УДК 517.925 doi: 10.15421/321908

В.Г. Городецький
Національний технічний університетУкраїни
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

ІДЕНТИФІКАЦІЯ МОДЕЛІ ГІДРОІМПУЛЬСНОЇ СИСТЕМИ З ПЕРІОДИЧНОЮ ЗОВНІШНЬОЮ ДІЄЮ

Розглянуто задачу ідентифікації моделі гідроімпульсної системи у вигляді неавтономної системи звичайних диференціальних рівнянь. Використано алгоритм, який дозволяє визначити параметри моделі при відомій спостережуваній змінній та неповній інформації про зовнішню дію. При цьому спостережувана змінна може мати як регулярний так і хаотичний характер.

Ключові слова: ідентифікація, гідроімпульсна система, звичайні диференціальні рівняння, періодична зовнішня дія.

Рассмотрена задача идентификации модели гидроимпульсной системы в виде неавтономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Использован алгоритм, который позволяет определить параметры модели при известной наблюдаемой переменной и неполной информации о внешнем воздействии. При этом наблюдаемая переменная может иметь как регулярный так и хаотичный характер.

Ключевые слова: идентификация, гидроимпульсная система, обыкновенные дифференциальные уравнения, периодическое внешнее воздействие.

Functioning of hydro-impulse systems, usually involves the existence of some periodic external action, that determines the type of model. In this case they use, as a mathematical model, non-autonomous system of ordinary differential equations. Sometimes external action information is incomplete or absent. This may complicate the modeling task. For example, in the operation of hydro-pulse systems, not only their constant parameters but also the type of external action may be unknown.

This study is devoted to the identification of a model of a hydro-impulse system in the form of a non-autonomous system of ordinary differential equations. The general form of the equations and one of the observed variables of the system are known, while the constant coefficients of the equations are unknown. We consider the identification problem when we know almost nothing about external action. Namely, we suppose that only its periodic character is known, and its form, period, and phase shift are unknown. Such a problem is obviously more complicated than a typical one, when the external action and the output are completely known, and only the constant coefficients of the equations of the system are to be found. As it is known, for some parameter sets and periodic external action, the observed variable may not be periodic, which makes it impossible to determine the period and other parameters of external oscillations in a simple way. Therefore, identification of the external action is also part of the formulated task. To solve this problem we use algorithm that allows to determine the model parameters with utilizing a known observed variable and incomplete information on the external action. Moreover, the observed variable can be either regular or chaotic.

Key words: identification, hydro-impulse system, ordinary differential equations, periodic external action.

Вступ. Розробка математичних моделей різних фізичних систем передбачає використання двох основних підходів, а саме, - розв'язок прямої або оберненої задачі [1]. Особливістю останнього є можливість використати реальні експериментальні або експлуатаційні дані про досліджуваний процес для побудови адекватної моделі. Функціонування гідроімпульсних систем, зазвичай передбачає існування деякої періодичної зовнішньої дії [2], що визначає вид моделі. В цьому випадку при використанні в якості моделей систем звичайних диференціальних рівнянь, вони повинні бути неавтономними. Ця обставина може ускладнити задачу моделювання, якщо інформація про зовнішню дію є неповною, або взагалі відсутня. Наприклад, при функціонуванні гідроімпульсних систем можуть бути невідомі не тільки їх сталі параметри, але й вид зовнішньої дії.

Постановка задачі. Дане дослідження присвячене ідентифікації моделі гідроімпульсної системи у вигляді неавтономної системи звичайних диференціальних рівнянь. При цьому вважається відомим загальний вигляд рівнянь та одна із спостережуваних змінних системи, а невідомі – сталі коефіцієнти рівнянь. Щодо зовнішньої дії, то відомим вважаємо тільки її періодичний характер, а форма, період, фазовий зсув – невідомі. Така задача, очевидно, більш складна за типову, коли повністю відомі зовнішня дія та вихід, і треба знайти лише сталі коефіцієнти рівнянь системи.

Як буде показано далі, при деяких наборах параметрів і періодичній зовнішній дії спостережувана змінна може не бути періодичною, що не дозволяє просто визначити період та інші параметри зовнішніх коливань. Отже, ідентифікація самої зовнішньої дії є також складовою сформульованої задачі.

Метод розв'язання та аналіз одержаних результатів. В якості об'єкта ідентифікації було взято одномасову модель гідромолота, запропоновану в [2]:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + C(x)x = F(t). \tag{1}$$

В (1) m – зведена маса гідромолота, b – коефіцієнт затухання, $C(x)$ – нелінійна жорсткість, $F(t)$ – сила зовнішньої дії. Розглянемо випадок, коли $C(x) = c_0 + c_1 x^2$, де c_0, c_1 – сталі, а $F(t) = P\sin(\omega t + \varphi_0)$, де P – амплітуда, ω – кругова частота коливань, φ_0 – початкова фаза. Було прийнято значення параметрів, близьких до реальних, а саме: $m = 65$, $b = 520$, $c_0 = 1{,}5 \cdot 10^4$, $c_1 = 1{,}5 \cdot 10^7$, $P = 3{,}595 \cdot 10^4$, $\omega = 31{,}416$, $\varphi_0 = 0$. Всі наведені параметри мають розмірність в одиницях системи СІ.

Перетворимо (1) на систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -b_m x_2 - c_{0m} x_1 - c_{1m} x_1^3 + P_m \sin(\omega t + \varphi_0), \end{cases} \tag{2}$$

де $x_1 = x$, $b_m = b/m$, $c_{0m} = c_0/m$, $c_{1m} = c_1/m$, $P_m = P/m$. Система (2) була розв'язана методом Рунге-Кутта 4-го порядку на часовому інтервалі 5 с з кроком $5 \cdot 10^{-6}$с після закінчення перехідного процесу. Розв'язки системи (2) представлені на рис. 1, а її фазовий портрет – на рис. 2.

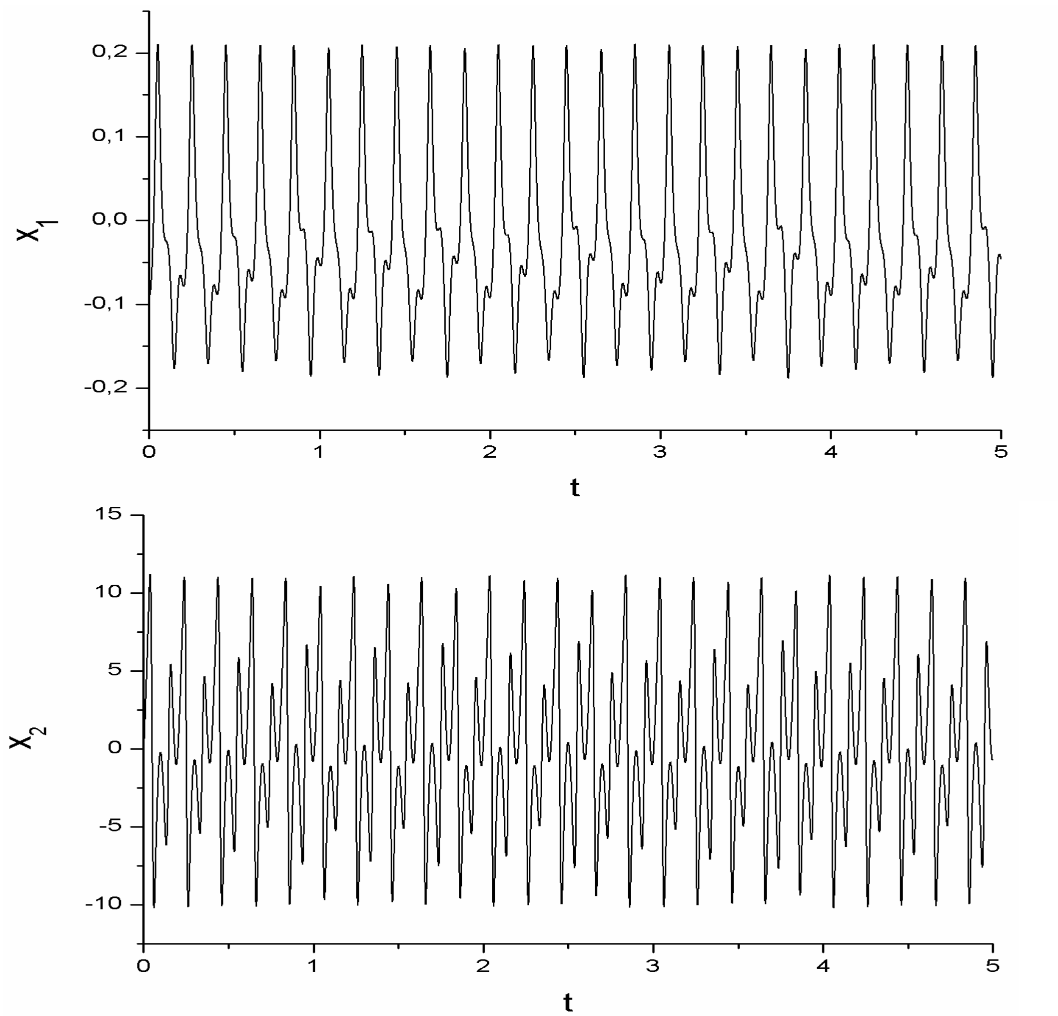


Рис. 1. Зміна у часі переміщення та швидкості зведеної маси гідромолоту в усталеному режимі

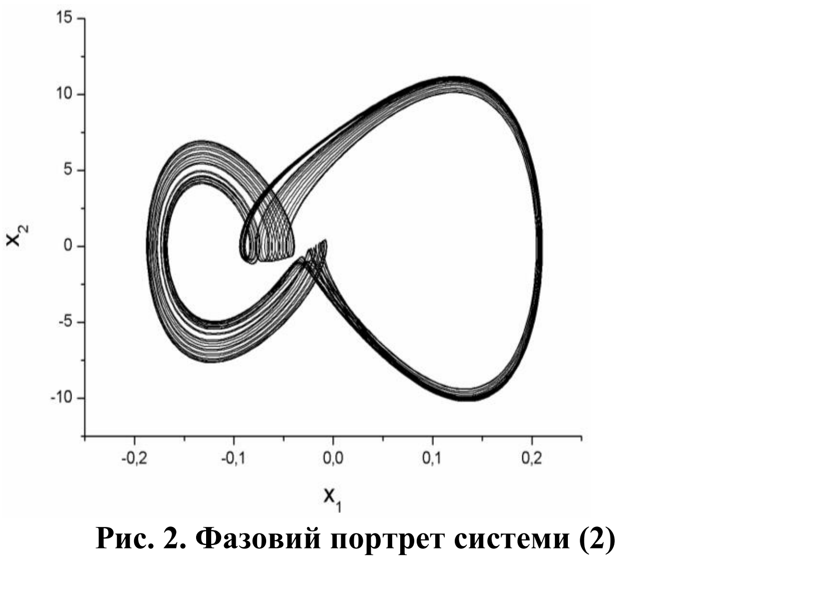


Рис. 2. Фазовий портрет системи (2)

Як видно з фазового портрету системи (2), її коливання не є точно періодичними. Цей факт підтверджується і побудованим спектром системи, який наведено на рис. 3. Основна гармонічна складова, як видно на спектрі, має частоту 5 герц. В той же час вищі гармоніки не є точно кратними основній, що є ознакою майже періодичних функцій [3] Ця особливість системи (2) ще більше проявляється при зміні параметрів. Наприклад, при зниженні коефіцієнту затухання в широкому діапазоні коливання мають ознаки хаотичних, спектр яких вже не є чітко дискретним [4]. Цей факт проілюстровано на рис. 4-6. В цьому випадку в рівнянні (1) прийнято $b = 52, \varphi_0 = 0{,}6$, інші параметри залишилися незмінними. В результаті коефіцієнти системи (2) мають значення, наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Значення коефіцієнтів системи (2) при $b = 52$, $\varphi_0 = 0.6$

Коефіцієнт			
b_m	c_{0m}	c_{1m}	P_m
0.8	230.76923	230769.23076	553.07692

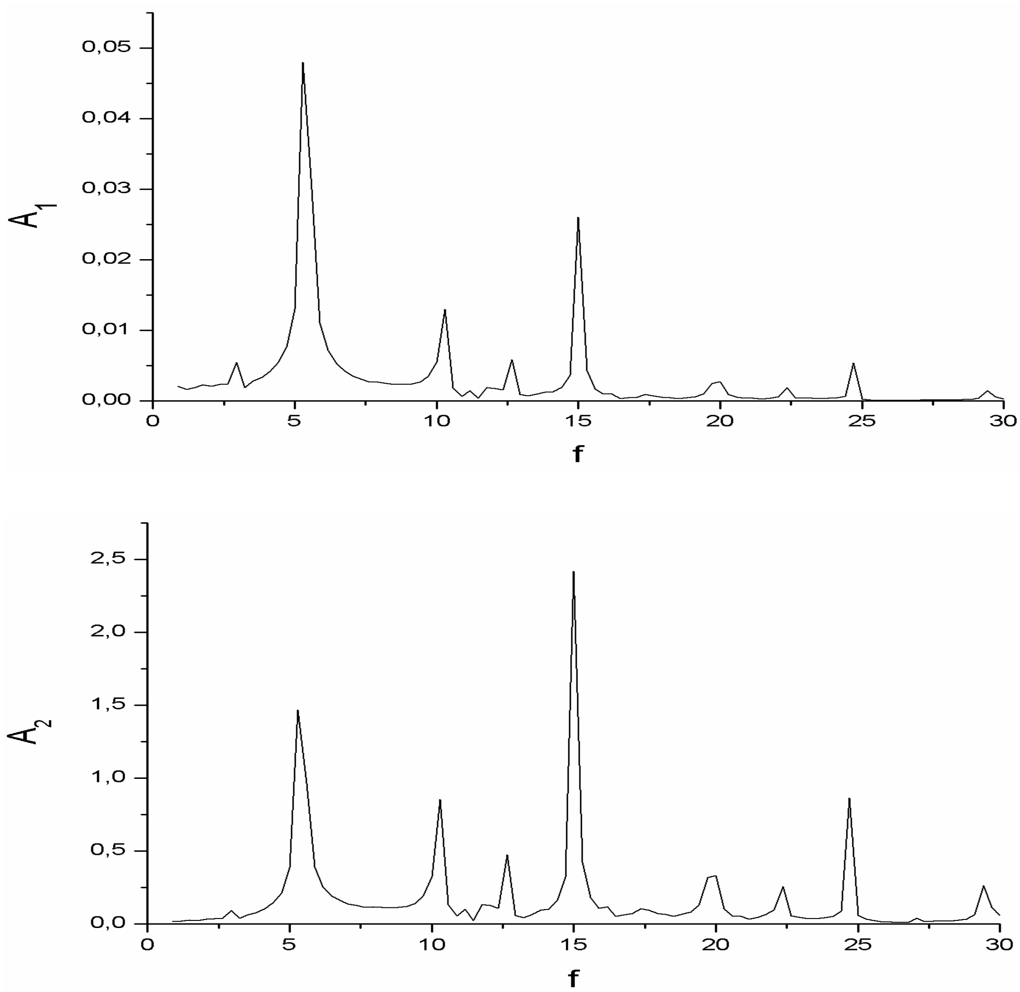


Рис. 3. Спектри функцій $x_1(t)$ та $x_2(t)$

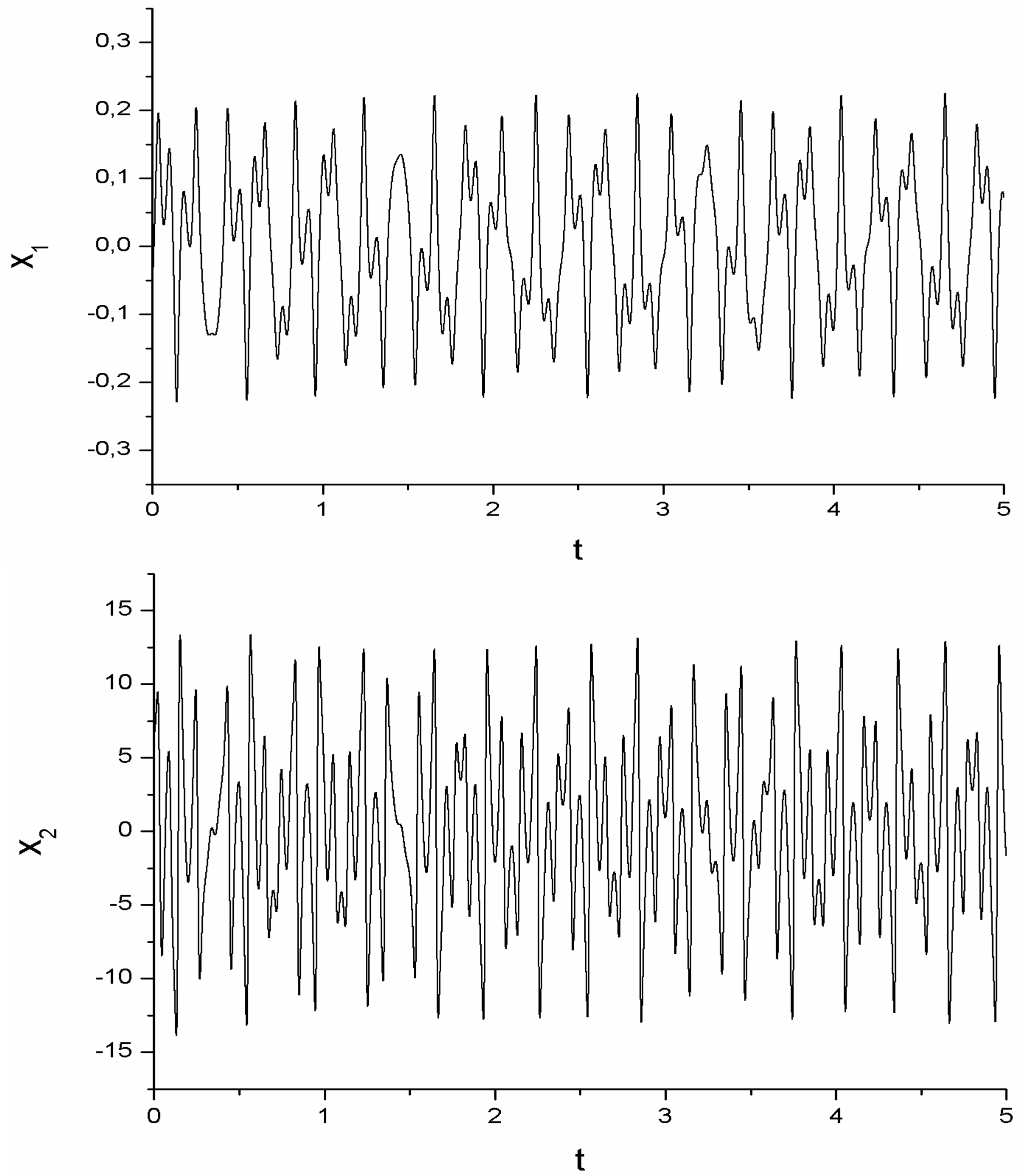


Рис. 4. Зміна у часі переміщення та швидкості зведеної маси гідромолоту в усталеному режимі при $b = 52$ та $\varphi_0 = 0,6$

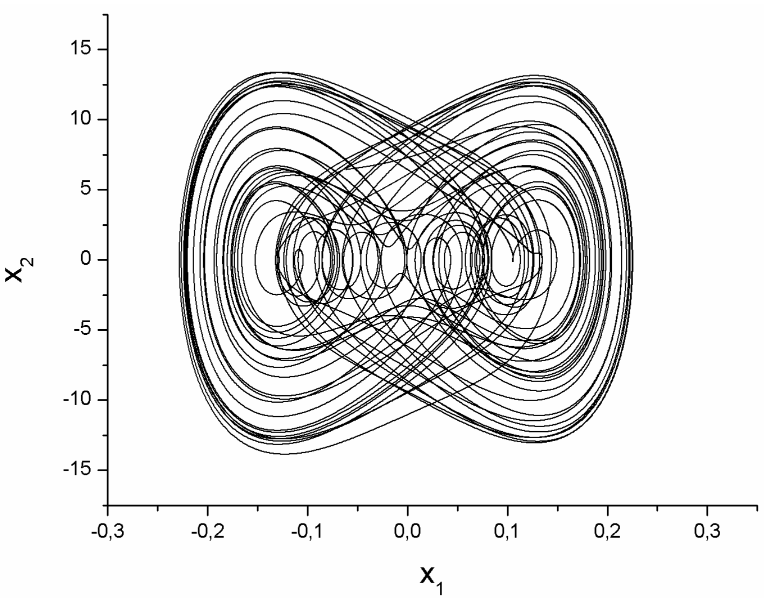


Рис. 5. Фазовий портрет системи (2) при $b = 52$

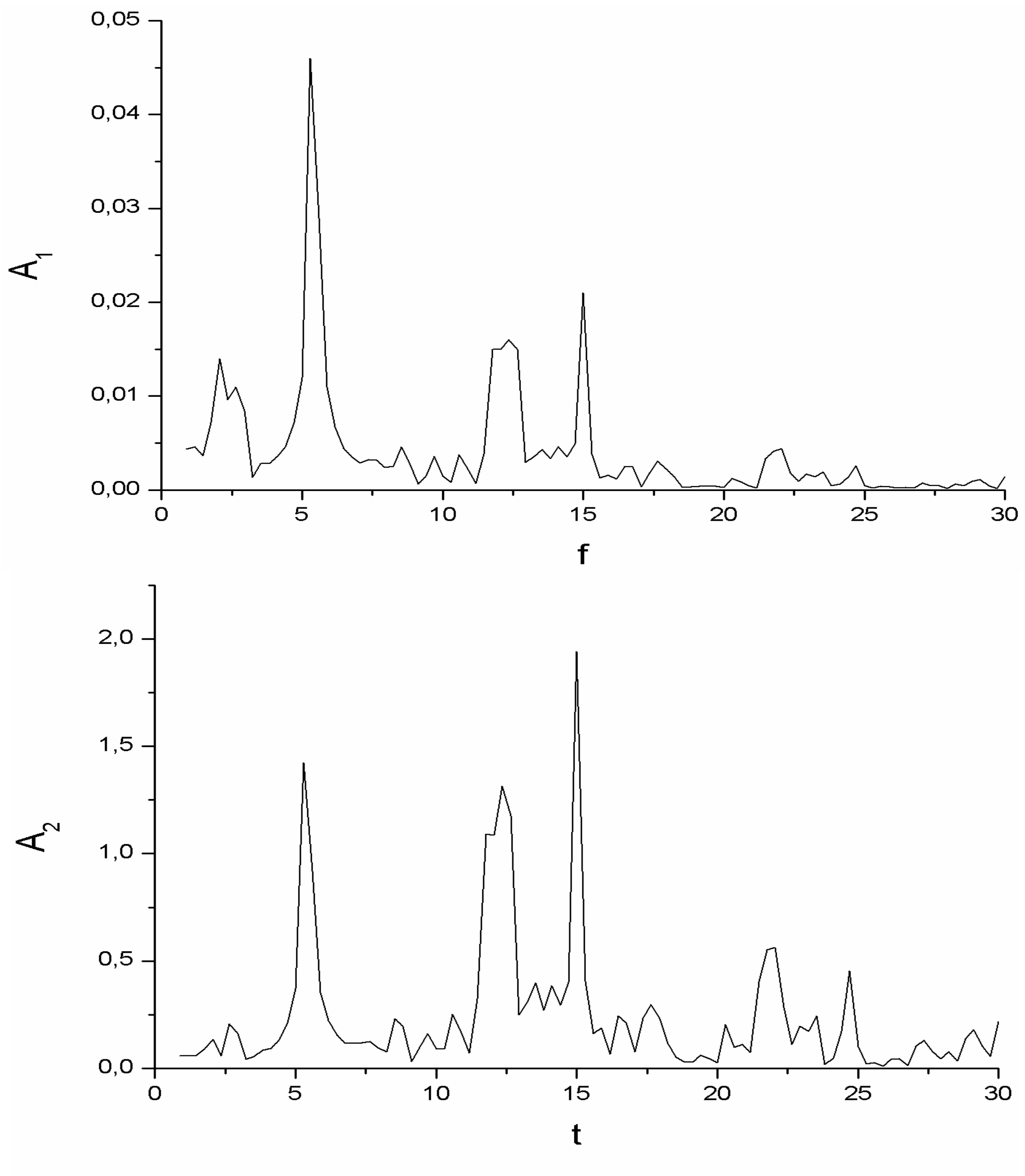


Рис. 6. Спектри функцій $x_1(t)$ та $x_2(t)$ системи (2) при $b = 52$

Якщо перед дослідником стоїть задача ідентифікації системи (2), то для її розв'язання в цьому разі за характером функцій $x_1(t)$ та $x_2(t)$ важко однозначно визначити навіть частоту зовнішньої дії, якщо остання невідома. Але ця проблема може бути вирішена з використанням метода, запропонованого в [5,6]. Для ідентифікації системи (2) були використані часові ряди, наведені на рис. 4. Вони отримані при значеннях коефіцієнтів системи (2), наведених в таблиці 1. Система розв'язувалась на часовому інтервалі 10 с з кроком $5 \cdot 10^{-4}$ с, тобто часовий ряд мав 20000 точок.

На першому етапі застосування алгоритму [6] були отримані значення сталих коефіцієнтів системи (2), період синусоїдальної вхідної дії та часовий ряд зміни величини $P_m \sin(\omega t + \varphi_0)$. Отримані величини коефіцієнтів наведені в таблиці 2, значення періоду співпало з заданим, тобто $T = 0,2c$, що відповідає 400 точкам часового ряду.

Таблиця 2

Значення реконструйованих сталих коефіцієнтів системи (2)

b_m	c_{0m}	c_{1m}
0.86511	235.42552	229859.21117

На рис. 7 показано реконструкцію часового ряду $P_m \sin(\omega t + \varphi_0)$, яка має 16000 точок, а на рис. 8 – його початкову ділянку на проміжку від 0 до $T = 400$ точок часового ряду. Треба відмітити, що відхилення деяких значень на рис. 7 та 8 від синусоїди пояснюються поганою обумовленістю матриці [7], яка формувалась для різних моментів часу і використовувалась для знаходження коефіцієнтів системи (2). Використовуючи дані часового ряду, наведеного на рис. 7, було отримано значення амплітуди шуканої синусоїди.

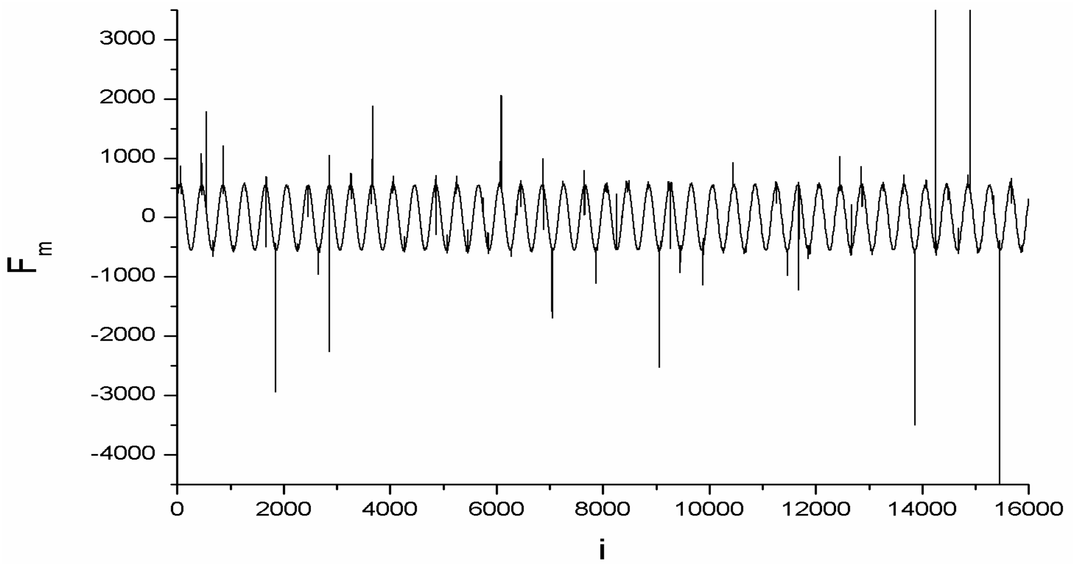


Рис. 7. Реконструйований часовий ряд функції зовнішньої дії $F_m = P_m \sin(\omega t + \varphi_0)$

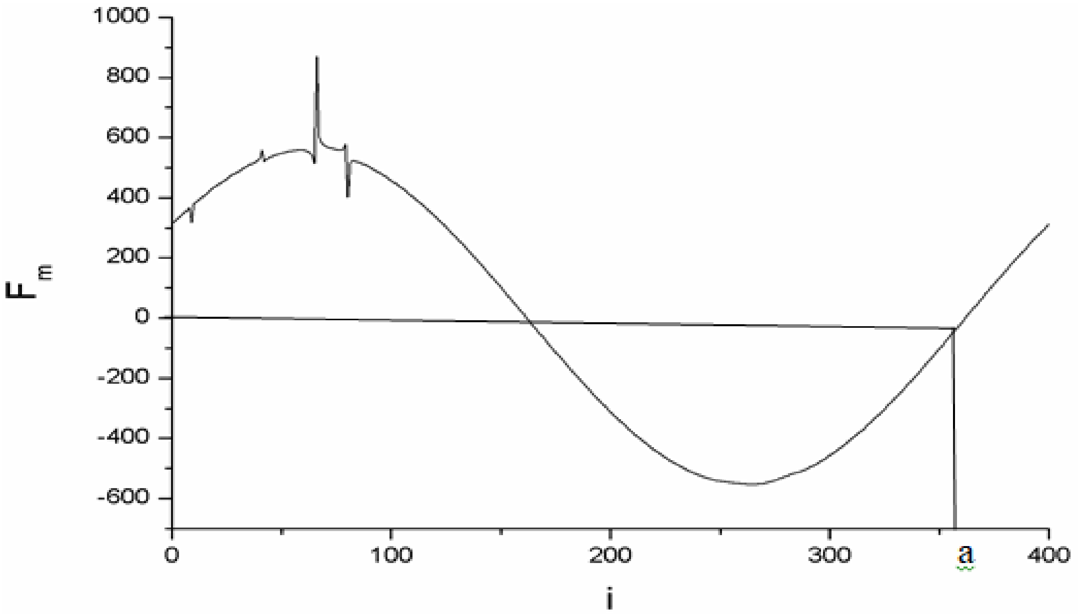


Рис. 8. Перший період реконструйованого часового ряду функції зовнішньої дії $F_m = P_m \sin(\omega t + \varphi_0)$

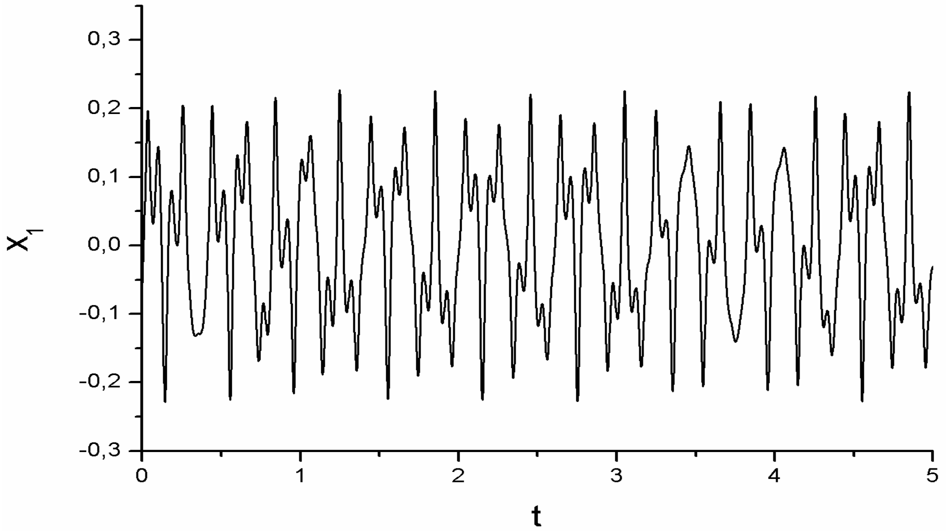
Після цього можна визначити фазовий зсув φ_0. Для цього достатньо, як показано на рис. 8, знайти точку на осі абсцис, яка відповідає значенню $F_m = 0$. В точці a на рисунку $i = 362$, тобто фазовий зсув складає 38 точок часового ряду, або $\varphi_0 = 0{,}59690$. Для порівняння остаточні значення коефіцієнтів реконструйованої системи та системи (2) наведені в таблиці 3.

Таблиця 3

Порівняння значень коефіцієнтів системи (2) та реконструйованої системи

Значення коефіцієнтів						
Коефіцієнт	b_m	c_{0m}	c_{1m}	P_m	ω	φ_0
Система(2)	0,8	230.76923	230769,23076	553,07692	0,2	0,6
Реконструйована система	0.86511	235.42553	229859.21117	554,44000	0,2	0,59690

При розв'язанні реконструйованої системи отримано часові ряди її функцій $x_1(t)$ та $x_2(t)$, їх спектри та фазовий портрет. Вони наведені на рис. 9-11.



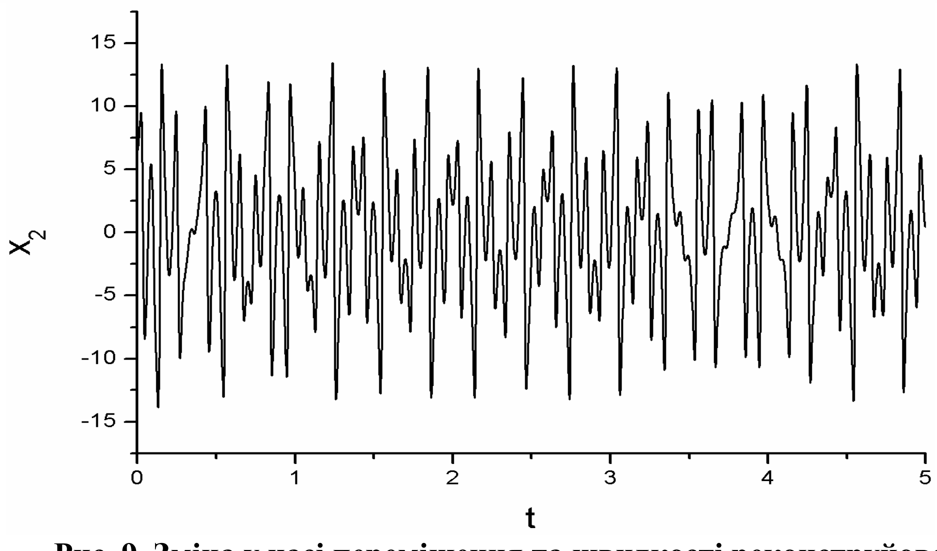


Рис. 9. Зміна у часі переміщення та швидкості реконструйованої моделі гідромолоту в усталеному режимі

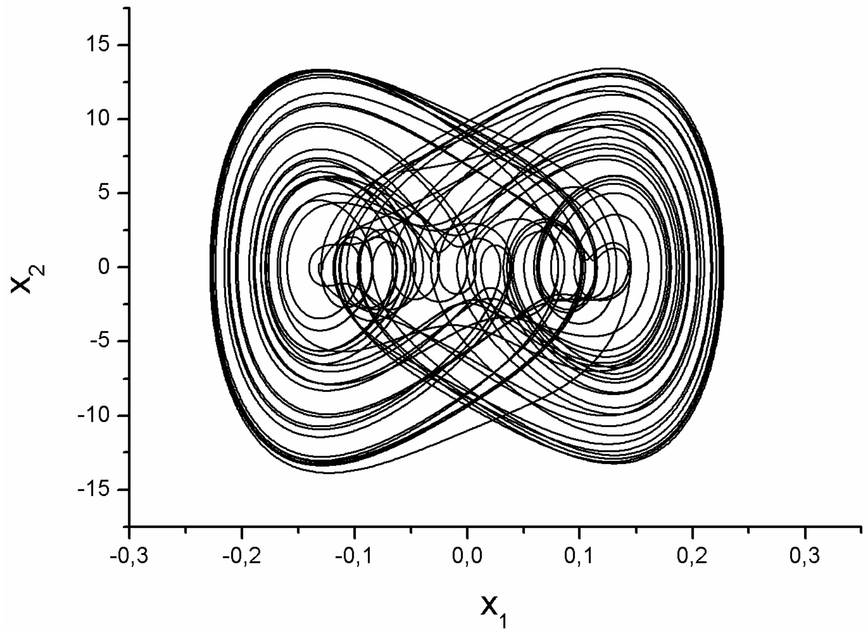


Рис. 10. Фазовий портрет реконструйованої системи

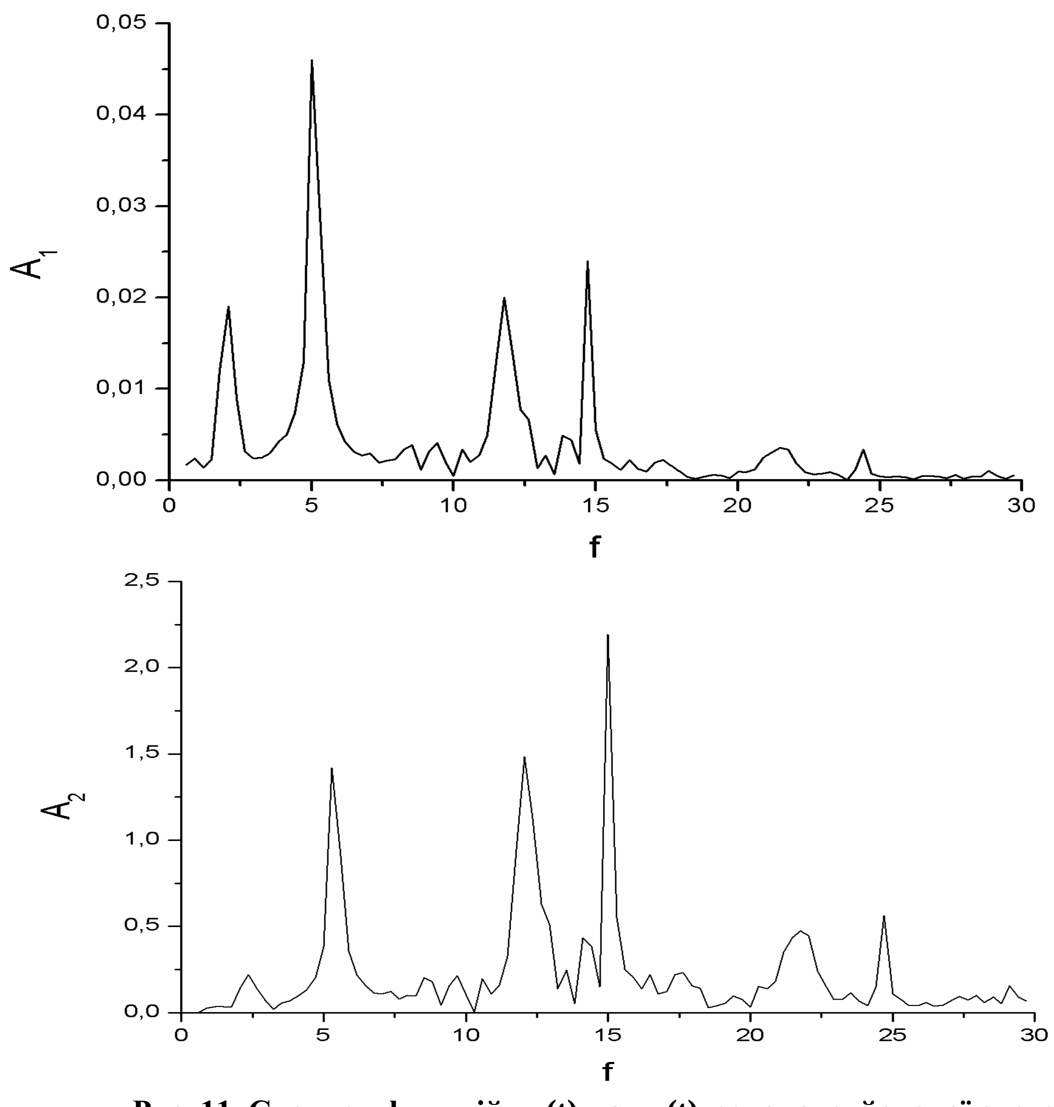


Рис. 11. Спектри функцій $x_1(t)$ та $x_2(t)$ реконструйованої системи

Висновки. Згідно наведених результатів, в даній роботі продемонстрована можливість розв’язку ускладненої, в порівнянні з типовою, задачі ідентифікації. Звичайна постановка задачі передбачає знаходження параметрів моделі при відомих входi та виході. В даному випадку наявними є дані про вихід, а інформація про вхід обмежується тільки відомим фактом про періодичність функції зовнішньої дії. Також невідомими є сталі коефіцієнти рівнянь моделі. Як видно з результатів чисельних експериментів, алгоритм дозволяє достатньо точно розв’язати сформульовану задачу. Це проілюстровано отриманими часовими рядами, фазовими портретами, та спектральними характеристиками отриманих розв’язків. Такий аналіз розширює можливості моделювання систем наведеного класу, що може бути корисним при проектування різних фізичних об’єктів, виборі режимів їх функціонування.

Бібліографічні посилання

1. **Tarantola, A.** Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation [Text] / A. Tarantola // Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (2005). – 344 p.
2. **Сліденко, В.М.** Математичне моделювання ударно-хвильових процесів гідроімпульсних систем гірничих машин [Текст] / В.М. Сліденко, О.М. Сліденко. – К., 2017. – 220 с.
3. **Левитан, Б.М.** Почти-периодические функции [Текст] / Б.М. Левитан. – М., 1953**. –** 396 с.
4. **Лоскутов, А.Ю.** Введение в синергетику [Текст] / А.Ю. Лоскутов, А.С. Михайлов. – М., 1990. – 272 с.
5. **Городецкий, В.Г.** Реконструкция некоторых нелинейных неавтономных систем по скалярному временному ряду [Текст] / В.Г. Городецкий // Вестник Запорожского национального университета. Физико-математичесике науки. – № 2. – 2016. – С. 34-42.
6. **Gorodetskyi, V.G.** Identification of Nonlinear Systems with Additive External Action [Text] / V.G. Gorodetskyi // Journal of Automation and Information Sciences. – v. 50. – i. 4. – P. 13–24.
7. **Воеводин, В.В.** Матрицы и вычисления [Текст] / В.В. Воеводин, В.А. Кузнецов. – М.: Наука. – 1984. – 320 с.

Надійшла до редколегії 13.06.2019.