УДК 519.8 doi: 10.15421/321911

О.М. Кісельова[1], О.М. Притоманова[1], С.В. Дзюба[2], В.Г. Падалко[1]
[1] *Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*
[2] *Придніпровський науковий центр НАН України та МОН України*

РОЗВ'ЯЗАННЯ ДВОЕТАПНОЇ НЕПЕРЕРВНО-ДИСКРЕТНОЇ ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ-РОЗПОДІЛУ З НЕЧІТКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Запропоновано метод розв'язання двоетапної неперервно-дискретної задачі оптимального розбиття-розподілу з нечіткими параметрами у цільовому функціоналі, який базується на застосуванні методу нейролінгвістичної ідентифікації невідомих залежностей для відновлення чітких значень нечітких параметрі, методів теорії оптимального розбиття множин та методу потенціалів розв'язання транспортної задачі.

Ключові слова: нескінченновимірне математичне програмування, оптимальне розбиття-розподілення, недиференційовна оптимізація, нейронечіткі технології.

Предложен метод решения двухэтапной непрерывно-дискретной задачи оптимального разбиения-распределения с нечеткими параметрами в целевом функционале, который основан на применении метода нейролингвистической идентификации неизвестных зависимостей для восстановления четких значений нечетких параметров, методов теории оптимального разбиения множеств и метода потенциалов решения транспортной задачи.

Ключевые слова: бесконечномерное математическое программирование, оптимальное разбиение-распределение, недифференцируемая оптимизация, нейронечеткие технологии.

The theory of optimal set partitioning from an n-dimensional Euclidean space E_n is an important part of infinite-dimensional mathematical programming.

The mostly reason of high interest in development of the theory of optimal set partitioning is that its results can be applied to solving the classes of different theoretical and applied optimization problems, which are transferred into continuous optimal set partitioning problem.

This paper investigates the further development of the theory of optimal set partitioning from E_n in the case of a two-stage continuous-discrete problem of optimal partitioning-distribution with non-determined input data, which is frequently appear in solving practical problems.

The two-stage continuous-discrete problem of optimal partition-distribution under constraints in the form of equations and determined position of centers of subsets is generalized by proposed continuous-discrete problem of optimal partition-distribution in case if some parameters are presented in incomplete, inaccurate or unreliable form. These parameters can be represented as linguistic variables and the method of neurolinguistic identification of unknown complex, nonlinear dependencies can be used in purpose to recovery them.

A method for solving the two-stage continuous-discrete optimal partitioning-distribution problem with fuzzy parameters in target functional which based on usage of neurolinguistic identification of unknown dependencies for recovering precise values of fuzzy parameters, methods of the theory of optimal set partitioning and the method of potentials for solving a transportation problem is proposed.

Keywords: infinite-dimensional mathematical programming, optimal partitioning-allocation, non-differentiable optimization, neurofuzzy technologies.

Вступ. Необхідність у вивченні неперервних моделей оптимального розбиття множин (ОРМ) n-вимірного евклідового простору E_n викликана тим, що до таких моделей зводяться в математичній постановці багато абсолютно різних за своєю природою оптимізаційних теоретичних та прикладних задач [1]. Активно розвивається в даний час такий клас неперервних задач ОРМ, як задачі ОРМ в умовах невизначеності (стохастичні, нечіткі) [2].

Ця стаття присвячена подальшому розвитку теорії оптимального розбиття множин із E_n на випадок двоетапної неперервно-дискретної задачі оптимального розбиття-розподілу в умовах невизначеності вхідних даних, які часто зустрічаються на практиці. Відзначимо, що класична скінченновимірна транспортна задача розглядається в роботі [3], дискретні двоетапні виробничо-транспортні задачі розглядаються в роботі [4]. В роботі [5] представлена класична скінченновимірна транспортна задача в умовах невизначеності.

Запропонована неперервно-дискретна задача оптимального розбиття-розподілу узагальнює двоетапну неперервно-дискретну задачу оптимального розбиття-розподілу при обмеженнях у вигляді рівностей та заданим положенням центрів підмножин, яка розглянута в [6], на випадок, коли деякі параметри задачі можуть бути задані неповно, неточно, недостовірно. Тоді дані параметри можна розглядати як лінгвістичні змінні. Для їх відновлення використовується метод нейролінгвістичній ідентифікації невідомих складних, нелінійних залежностей [7].

В даній статті запропоновано метод розв’язання сформульованої задачі, який базується на використанні методу нейролінгвістичної ідентифікації невідомих залежностей для відновлення чітких значень тих параметрів задачі, які задані нечітко, методів теорії оптимального розбиття множин та методу потенціалів розв’язання транспортної задачі.

Постановка задачі. Нехай Ω – обмежена, замкнута, вимірна за Лебегом множина в n-вимірному евклідовому просторі E_n.

Сукупність вимірних за Лебегом підмножин $\Omega_1,...,\Omega_N$ з $\Omega \subset \mathrm{E}_n$ будемо називати можливим розбиттям множини Ω на його підмножини $\Omega_1,...,\Omega_N$, що не перетинаються, якщо

$$\bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega,\ mes\left(\Omega_i \cap \Omega_j\right) = 0,\ i \neq j,\ \ i, j = 1,...,N,$$

де $\mathrm{mes}(\cdot)$ означає міру Лебега.

Позначимо клас всіх можливих розбиттів множини Ω на підмножини $\Omega_1,...,\Omega_N$, що не перетинаються, через $\sum_{\Omega}^{N}$, тобто

$$\Sigma_{\Omega}^{N} = \left\{ (\Omega_1,...,\Omega_N) : \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i = \Omega, mes\left(\Omega_i \cap \Omega_j\right) = 0, i \neq j, i, j = 1,...,N \right\}.$$

Введемо функціонал

$$F(\{\Omega_1,...,\Omega_i,...,\Omega_N\},\{v_{11},...,v_{ij},...,v_{NM}\}) = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} c_i^I(x,\ \tau_i^I)\rho(x)dx + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} c_{ij}^{II}\left(\tau_i^I, \tau_j^{II}\right)v_{ij}\,. \tag{1}$$

В (1) функції $c_i^I\left(x, \tau_i^I\right),\ i = 1,...,N$, є функціями відстані між точками x і τ_i^I для I-го етапу та визначаються як одна з метрик [2]:

$$c(x,\tau_i) = \|x - \tau_i\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x^{(k)} - \tau_i^{(k)})^2} \text{ – евклідова,} \tag{2}$$

$$c(x,\tau_i) = \|x - \tau_i\|_1 = \sum_{k=1}^{n}\left|x^{(k)} - \tau_i^{(k)}\right| \text{ – манхеттенська,} \tag{3}$$

$$c(x,\tau_i) = \|x - \tau_i\|_0 = \max_{k=1,...,n}\left\{\left|x^{(k)} - \tau_i^{(k)}\right|\right\} \text{ – Чебишева;} \tag{4}$$

функції $c_{ij}^{II}\left(\tau_i^I, \tau_j^{II}\right),\ i = 1,...,N,\ j = 1,...,M$, є функціями відстані між точками τ_i^I і τ_j^{II} для II-го етапу, які визначаються аналогічно функціям відстані I-го етапу.

Для практичних задач відстані між споживачами і підприємствами I-го етапу, а також відстані між підприємствами I-го та II-го етапів можуть істотно відрізнятися від відстаней, що розраховуються за допомогою «формальних» метрик (2)-(4). Ці відмінності можуть бути задані нечітко за допомогою множника – вектора нечітких параметрів $\tilde{a} = (\tilde{a}_1,...,\tilde{a}_N)$ для кожної функції $c_i^I\left(x, \tau_i^I\right),\ i = 1,...,N$ та вектора нечітких параметрів $\tilde{w} = (\tilde{w}_{11},...,\tilde{w}_{NM})$ для кожної функції $c_{ij}^{II}\left(\tau_i^I, \tau_j^{II}\right),\ i = 1,...,N,\ j = 1,...,M$.

Тоді функціонал (1) запишемо у виді

$$F(\{\Omega_1,...,\Omega_i,...,\Omega_N\},\{v_{11},...,v_{ij},...,v_{NM}\},\tilde{a},\tilde{w}) = = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} \tilde{a}_i c_i^I(x,\ \tau_i^I)\rho(x)dx + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} \tilde{w}_{ij} c_{ij}^{II}\left(\tau_i^I, \tau_j^{II}\right)v_{ij}. \tag{5}$$

Перш ніж формулювати математичну постановку двоетапної неперервно-дискретної лінійної однопродуктової задачі оптимального розбиття-розподілу на випадок заданих координат центрів підмножин і при обмеженнях у вигляді рівностей, знімемо нечіткість у функціоналі (5) за допомогою методу нейролінгвістичної ідентифікації з [7].

Для спрощення опису методу нейролінгвістичної ідентифікації для відновлення значень нечітких параметрів $\tilde{a}_1,...,\tilde{a}_N$, $\tilde{w}_{11},...,\tilde{w}_{NM}$ позначимо їх відновленні значення як y та розглянемо функціональну залежність виходу y від входів $z_1,...,z_q$ об'єкта ідентифікації у виді:

$$y = y(z_1,...,z_q), \tag{6}$$

тут $z_1,...,z_q$ - фактори, що впливають на y, та можуть бути задані нечітко. Для задачі ідентифікації передбачаються відомими області визначення входів $z_1,...,z_q$, область зміни виходу y для (6), а також експертно-експериментальна інформація про залежність (6) у вигляді вибірки даних про входи і вихід об'єкта ідентифікації.

Задача ідентифікації (відновлення) складної нелінійної залежності виду (6) розглядається як побудова моделі об'єкта за експертно-експериментальними даними про взаємозв'язки <входи> - <вихід> та вирішується, як правило, в два етапи [7]:

- структурна ідентифікація: формування нечіткої бази знань про об'єкт і побудова на її основі нечіткої моделі об'єкта з кількома входами і одним виходом, яка грубо відтворює залежність виходу від входів за допомогою лінгвістичних правил «ЯКЩО-ТО», що генеруються з експериментальних даних;

- параметрична ідентифікація (настройка): пошук таких параметрів нечіткої моделі, які мінімізують відхилення модельних значень від експериментальних.

У результаті застосування методу нейролінгвістичної ідентифікації отримуємо точне (чітке) значення вихідної змінної y, яке розраховується за такими формулами:

$$y = \frac{\sum_{k=1}^{L} d_k \cdot \mu*_{D_k}(y)}{\sum_{k=1}^{L} \mu*_{D_k}(y)}, \tag{7}$$

$$\mu*_{D_k}(y) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{s_k} p*_j^k(z_1,z_2,...,z_q), & \text{якщо} \quad \sum_{j=1}^{s_k} p*_j^k(z_1,z_2,...,z_q) \le 1, \\ 1 & \text{в інших випадках,} \end{cases} \tag{8}$$

$$p*_j^k(z_1,z_2,...,z_q) = v*_j^k \prod_{i=1}^{q} \mu*_{ij}^k(z_i), \tag{9}$$

$$\mu*_{ij}^k(z_i) = \frac{1}{1+\left(\frac{z_i - t*_{ij}^k}{e*_{ij}^k}\right)^2}, \; i=1,...,q, \; j=1,...,s_k, \; \text{k = 1, 2, …, L}, \tag{10}$$

де у формулах (7)-(10):

- $\mu*_{D_k}(y)$ - функція належності вихідної змінної y класу D_k, $k=1,2,\ldots,L$, L - кількість класів (лінгвістичних термів) вихідної змінної y, d_k - центр класу D_k;

- $p*_j^k(z_1, z_2, ..., z_q)$ - нечіткі продукційні правила, які отримуються з експертно-експериментальної інформації про залежність (6), j - номер правила у k-у класі, $j = 1, 2, \ldots, s_k$, s_k - кількість правил у k-ом класі; $v*_j^k$ - вага j-го правила у k-у класі виходу;
- $\mu*_{ij}^k(z_i)$ - дзвонова функція належності змінної z_i її лінгвістичному терму у j-у правилі k-го класу виходу вихідної змінної y, $t*_{ij}^k$ - координата максимуму і $e*_{ij}^k$ - коефіцієнт концентрації цієї функції належності.

Зауваження. Значення $v*_j^k$ - ваг правил у (9) та параметрів $t*_{ij}^k$, $e*_{ij}^k$ функції належності (10) відмічені зірочкою як оптимальні, тобто такі, що отримані у результаті етапу параметричної ідентифікації методу нейролінгвістичної ідентифікації, для яких відхилення експериментальних даних від модельних, отриманих після настройки нечіткої моделі об'єкта (6), досягає мінімального значення. Значення $\mu*_{D_k}(y)$, $p*_j^k(z_1, z_2, ..., z_q)$ та $\mu*_{ij}^k(z_i)$ у (7)-(10) обчислюються при оптимальних значеннях $v*_j^k$, $t*_{ij}^k$, $e*_{ij}^k$.

Таким чином, після відновлення значень нечітких параметрів $\tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_N$, $\tilde{w}_{11}, ..., \tilde{w}_{NM}$ у функціоналі (5) за допомогою описаного методу нейролінгвістичної ідентифікації, отримуємо їх відновлені (чіткі) значення $a_1, ..., a_N$, $w_{11}, ..., w_{NM}$.

Сформулюємо тепер математичну постановку двоетапної неперервно-дискретної лінійної однопродуктової задачі оптимального розбиття-розподілу на випадок заданих координат центрів підмножин і при обмеженнях у вигляді рівностей та відновленими значеннями її нечітких параметрів.

Задача 1. Знайти таке розбиття множини Ω на N вимірних за Лебегом підмножин $\Omega_{*1}, ..., \Omega_{*N}$ і такий невід'ємний вектор $v_* = \left(v_{*11}, ..., v_{*ij}, ..., v_{*NM}\right) \in E_{NM}$, які забезпечують

$$\min_{\{\Omega_1, ..., \Omega_N\}, \{v_{11}, ... v_{NM}\}} F(\{\Omega_1, ..., \Omega_N\}, \{v_{11}, ... v_{NM}\})$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{M} v_{ij} = \int_{\Omega_i} \rho(x) dx, \ i = 1, ..., N; \ \sum_{i=1}^{N} v_{ij} = b_j^{II}, \ j = 1, ..., M;$$

$$\left\{\Omega_1, ..., \Omega_N\right\} \in \Sigma_\Omega^N; \ v_{ij} \geq 0, \ i = 1, ..., N, \ j = 1, ..., M;$$

$$x = \left(x^{(1)}, ..., x^{(n)}\right) \in \Omega; \quad \in \underbrace{\Omega \times ... \times \Omega}_{N} = \Omega^N, \ \tau^{II} = \left(\tau_1^{II}, ..., \tau_M^{II}\right) \in \Omega^M,$$

де

$$F(\{\Omega_1,...,\Omega_i,...,\Omega_N\},\{v_{11},...,v_{ij},...,v_{NM}\}) = \\ = \sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i} a_i c_i^I(x,\ \tau_i^I)\rho(x)dx + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} w_{ij}c_{ij}^{II}\left(\tau_i^I,\tau_j^{II}\right)v_{ij}. \tag{11}$$

У функціоналі (11) кожний з параметрів a_i, w_{ij}, $i=1,...,N$, $j=1,...,M$, позначений раніше, як вихід y, що залежить від входів $z_1,...,z_q$, у методі нейролінгвістичної ідентифікації, розраховується за формулами (7)-(10).

Тут b_j^{II}, $j=1,...,M$, – задані невід’ємні числа, причому виконуються умови розв’язуваності задачі

$$S=\int_{\Omega}\rho(x)dx=\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega_i}\rho(x)dx=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}v_{ij}=\sum_{j=1}^{M}b_j^{II},\ 0\le b_j^{II}\le S,\ j=1,...,M.$$

Зауважимо, що в термінах класичної транспортної задачі вектор $v=\left(v_{11},...v_{NM}\right)$ має значення обсягів транспортування продукції з пунктів першого етапу τ_i^I, $i=1,...,N$, до пунктів τ_j^{II}, $j=1,...,M$, кінцевого споживання (другого етапу).

Функція $\rho(x)$ – дійсна, обмежена, вимірна, невід’ємна на Ω; $\tau_i^I=\left(\tau_i^{I(1)},...,\tau_i^{I(n)}\right)$, $i=1,...,N$, – деяка задана еталонна точка для підмножини Ω_i, яку позначають центром цієї підмножини; $\tau_j^{II}=\left(\tau_j^{II(1)},...,\tau_j^{II(n)}\right)$, $j=1,...,M$, – деяка задана точка множини Ω.

Тут і надалі інтеграли розуміються в сенсі Лебега. Будемо вважати, що міра множини граничних точок підмножин $\Omega_i, i=1,...,N,$ дорівнюють нулю.

Пару $(\{\Omega_{*1},...,\Omega_{*N}\},\{v_{*11},...v_{*NM}\})$, що є розв’язкам задачі 1, назвемо оптимальною.

Введемо характеристичну функцію

$$\lambda_i(x)=\begin{cases}1,\ x\in\Omega_i,\\ 0,\ x\in\Omega\setminus\Omega_i,\end{cases}$$

підмножини Ω_i, $i=1,...,N$.

Розглянемо функціонал

$$I(\lambda(\cdot),v)=\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}a_i c_i^I(x,\tau_i^I)\rho(x)\lambda_i(x)dx+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}w_{ij}c_{ij}^{II}\left(\tau_i^I,\tau_j^{II}\right)v_{ij}, \tag{12}$$

де вектор-функція $\lambda(x)$ має вид $\lambda(x)=\left(\lambda_1(x),...,\lambda_i(x),...,\lambda_N(x)\right)$, а вектор v має вид $v=\left(v_{11},...,v_{ij},...,v_{NM}\right)$. Очевидно, що $I\left(\lambda(\cdot),v\right)=F\left(\{\Omega_1,...,\Omega_N\},\{v_{11},...,v_{NM}\}\right)$.

Перепишемо задачу 1 в термінах характеристичної функції $\lambda_i(x)$ підмножини Ω_i, $i=1,...,N$, у такому виді.

Задача 2. Знайти

$$\min_{(\lambda(\cdot),v)} I(\lambda(\cdot),v),$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{M} v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x)\lambda_i(x)dx,\ \ i=1,...,N;\ \sum_{i=1}^{N} v_{ij} = b_j^{II},\ \ j=1,...,M;$$

$$\lambda_i(x) = 0 \vee 1 \text{ майже всюди (м.в.) для } x\in\Omega,\ i=1,...,N;$$

$$\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\left(x\right) = 1 \text{ м.в. для } x\in\Omega;\ v_{ij}\ge 0,\ i=1,...,N,\ j=1,...,M.$$

Від нескінченновимірної задачі 2 з булевими значеннями змінних $\lambda_i(\cdot)$, $i=1,...,N$, перейдемо до відповідної задачі зі значеннями $\lambda_i(\cdot)$ з відрізку $[0,1]$.

Задача 3. Зайти

$$\min_{(\lambda(\cdot),v)\in\Gamma_1\times Q} I(\lambda(\cdot),v),$$

де

$$\Gamma_1 = \{\lambda\left(x\right) = \left(\lambda_1\left(x\right),...,\lambda_N\left(x\right)\right)\in\Gamma \text{ м.в. для } x\in\Omega;$$

$$\sum_{j=1}^{M} v_{ij} = \int_{\Omega}\rho(x)\lambda_i(x)dx,\ i=1,...,N;\ \sum_{i=1}^{N} v_{ij} = b_j^{II},\ \ j=1,...,M\}.$$

$$\Gamma = \{\lambda\left(x\right): 0\le\lambda_i\left(x\right)\le 1, x\in\Omega,\ i=1,...,N;\ \sum_{i=1}^{N}\lambda_i\left(x\right) = 1 \text{ м.в. для } x\in\Omega\};$$

$$Q = \{v = \left(v_{11},...,v_{ij},...,v_{NM}\right): v_{ij}\ge 0, i=1,...,N, j=1,...,M\}.$$

При кожному фіксованому $v\in Q$ задача 3, як доведено в [1], має розв'язок, і у множині оптимальних розв'язків задачі 3 містяться оптимальні розв'язки задачі 2, що дозволяє в подальшому перейти до розгляду задачі 3.

Метод розв'язання задачі. Введемо функціонал Лагранжа для задачі 3 таким чином:

$$L\left(\left\{\lambda\left(\cdot\right),v\right\},\Psi\right) = I\left(\lambda\left(\cdot\right),v\right) + \sum_{i=1}^{N}\psi_i\left(\int_{\Omega}\rho\left(x\right)\lambda_i\left(x\right)dx - \sum_{j=1}^{M} v_{ij}\right) + \sum_{j=1}^{M}\eta_j\left(b_j^{II} - \sum_{i=1}^{N} v_{ij}\right), \qquad (13)$$

де $\Psi = \left(\psi_1,...,\psi_i,...,\psi_N;\eta_1,...,\eta_j,...,\eta_M\right)$ – $\left(N+M\right)$-вимірний вектор дійсних чисел довільного знаку; $\lambda\left(x\right) = \left(\lambda_1\left(x\right),...,\lambda_N\left(x\right)\right)\in\Gamma$ м.в. для $x\in\Omega$; $v = \left(v_{11},...,v_{ij},...,v_{NM}\right)$ - $N\times M$ - вимірний вектор дійсних невід'ємних чисел.

Пару елементів $\left(\left\{\lambda_*\left(\cdot\right),v_*\right\},\Psi^*\right)$ назвемо сідловою точкою функціоналу (13) на множині $\left\{\Gamma\times Q\right\}\times\Lambda$, де

$$Q = \left\{v = \left(v_{11},...,v_{ij},...,v_{NM}\right): v_{ij}\ge 0,\ i=1,...,N,\ j=1,...,M\right\},$$

$$\Lambda = \left\{\Psi = \left(\psi;\eta\right)\in E_{N+M}: \psi = \left(\psi_1,...,\psi_N\right)\in E_N, \eta = \left(\eta_1,...,\eta_M\right)\in E_M\right\},$$

якщо $L\left(\left\{\lambda_*(\cdot),v_*\right\},\Psi\right)\le L\left(\left\{\lambda_*(\cdot),v_*\right\},\Psi^*\right)\le L\left(\left\{\lambda(\cdot),\tau\right\},\Psi^*\right)$ для $\lambda(\cdot)\in\Gamma$, $v\in Q$, $\Psi\in\Lambda$,

або $L\left(\left\{\lambda_*(\cdot),v_*\right\},\Psi^*\right)=\min\limits_{\{\lambda(\cdot),v\}\in\Gamma\times Q}\max\limits_{\Psi\in\Lambda}L\left(\left\{\lambda(\cdot),v\right\},\Psi\right)=\max\limits_{\Psi\in\Lambda}\min\limits_{\{\lambda(\cdot),v\}\in\Gamma\times Q}L\left(\left\{\lambda(\cdot),v\right\},\Psi\right).$

Введемо функціонали

$$X\left(\left\{\lambda(\cdot),v\right\}\right)=\max_{\Psi\in\Lambda}L\left(\left\{\lambda(\cdot),v\right\},\Psi\right),\ \left\{\lambda(\cdot),v\right\}\in\Gamma\times Q,$$

$$G(\Psi)=\min_{\{\lambda(\cdot),v\}\in\Gamma\times Q}L\left(\left\{\lambda(\cdot),v\right\},\Psi\right),\ \Psi\in\Lambda.$$

Розглянемо задачі

$$X\left(\left\{\lambda(\cdot),v\right\}\right)\to\min,\ \left\{\lambda(\cdot),v\right\}\in\Gamma\times Q. \tag{14}$$

$$G(\Psi)\to\max,\ \Psi\in\Lambda. \tag{15}$$

Задачу (14) назвемо прямою, а задачу (15) – двоїстою до задачі (14).

Неважко показати, слідуючи [2], що задачі (14), (15) пов'язані співвідношенням двоїстості $X_*=G^*$ і розв'язок пари двоїстих задач (14) і (15), (кожна з яких розв'язувана) еквівалентний відшуканню сідлової точки функціонала Лагранжа (13) на множині $\left\{\Gamma\times Q\right\}\times\Lambda$.

Для відшукання сідлової точки функціонала Лагранжа (13), виходячи з [1], запишемо двоїсту задачу (15) у вигляді

$$\begin{gathered}G(\Psi)=G_2(\psi)=\int\limits_{\Omega}\min_{k=1,...,N}\left(a_kc_k^I\left(x,\tau_k^I\right)+\psi_k\right)\rho(x)dx+\\+\sum_{j=1}^{M}b_j^{II}\min_{k=1,...,N}\left(w_{ik}c_{kj}^{II}\left(\tau_k^I,\tau_j^{II}\right)-\psi_k\right)\to\max_{\psi},\end{gathered} \tag{16}$$

$$\psi=\left(\psi_1,...,\psi_N\right)\in E_N. \tag{17}$$

Таким чином, перша компонента $\lambda_*(\cdot)=\left(\lambda_{*1}(\cdot),...,\lambda_{*i}(\cdot),...,\lambda_{*N}(\cdot)\right)$ оптимального розв'язку задачі 3 визначається для всіх $i=1,...,N$, та майже всіх $x\in\Omega$ таким чином:

$$\lambda_{*i}(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо}\quad a_ic_i^I\left(x,\tau_{*i}^I\right)+\psi_i^*\le a_kc_k^I\left(x,\tau_{*k}^I\right)+\psi_k^*,\ i\ne k,\ k=1,...,N,\\0 & \text{в інших випадках,}\end{cases}$$

у якості $\psi_1^*,...,\psi_N^*$ вибирається оптимальний розв'язок двоїстої задачі (15), приведеної до виду (16), (17).

Друга компонента $v_*=\left(v_{*11},...,v_{*ij},...,v_{*NM}\right)$ відшукується як оптимальний розв'язок наступної скінченновимірної транспортної задачі методом потенціалів [3]:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}w_{ij}c_{ij}^{II}\left(\tau_{*i}^I,\tau_j^{II}\right)v_{ij}\to\min_{v} \tag{18}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{M} v_{ij} = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_{*i}(x) dx, \ i = 1,...,N, \tag{19}$$

$$\sum_{i=1}^{N} v_{ij} = b_j^{II}, \ \ j = 1,...,M, \tag{20}$$

$$v_{ij} \geq 0, i = 1,...,N, \ j = 1,...,M, \tag{21}$$

причому виконується умова балансу

$$\int_{\Omega} \rho(x) dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{\Omega_i} \rho(x) dx = \sum_{j=1}^{M} b_j^{II}. \tag{22}$$

Далі наведемо алгоритм розв'язання задачі 3, складовими якого є один з варіантів r-алгоритму Н.З. Шора з [8], який застосовується для числового розв'язку двоїстої задачі (16)-(17), з урахуванням недиференційовності функції $G_2(\psi)$, і метод потенціалів з [3], що застосовується для розв'язання задачі (18)-(22) відшукання значення другої компоненти v_* оптимального розв'язку задачі 3.

Алгоритм розв'язання задачі. Перш ніж сформулювати алгоритм розв'язання задачі 3, визначимо i-у, $i = 1,...,N,$ компоненту вектора узагальненого градієнта $g_{G_2}(\psi) = \left(g_{G_2}^{\psi_1}(\psi),...,g_{G_2}^{\psi_i}(\psi),...,g_{G_2}^{\psi_N}(\psi)\right)$ функції $G_2(\psi)$ задачі (16) в точці $\psi = (\psi_1,...,\psi_N)$ таким чином:

$$g_{G_2}^{\psi_i}(\psi) = \int_{\Omega} \rho(x) \lambda_i(x) dx + \sum_{j=1}^{M} \left(b_j^{II} q_{ij}\right), \ i = 1,...,N, \tag{23}$$

де $\lambda_i(x) =$

$$= \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad a_i c_i^I\left(x, \tau_i^I\right) + \psi_i^* \leq a_k c_k^I\left(x, \tau_k^I\right) + \psi_k, i \neq k, \text{ м.в. для } x \in \Omega, \ k = 1,...,N, \\ 0 & \text{в інших випадках;} \end{cases} \tag{24}$$

$$q_{ij} = \begin{cases} -1, & w_{ij} c_{ij}^{II}\left(\tau_i^I, \tau_j^{II}\right) - \psi_i = \min\limits_{k=1,...,N}\left(w_{kj} c_{kj}\left(\tau_k^I, \tau_j^{II}\right) - \psi_k\right), i = 1,...,N, \ j = 1,...,M, \\ 0 & \text{в інших випадках.} \end{cases}$$

Далі опишемо алгоритм.

Алгоритм.

Попередній етап. Область Ω укладаємо в n-вимірний паралелепіпед Π, сторони якого паралельні вісям декартової системи координат, вважаємо $\rho(x) = 0$ для $x \in \Pi \setminus \Omega$. Паралелепіпед покриваємо прямокутною сіткою і задаємо початкове наближення $\psi = \psi^{(0)}$. Обчислюємо значення $\lambda^{(0)}(x)$ в вузлах сітки за формулами (24) при $\psi = \psi^{(0)}$ та значеннями параметрів $a_1,...,a_N$, відновленими за допомогою методу нейролінгвістичної ідентифікації за формулами (7)-(10). Обчислюємо значення вектору узагальненого градієнта $g_{G_2}(\psi)$ в вузлах сітки за формулою (23) при $\psi = \psi^{(0)}$, $\lambda(x) = \lambda^{(0)}(x)$.

Крок 1. Обчислюємо за формулою

$$\psi^{(1)} = \psi^{(0)} + h_0 g_{G_2}\left(\psi^{(0)}\right),$$

де h_0 – величина кроку, яка розраховується із умови максимуму функції $G_2(\psi)$ за напрямком узагальненого градієнта $g_{G_2}(\psi^{(0)})$.

Крок 2. Нехай в результаті обчислень після k, $k=2,3,...$, кроків алгоритму отримані значення $\psi^{(k)}$, $\lambda^{k-1}(x)$ в вузлах сітки.

Крок $(k+1)$*-й.*

1) обчислюємо значення $\lambda^{(k)}(x)$ у вузлах сітки за формулами (24) при $\psi=\psi^{(k)}$ та значеннями параметрів $a_1,...,a_N$, відновленими за допомогою методу нейролінгвістичної ідентифікації за формулами (7)-(10);

2) обчислюємо значення вектору $g_{G_2}(\psi)$ в вузлах сітки за формулам (23) при $\psi=\psi^{(k)}$, $\lambda(x)=\lambda^{(k)}(x)$;

3) проводимо обчислення за ітераційною формулою $\psi^{(k+1)}=\psi^{(k)}+h_k B_{k+1}^{\psi}\tilde{g}_{G_2}^{\psi}$, де B_{k+1}^{ψ} – оператор відображення перетвореного простору в основний простір E_N, причому $B_0^{\psi}=I_N$ (одинична матриця), $\tilde{g}_{G_2}^{\psi}=B_{k+1}^{*}g_{G_2}\left(\psi^{(k)}\right)$, h_k – величина кроку, яка визначається з умови максимуму функції $G_2(\psi)$ у напрямку узагальненого градієнта $g_{G_2}\left(\psi^{(k)}\right)$ в перетвореному просторі;

4) якщо умова

$$\left\|\psi^{(k+1)}-\psi^{(k)}\right\| \le \varepsilon,\ \varepsilon>0 \tag{25}$$

не виконується, переходимо до $(k+2)$-го кроку алгоритму, якщо виконується, то до п.5;

5) вважаємо $\psi^{*}=\psi^{l}$, $\lambda_{*}(x)=\lambda^{(l)}(x)$, де l-номер ітерації, на якій виконалася умова (25);

6) розв'язуючи транспортну задачу методом потенціалів при $\lambda(x)=\lambda_{*}(x)$, $\psi=\psi^{*}$ та значеннях параметрів $w_{11},...,w_{NM}$, відновлених за допомогою методу нейролінгвістичної ідентифікації за формулами (7)-(10), знаходимо $v_{*}=\left(v_{*11},...,v_{*NM}\right)$;

7) обчислюємо оптимальне значення цільового функціоналу $G_2(\psi)$ двоїстої задачі (16)-(17) при $\psi=\psi^{*}$ та, для контролю правильності розрахунків, оптимальне значення цільового функціонала (12) задачі 3 за формулою

$$I\left(\lambda_{*}(\cdot),v_{*}\right)=\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}a_i c_i^{I}\left(x,\tau_i^{I}\right)\rho(x)\lambda_{*i}(x)\,dx+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}w_{ij}c_{ij}^{II}\left(\tau_i^{I},\tau_j^{II}\right)v_{*ij},$$

де значення параметрів $a_1,...,a_N$, $w_{11},...,w_{NM}$ відновлені за допомогою методу нейролінгвістичної ідентифікації невідомих складних, нелінійних залежностей за формулами (7)-(10).

Завершення роботи алгоритму.

Висновки. Ця стаття присвячена подальшому розвитку теорії ОРМ n-вимірного евклідового простору E_n на випадок двоетапної неперервно-дискретної лінійної задачі оптимального розбиття-розподілу з нечіткими параметрами при обмеженнях у формі рівностей та заданим положенням центрів підмножин.

Запропоновано метод розв'язання даної задачі, заснований на застосуванні методу нейролінгвістичної ідентифікації невідомих залежностей для відновлення чітких значень нечітких параметрів, методів теорії оптимального розбиття множин та методу потенціалів розв'язання транспортної задачі.

Бібліографічні посилання

1. **Киселева, Е.М.** Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств: теория, алгоритмы, приложения [Текст] / Е.М. Киселева, Н.З. Шор. – К.: Наукова думка, 2005. – 564 с.
2. **Кісельова, О.М.** Становлення та розвиток теорії оптимального розбиття множин. Теоретичні і практичні застосування: монографія [Текст] / О.М. Кісельова. – Д.: Ліра, 2018. – 532 с.
3. **Гольштейн, Е.Г.** Задачи линейного программирования транспортного типа [Текст] / Е.Г. Гольштейн, Д.Б. Юдин. – М.: Наука, 1969. – 382 с.
4. **Стецюк, П.І.** Двоетапна транспортна задача та її AMPL-реалізація [Текст] / П.І. Стецюк, В.І. Ляшко, Г.В. Мазютинець // Наукові записки НаУКМА. Комп'ютерні науки. – 2018. – Т. 1. – С. 14–20.
5. **Згуровский, М.З.** Модели и методы принятия решений в нечетких условиях [Текст] / М.З. Згуровский, Ю.П. Зайченко. – К.: Наукова думка, 2011. – 288 с.
6. **Кісельова, О.М.** Про розв’язок двоетапної неперервно-дискретної задачі оптимального розбиття-розподілення [Текст] / О.М. Кісельова., О.М. Притоманова, С.А. Ус, В.В. Матяш // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем. Тези доповідей XVI Міжнародної науково-практичної конференції, листопад 21-23. – Д.: Ліра, 2018. – С. 99-101.
7. **Kiseleva, Elena M.** Algorithm for Solving a Continuous Problem of Optimal Partitioning with Neurolinguistic Identification of Functions in Target Functional [Text] / Elena M. Kiseleva, Olga M. Prytomanova, Sergey V. Zhuravel // Journal of Automation and Information Sciences. – 2018. – Volume 50. – Issue 3. – PP. 1-20. DOI: 10.1615/JAutomatInfScien.v50.i3.10.
8. **Киселева, Е.М.** Непрерывные задачи оптимального разбиения множеств и r-алгоритмы [Текст] / Е.М. Киселева, Л.С. Коряшкина. – К.: Наукова думка, 2015. – 400 с.

Надійшла до редколегії 23.10. 2019.