i \right\},\ i = 1, 2, ..., N, \quad (8)$$

точок $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_N$, оптимально розміщених в обмеженій множині, для яких сумарна зважена відстань від точок множини Ω до відповідних точок-генераторів $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_N$ є найменшою, тобто функціонал

$$J\left(\left\{\tau_1, ..., \tau_N\right\}\right) = \sum_{i=1}^{N} \int_{Vor(\tau_i)} (c(x,\ \tau_i) / w_i) dx \quad (9)$$

приймає мінімальне значення.

Метод розв'язання задачі. Викладемо підхід до побудови мультиплікативно зваженої діаграми Вороного скінченної кількості точок-генераторів $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_N$, оптимально розміщених в обмеженій множині $\Omega \subset E_n$, з нечіткими параметрами, заснований на застосуванні математичного апарату нейронечітких технологій [8] і теорії ОРМ [11]. Для цього спочатку сформулюємо відповідну неперервну задачу оптимального розбиття множини з E_n на підмножини з невідомими заздалегідь координатами деяких характерних для кожної підмножини точок, які називаються центрами підмножин, яка є узагальненням задачі з [11].

Нехай Ω – обмежена, вимірна за Лебегом множина в n-вимірному евклідовому просторі E_n. Сукупність вимірних за Лебегом підмножин $\Omega_1, ..., \Omega_N$ з $\Omega \subset E_n$ назвемо можливим розбиттям множини Ω на його підмножини $\Omega_1, ..., \Omega_N$, що не перетинаються, якщо

$$\bigcup_{i=1}^{N}\Omega_i=\Omega,\ mes\left(\Omega_i\cap\Omega_j\right)=0,\ i,j=1,2,...,N\ \ (i\neq j), \tag{10}$$

де $mes(\cdot)$ означає міру Лебега.

Позначимо через $\sum_{\Omega}^{N}$ клас всіх можливих розбиттів множини Ω на підмножини, що не перетинаються, $\Omega_1,...,\Omega_N$, тобто

$$\Sigma_{\Omega}^{N}=\left\{\left(\Omega_1,...,\Omega_N\right):\ \bigcup_{i=1}^{N}\Omega_i=\Omega,\ mes\left(\Omega_i\cap\Omega_j\right)=0,\ i,j=1,2,...,N\ \ (i\neq j)\right\}.$$

Введемо функціонал

$$F\left(\left\{\Omega_1,...,\Omega_N\right\},\left\{\tau_1,...,\tau_N\right\}\right)=\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i}(c(x,\ \tau_i)/w_i)\,dx, \tag{11}$$

де $c\left(x,\tau_i\right)$ – задана дійсна обмежена на $\Omega\times\Omega$ функція, вимірна за $x=\left(x^{(1)},...,x^{(n)}\right)\in\Omega$ для будь-якої фіксованої точки $\tau_i=\left(\tau_i^{(1)},...,\tau_i^{(n)}\right)\in\Omega$ для усіх $i=1,2,...,N;\ \ w_i>0\ \ (i=1,2,...,N)$ – задані вагові коефіцієнти.

Тут і надалі інтеграли розуміються в сенсі Лебега. Будемо вважати, що міра множини граничних точок множин Ω_i, $i=1,..,N$, дорівнює нулю.

Задача А. Знайти $\min\limits_{\substack{\{\Omega_1,...,\Omega_N\}\in\Sigma_{\Omega}^{N},\\ \{\tau_1,...,\tau_N\}\in\Omega^N}} F\left(\left\{\Omega_1,...,\Omega_N\right\},\left\{\tau_1,...,\tau_N\right\}\right)$,

де функціонал $F\left(\left\{\Omega_1,...,\Omega_N\right\},\left\{\tau_1,...,\tau_N\right\}\right)$ представлений у виді (11); координати $\tau_i^{(1)},...,\tau_i^{(n)}$ центрів $\tau_i=\left(\tau_i^{(1)},...,\tau_i^{(n)}\right)\in\Omega_i$, $i=1,2,...,N$, заздалегідь невідомі та їх потрібно визначити.

Пару $\left(\{\Omega_1^*,...,\ \Omega_N^*\},\ \{\tau_1^*,...,\tau_N^*\}\right)$, що доставляє мінімум функціоналу (11) на множині $\Sigma_{\Omega}^{N}\times\Omega^N$, назвемо *оптимальним розв'язком* задачі А. При цьому розбиття $\{\Omega_1^*,...,\ \Omega_N^*\}\in\Sigma_{\Omega}^{N}$ назвемо *оптимальним розбиттям* множини $\Omega\subset E_n$ на N підмножин, а сукупність $\tau^*=\left(\tau_1^*,...,\tau_N^*\right)\in\Omega^N$ центрів $\tau_i^*\in\Omega_i^*$, $i=1,2,...,N$ – *оптимальними центрами* підмножин Ω_i^* в задачі А.

Для розв'язання задачі А для кожного фіксованого w_i $(i=1,2,...,N)$ введемо характеристичні функції підмножин Ω_i:

$$\lambda_i(x)=\begin{cases}1,\ x\in\Omega_i,\\ 0,x\in\Omega\setminus\Omega_i,\ \ i=1,...,N,\end{cases}$$

та перепишемо задачу А у термінах характеристичних функцій в такому виді.

Задача В. Знайти

$$\min_{(\lambda(\cdot),\tau)\in\Gamma\times\Omega^{N}}\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}(c(x,\ \tau_i)/w_i)\,\lambda_i(x)\,dx,$$

де

$$\Gamma = \{\lambda(x) = (\lambda_1(x),..., \lambda_N(x)): \sum_{i=1}^{N} \lambda_i(x)=1 \text{ майже всюди (м.в.) для } x\in\Omega,$$

$$\lambda_i(x)=0 \vee 1 \text{ м.в. для } x\in\Omega,\ i = 1,...,N\};\ \tau = (\tau_1,..., \tau_N) \in \underbrace{\Omega\times...\times\Omega}_{N} =\Omega^N.$$

Для задачі В у роботі [7] доведена наступна теорема 1, що встановлює вид оптимального розв’язку $(\lambda_*(\cdot),\tau_*)$.

Теорема 1. Компоненти характеристичної вектор-функції $\lambda_*(x) = (\lambda_{*1}(x),...,\lambda_{*i}(x),...,\lambda_{*N}(x))$, яка відповідає оптимальному розв’язку $\left(\Omega_{*1},...,\Omega_{*i},...,\Omega_{*N}\right)$ задачі **А** для $i=1,...,N$ та маже всіх $x\in\Omega$ мають вид:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } c(x,\tau_{*i})/w_i \le c(x,\tau_{*j})/w_j, \\ \quad i\ne j \text{ м.в. для } x\in\Omega,\ j=1,...,N, \text{ тоді } x\in\Omega_{*i}, \\ 0 \text{ в інших випадках,} \end{cases}$$

в якості $\tau_{*1},..., \tau_{*N}$ обирається оптимальний розв’язок задачі, яка є двоїстою до задачі В:

$$G(\tau) = \int_\Omega \min_{i=1,...,N} [c(x,\tau_i)/w_i]dx \to \min,\ \tau\in\Omega^N.$$

Тепер наведемо теорему 2, засновану на результатах з робіт [7, 12], яка підводить підсумок нашим міркуванням і буде використана в подальшому при формулюванні алгоритму розв'язання задачі А.

Теорема 2. Компоненти характеристичної вектор-функції $\lambda_*(x) = (\lambda_{*1}(x),...,\lambda_{*i}(x),...,\lambda_{*N}(x))$, яка відповідає оптимальному розв’язку $\left(\Omega_{*1},...,\Omega_{*i},...,\Omega_{*N}\right)$ задачі **А** для $i=1,...,N$ та майже всіх $x\in\Omega$ мають вид:

$$\lambda_{*i}(x) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } c(x,\tau_{*i})/w_i \le c(x,\tau_{*j})/w_j, \\ \quad i\ne j \text{ м.в. для } x\in\Omega,\ j=1,...,N, \text{ тоді } x\in\Omega_{*i}, \\ 0 \text{ в інших випадках,} \end{cases} \quad (12)$$

в якості $\tau_{*1},..., \tau_{*N}$ обирається оптимальний розв’язок задачі

$$G(\tau) = \int_\Omega \min_{i=1,...,N} [c(x,\tau_i)/w_i]dx \to \min,\ \tau\in\Omega^N. \quad (13)$$

Тут кожний параметр w_i, $i=1,...,N$, указаний раніше як вихід w, що залежить від входів $y_1,...,y_q$ у вигляді $w = w(y_1,...,y_q)$, розраховується за формулам (4)-(7).

Алгоритм розв’язання задачі А. Для опису алгоритму визначимо i-у, $i=1,...,N,$ компоненту вектора узагальненого градієнта $g_G^{\tau}(\tau) = \left(g_G^{\tau_1}(\tau),...,g_G^{\tau_i}(\tau),...,g_G^{\tau_N}(\tau)\right)$ функції (13) в точці τ таким чином:

$$g_G^{\tau_i}(\tau) = \int_\Omega g_c^{\tau_i}(x;\tau)\,\lambda_i(x)dx,\quad i=1,...,N, \quad (14)$$

де $g_c^{\tau_i}(x,\tau)$ – i-а компонента N-вимірного вектора узагальненого градієнта

$g_c^\tau(x,\tau)$ функції $c(x,\tau_i)$ в точці τ.

В формулі (14) $\lambda_i(x)$, $i=1,...,N$, визначається таким чином:

$$\lambda_i(x)=\begin{cases}1, \text{ якщо } c(x,\tau_i)/w_i \le c(x,\tau_j)/w_j, \\ \quad i\ne j \text{ м.в. для } x\in\Omega,\ j=1,...,N, \text{ тоді } x\in\Omega_i, \\ 0 \text{ в інших випадках,}\end{cases} \tag{15}$$

де w_i, $i=1,...,N$, розраховуються за формулам (4)-(7).

Алгоритм. Область Ω укладаємо в n-вимірний паралелепіпед П, сторони якого паралельні вісям декартової системи координат. Паралелепіпед П покриваємо прямокутною сіткою і задаємо початкове наближення $\tau=\tau^{(0)}$. Обчислюємо значення $\lambda^{(0)}(x)$ в вузлах сітки за формулами (15) з урахуванням формул (4)-(7) для обчислення параметрів w_i, при $\tau=\tau^{(0)}$; значення $g_G(\tau)$ – за формулою (14) при $\lambda(x)=\lambda^{(0)}(x)$, $\tau=\tau^{(0)}$; обираємо початковий пробний крок r-алгоритму $h_0>0$ та знаходимо

$$\tau^1=\mathrm{P}_\Pi\left(\tau^0-h_0\frac{H_1 g_G(\tau^0)}{\sqrt{\left(H_1 g_G(\tau^0),g_G(\tau^0)\right)}}\right),$$

P_Π – оператор проектування на П.

Переходимо до другого кроку.

Нехай в результаті обчислень після k $(k=1,2,...,)$ кроків алгоритму отримані значення $\tau^{(k)},\lambda^{(k-1)}(x)$ в вузлах сітки.

Опишемо (k+1)-й крок.

1. Обчислюємо значення $\lambda^{(k)}(x)$ в вузлах сітки за формулами (15), з урахуванням формул (4)-(7) для обчислення параметрів w_i, при $\tau=\tau^{(k)}$.

2. Знаходимо значення $g_G(\tau)$ за формулами (14) при $\lambda(x)=\lambda^{(k)}(x)$, $\tau=\tau^{(k)}$.

3. Проводимо (k+1)-й крок r-алгоритму в H-формі, ітераційна формула якого має вид

$$\tau^{k+1}=\mathrm{P}_\Pi\left(\tau^k-h_k\frac{H_{k+1} g_G(\tau^k)}{\sqrt{\left(H_{k+1} g_G(\tau^k),g_G(\tau^k)\right)}}\right),$$

4. Якщо умова

$$\left\|\tau^k-\tau^{k+1}\right\|\le\varepsilon,\ \varepsilon>0, \tag{16}$$

не виконується, переходимо до (k+2)-го кроку алгоритму, в протилежному випадку – до п. 5.

5. Приймаємо $\lambda_*(x)=\lambda^{(l)}(x)$, $\tau_*=\tau^{(l)}$, де l – номер ітерації, на якій викона-

лася умова (16).

6. Обчислюємо оптимальне значення цільової функції $G(\tau)$ з (13) за формулою

$$G(\tau) = \int\limits_{\Omega} \min_{i=1,\dots,N} [c(x,\tau_i) / w_i] dx,$$

при $\tau = \tau_*$ та w_i, $i = 1,\dots,N$, обчислених за формулами (14)-(17).

Алгоритм описаний.

Таким чином, в результаті розв'язку задачі А описаним алгоритмом, який заснований на наведеній вище теоремі 2, одержуємо сукупність багатогранників Вороного (3) точок-генераторів τ_i, $i = 1,\dots,N$:

$$\mathrm{Vor}(\tau_i) = \left\{ x \in \Omega \subset \mathrm{E}_n : c(x,\tau_i) / w_i \le c(x,\tau_j) / w_j, i \ne j,\ j = 1,\dots,N \right\},$$

але на відміну від стандартної діаграми Вороного (1), в якій точки $\tau_1,\dots,\tau_N$ фіксовані і параметри w_i, $i = 1,\dots,N$ чіткі, для відшукання координат точок-генераторів $\tau_1,\dots,\tau_N$, оптимально розміщених в $\Omega \subset E_n$, потрібно розв'язання скінченновимірної задачі оптимізації

$$G(\tau) = \int\limits_{\Omega} \min_{i=1,\dots,N} [c(x,\tau_i) / w_i] dx \to \min,\quad \tau \in \Omega^N = \underbrace{\Omega \times \dots \times \Omega}_{N},$$

з недиференційовною цільовою функцією $G(\tau)$ та параметрами w_i, $i = 1,\dots,N$, відновленими за допомогою методу нейролінгвістичої ідентифікації невідомих складних нелінійних залежностей.

Висновки. Запропоновано метод і алгоритм побудови мультиплікативно зваженої діаграми Вороного при наявності нечітких параметрів з оптимальним розміщенням скінченної кількості точок-генераторів в обмеженій множині *n*-вимірного евклідового простору E_n. Метод заснований на формулюванні відповідної неперервної задачі оптимального розбиття множини на підмножини, що не перетинаються, з розміщенням центрів цих підмножин при наявності нечітких параметрах в цільовому функціоналі та з критерієм якості розбиття, що забезпечує відповідний вид діаграми Вороного з нечіткими параметрами. Метод розв'язання названої вище задачі оптимального розбиття множин заснований на застосуванні математичного апарату, розробленого в [12], при цьому для зняття нечіткості в задачі ОРМ використаний метод нейролінгвістичній ідентифікації, розроблений в [8].

Бібліографічні посилання

1. **Preparata, F.** Computational geometry: an introduction / F. Preparata, M. Sheimos. – Springer. First Edition edition, 1993. – 390 p.
2. **Kiseleva, E.M.** Theory of continuous optimal set partitioning problems as a universal mathematical formalism for constructing Voronoi diagrams and their generalizations I. Theoretical foundations / E.M. Kiseleva, L.S. Koriashkina // Cybernetics and Systems Analysis, vol. 51, № 3, pp. 325-335 (2015). DOI 10.1007/s10559-015-9725-x.
3. **Kiseleva, E.M.** Theory of continuous optimal set partitioning problems as a universal mathematical formalism for constructing voronoi diagrams and their generalizations. II.

Algorithms for constructing Voronoi diagrams based on the theory of optimal set partitioning / E.M. Kiseleva, L.S. Koriashkina // Cybernetics and Systems Analysis, vol. 51, № 4, pp. 489-499 (2015). DOI: 10.1007/s10559-015-9740-y.
4. **Aurenhammer, F.** Voronoi Diagrams and Delaunay Triangulations. / F. Aurenhammer, R. Klein, D.-T. Lee. – World Scientific Pub Co Inc, 2013. – 337 p.
5. **Okabe, A.** Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi / A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara, S.N. Chiu // West Sussex, England: John Wiley and Sons Ltd, second ed., 2000. – 696 p.
6. **Trubin, Stanislav I.** Information Space Mapping with Adaptive Multiplicatively Weighted Voronoi Diagrams / Stanislav I. Trubin // Thesis (M.S.) – Origon State University. – 2007.
7. **Киселева, Е.М.** Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения. / Е.М. Киселева, Н.З. Шор. – К.: Наукова думка, 2005. –564 с.
8. **Kiseleva, E.M.** Algorithm for Solving a Continuous Problem of Optimal Partitioning with Neurolinguistic Identification of Functions in Target Functional / E.M. Kiseleva, O.M. Pritomanova, S.V. Zhuravel // Journal of Automation and Information Science, vol. 50, № 3, pp. 1-20 (2018). DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v50.i3.10.
9. **Шор, Н.З.** Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения / Н.З. Шор. – К.: Наук. думка, 1979. – 200 с.
10. **Stetsyuk, P.I.** Shor's r-Algorithms: Theory and Practice / P.I. Stetsyuk // In: Optimization Methods and Applications: In Honor of the 80th Birthday of Ivan V. Sergienko. Ed. by Butenko S., Pardalos P.M, Shylo V. Springer. – 2017. – P. 495–520.
11. **Киселева, Е.М.** Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств: линейные, нелинейные, динамические / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина. – К.: Наукова думка, 2013. – 606 с.
12. **Kiseleva, E.** An Algorithm to Construct Generalized Voronoi Diagrams with Fuzzy Parameters Based on the Theory of Optimal Partitioning and Neuro-Fuzzy Technologies / E. Kiseleva, L. Hart, O. Prytomanova, O. Kuzenkov – URL: http://ceur-ws.org/Vol-2386/paper12.pdf.

Надійшла до редколегії 10.10. 2019.