

Л.Л. Гарт, Н.А. Лобанцева

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

ПРО ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ АСПЕКТИ РЕАЛІЗАЦІЇ РІЗНИЦЕВИХ СХЕМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ДІРІХЛЕ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ З МІШАНИМИ ПОХІДНИМИ

В даній статті розглянуто обчислювальні схеми явних ітераційних методів розв'язання різницьових задач Діріхле різних порядків точності для двовимірного еліптичного диференціального рівняння з мішаними похідними. Виконана програмна реалізація розроблених алгоритмів та проведено якісний порівняльний аналіз результатів на прикладі розв'язання конкретних задач.

Ключові слова: задача Діріхле, еліптичне диференціальне рівняння, мішані похідні, метод скінченних різниць, різницеві схеми, похибка, збіжність.

В данной статье рассмотрены вычислительные схемы явных итерационных методов решения разностных задач Дирихле разных порядков точности для двумерного эллиптического дифференциального уравнения со смешанными производными. Выполнена программная реализация разработанных алгоритмов и проведен качественный сравнительный анализ результатов на примере решения конкретных задач.

Ключевые слова: задача Дирихле, эллиптическое дифференциальное уравнение, смешанные производные, метод конечных разностей, разностные схемы, погрешность, сходимость.

The most used in computational practice in solving elliptic boundary value problems are the finite difference method [1, 2]. This method is not only an effective numerical method for finding approximate solutions of various problems to partial differential equations, but also a very general and relatively simple method for evidence existence theorems and research the differential properties of solutions of these problems. As it known, the finite differences method essence consists of the following. The domain of continuous variation of arguments of the original problem is replaced by a discrete set of points (nodes), which is called a grid; derivatives in the differential equation and the boundary conditions are approximated by difference relations; herewith, the boundary value problem for the differential equation is replaced by a system of algebraic equations (a difference scheme).

In this paper, we discuss computational schemes of explicit iterative methods for solving Dirichlet difference problems of various orders of accuracy for two-dimensional elliptic differential equations with mixed derivatives. The developed algorithms software implementation was performed, and a qualitative comparative analysis of the results was carried out on the example of solving specific problems. For the elliptic boundary value problem with mixed derivatives, various iterative methods of solving the corresponding finite-difference schemes are implemented. For this, a software product was developed in the C# programming language, which implements the above-mentioned iterative grid algorithms, to conduct capacious computational experiments, to study their practical convergence, and to carry out qualitative comparative analysis using the example of solving model problems.

Keywords: Dirichlet problem, elliptic differential equation, mixed derivatives, the finite difference method, difference schemes, error, convergence.

Вступ. Диференціальні рівняння в частинних похідних мають широке застосування в математичній фізиці, гідродинаміці, акустиці, техніці та інших галузях знань. Під час математичного моделювання стаціонарних процесів різної фізичної природи, серед яких можна назвати стаціонарний розподіл тепла, дифузію, електростатичні та електромагнітні явища, деформаційні процеси, часто виникає необхідність у розв'язанні крайових задач для еліптичних диференціальних рівнянь [3].

Задача розв'язання таких рівнянь у своїй більшості складніша порівняно із звичайними диференціальними рівняннями. Крім того, складність їх розв'язання породжена великою різноманітністю в постановці початкових та крайових умов, а також вимірністю задач. Тому серед таких рівнянь лише в окремих випадках вдається отримати точні розв'язки. Для розв'язання цих задач застосовуються різні наближені методи, серед яких вирізняють аналітичні та чисельні. Для аналітичного розв'язання еліптичних крайових задач застосовують метод поділу змінних Фур'є, метод функцій Гріна і метод потенціалів, варіаційні та проєкційні методи (методи Релея-Рітца, Бубнова-Гальоркіна, Канторовича). При цьому застосування можливо лише у випадках найпростіших областей та диференціальних операторів, тому чисельні методи посідають основне місце. Серед них відомі метод скінченних різниць, метод скінченних елементів, метод інтегральних співвідношень Дородніцина, спектральні методи та ін.

Метод скінченних різниць є найбільш вживаним під час розв'язання крайових задач для еліптичних диференціальних рівнянь завдяки його універсальності та ефективності. Універсальність полягає у можливості застосування цього методу як для лінійних, так і для нелінійних крайових задач, для задач різної розмірності та з областями складної (неканонічної) форми.

Процес розв'язання диференціальних рівнянь скінченно-різницеvim методом, як відомо, складається з таких етапів [3]:

- 1) заміна області неперервного змінювання аргументу областю дискретного його змінювання;
- 2) заміна диференціального оператора деяким різницеvim оператором, а також формулювання різницеvих аналогів для крайових і початкових умов;
- 3) перехід до системи різницеvих (алгебраїчних) рівнянь;
- 4) розв'язання отриманої системи різницеvих рівнянь.

У роботах [4, 5] викладені сучасні методи різницеvого розв'язання задач математичної фізики та пов'язані з цим питання теорії різницеvих схем. Під час дослідження цих питань для першої еліптичної крайової задачі з мішаними похідними докладніше розглянута монографія [3], що присвячена теорії різницеvих схем для наближеного розв'язання диференціальних рівнянь в частинних похідних еліптичного типу. У ній викладаються різні методи побудови різницеvих схем для типових задач математичної фізики.

У зазначених вище джерелах розглядалися тільки питання, пов'язані з побудовою і дослідженням різницевих схем, числові ж методи (прямі та ітераційні) розв'язання різницевих рівнянь, що апроксимують еліптичні крайові задачі, наведені, наприклад, в [5, 6, 7, 8]. В зазначених роботах викладаються сучасні економічні прямі методи розв'язання різницевих рівнянь Пуассона в прямокутнику з крайовими умовами різного виду. Це – метод повної редукції і розділення змінних, що використовує алгоритм швидкого перетворення Фур'є, а також комбіновані методи. Серед ітераційних методів досліджуються двошарова ітераційна схема з чебишовським набором параметрів, тришарова схема, ітераційні методи варіаційного типу та ін. Через свою простоту та універсальність в даній роботі були обрані саме явні ітераційні методи.

Зауважимо, що для побудови різницевих схем важливо зберегти властивості монотонності і консервативності, оскільки монотонні схеми приводять до коректних систем алгебраїчних рівнянь. Різницеві схеми для еліптичних рівнянь з мішаними похідними, що були розглянуті в згаданих вище працях, мають необхідні властивості лише у випадку коефіцієнтів при мішаних похідних, які не змінюють свій знак. Для еліптичних рівнянь зі знакозмінними коефіцієнтами при мішаних похідних монотонні та консервативні схеми запропоновані в роботах [1, 9].

Постановка задачі. Розглянемо задачу Діріхле для еліптичного рівняння з мішаними похідними: знайти неперервну в $\bar{G} = G \cup \Gamma$ функцію $u(x_1; x_2)$, яка задовольняє рівняння

$$Lu = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right) = -f(x), x \in G, \quad (1)$$

і крайову умову

$$u(x) = g(x), x \in \Gamma, \quad (2)$$

де \bar{G} – прямокутник, $\bar{G} = \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$; Γ – його межа; $f(x), g(x)$ – задані функції, $x = (x_1; x_2)$.

Припустимо, що функції $f(x), g(x), k_{\alpha\beta}(x)$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) такі, що задача (1), (2) має єдиний розв'язок, який становить достатньо гладку функцію в області \bar{G} , а також виконані умови симетрії

$$k_{12}(x) = k_{21}(x), x \in \bar{G} \quad (3)$$

та еліптичності

$$c_1 \sum_{\alpha=1}^2 \xi_\alpha^2 \leq \sum_{\alpha, \beta=1}^2 k_{\alpha\beta} \xi_\alpha \xi_\beta \leq c_2 \sum_{\alpha=1}^2 \xi_\alpha^2, c_1 > 0, \quad (4)$$

де $\xi = (\xi_1; \xi_2)$ – довільний вектор.

Однією з основних властивостей рівняння (1) є виконання принципу максимуму: неперервний в \bar{G} і відмінний від константи розв'язок $u(x_1; x_2)$

може досягати свого максимального за модулем значення тільки на контурі Γ . Звідси виходить, що справедлива оцінка

$$\max_{(x_1; x_2) \in \bar{G}} |u(x_1; x_2)| \leq \max_{(x_1; x_2) \in \Gamma} |g(x_1; x_2)|,$$

яка означає стійкість задачі (1) по крайових даних [10].

Побудова різницевої схеми. Згідно з загальною схемою побудови різницевих методів [3, 5], введемо в $u(x_1; x_2)$ рівномірну прямокутну сітку з кроками h_1 та h_2 по напрямках x_1 та x_2 відповідно так, що $h_\alpha = l_\alpha / N_\alpha, \alpha = 1, 2$, де N_1 та N_2 - цілі числа:

$$\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_h + \gamma_h = \left\{ (x_1^{(i_1)}; x_2^{(i_2)}) : x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = 0, 1, \dots, N_\alpha, \alpha = 1, 2 \right\}.$$

Точки $(x_1^{(i_1)}; x_2^{(i_2)})$ при $i_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1, \alpha = 1, 2$ називають внутрішніми вузлами сітки, $\bar{\omega}_h$ - сукупністю внутрішніх вузлів, а множину

$$\gamma_h = \left\{ (x_1^{(0)}; x_2^{(i_2)}), (x_1^{(N_1)}; x_2^{(i_2)}) \right\}_{i_2=1}^{N_2-1} \cup \left\{ (x_1^{(i_1)}; x_2^{(0)}), (x_1^{(i_1)}; x_2^{(N_2)}) \right\}_{i_1=1}^{N_1-1}$$

– межею сітки $\bar{\omega}_h$.

Розглянемо еліптичний оператор з мішаною похідною задачі (1), (2):

$$Lu = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right). \tag{5}$$

В припущенні, що виконуються умови еліптичності (4), оператор $\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\alpha}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right)$ апроксимуємо наступним виразом:

$$\Lambda_{\alpha\alpha} y = 0,5 \left[\left(k_{\alpha\alpha} y_{x_\alpha}^- \right)_{x_\alpha} + \left(k_{\alpha\alpha} y_{x_\alpha} \right)_{x_\alpha}^- \right]. \tag{6}$$

Оператор з мішаною похідною $\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial u}{\partial x_\beta} \right)$ апроксимуємо

операторами вигляду [11]

$$\Lambda_{12}^- y = \left(k_{12} y_{x_2}^- \right)_{x_1}, \quad \Lambda_{21}^- y = \left(k_{21} y_{x_1}^- \right)_{x_2}.$$

Таким чином, різницевий оператор Λu матиме наступний вигляд:

$$\Lambda u = \frac{1}{2} \left[\sum_{\alpha=1}^2 \left[\left(k_{\alpha\alpha} y_{x_\alpha}^- \right)_{x_\alpha} + \left(k_{\alpha\alpha} y_{x_\alpha} \right)_{x_\alpha}^- \right] + \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \left(k_{\alpha\beta} y_{x_\beta}^- \right)_{x_\alpha} \right]. \tag{7}$$

Уведемо позначення: $f \equiv f(x_1; x_2) \equiv f(x_1^{(i_1)}; x_2^{(i_2)})$, $g \equiv g(x_1; x_2) \equiv g(x_1^{(i_1)}; x_2^{(i_2)})$ при $i_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1, \alpha = 1, 2$. Тоді задачі Діріхле (1), (2) зіставимо наступну різницеву схему:

$$\Lambda u = -f, \tag{8}$$

$$y(x_\alpha^{(i_\alpha)}; x_{3-\alpha}^{(0)}) = g(x_\alpha^{(i_\alpha)}; x_{3-\alpha}^{(0)}); y(x_\alpha^{(i_\alpha)}; x_{3-\alpha}^{(l_\alpha)}) \equiv g(x_\alpha^{(i_\alpha)}; x_{3-\alpha}^{(l_\alpha)}), \\ i_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1, \alpha = 1, 2.$$

Запишемо (8) з використанням (7) більш детально. Так, з урахуванням введених вище позначень, для кожного вузла сітки різницевого оператора $\Lambda u = \Lambda_{11}u + \Lambda_{12}u + \Lambda_{21}u + \Lambda_{22}u$ буде мати наступний вигляд:

$$\Lambda_{11}u = \left(k_{11}y_{x_1}^-\right)_{x_1} + \left(k_{11}y_{x_1}^-\right)_{x_1} = \frac{1}{h_1^2} \left[\left(k_{11}^{(-i)} + k_{11}\right) y^{(-i)} - \left(k_{11}^{(-i)} + 2k_{11} + k_{11}^{(+i)}\right) y + \right. \quad (9)$$

$$\left. + \left(k_{11} + k_{11}^{(+i)}\right) y^{(+i)} \right],$$

$$\Lambda_{12}u = \left(k_{12}y_{x_2}^-\right)_{x_1} = \frac{1}{h_1 h_2} \left[-k_{12}u + k_{12}^{(+i)} y^{(+i)} + k_{12} y^{(-i_2)} - k_{12}^{(+i)} y^{(+i, -i_2)} \right], \quad (10)$$

$$\Lambda_{21}u = \left(k_{21}y_{x_1}^-\right)_{x_2} = \frac{1}{h_1 h_2} \left[k_{21} y^{(-i)} - k_{21}u - k_{21}^{(+i_2)} y^{(-i, +i_2)} + k_{21}^{(+i_2)} y^{(+i_2)} \right], \quad (11)$$

$$\Lambda_{22}u = \left(k_{22}y_{x_2}^-\right)_{x_2} + \left(k_{22}y_{x_2}^-\right)_{x_2} = \frac{1}{h_2^2} \left[\left(k_{22}^{(-i_2)} + k_{22}\right) y^{(-i_2)} - \left(k_{22}^{(-i_2)} + 2k_{22} + k_{22}^{(+i_2)}\right) y + \right. \quad (12)$$

$$\left. + \left(k_{22} + k_{22}^{(+i_2)}\right) y^{(+i_2)} \right].$$

Легко перекоонатися, що оператор Λu згідно з (9) - (12) визначений на множині, яка складається із семи точок (шаблон зображено на рис. 1).

Доведено, що похибка апроксимації $\psi = \Lambda_{\alpha\alpha}u - L_{\alpha\alpha}u = O(|h|^2)$, де $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$, має другий порядок [12]. Різницевий ж оператор $\Lambda_{\alpha\beta}^- u$ апроксимує диференціальний оператор $L_{\alpha\beta}$ з похибкою $O(h_1 + h_2)$, тому для покращення порядку апроксимації скористаємося таким різницевим оператором:

$$\Lambda_{\alpha\beta}u = \frac{1}{2} \left(\Lambda_{\alpha\beta}^+ u + \Lambda_{\alpha\beta}^- u \right) = \frac{1}{2} \left[\left(k_{\alpha\beta}y_{x_\beta}^-\right)_{x_\alpha} + \left(k_{\alpha\beta}y_{x_\beta}^-\right)_{x_\alpha} \right], \alpha \neq \beta, \quad (13)$$

що має похибку $O(|h|^2)$ [11]. Тут

$$\Lambda_{12}^+ u = \left(k_{12}y_{x_2}^-\right)_{x_1}, \quad \Lambda_{21}^+ u = \left(k_{21}y_{x_1}^-\right)_{x_2}.$$

Тоді, поклавши в (8) вирази (6) та (13), легко побачити, що різницевий оператор Λu має наступний вигляд:

$$\Lambda u = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \left[\left(k_{\alpha\beta}y_{x_\beta}^-\right)_{x_\alpha} + \left(k_{\alpha\beta}y_{x_\beta}^-\right)_{x_\alpha} \right] \quad (14)$$

та апроксимує (5) з похибкою $O(|h|^2)$.

Розклавши оператор (14) аналогічно минулому випадку, можна перекоонатися, що він теж визначений на множині, яка складається із семи точок і шаблон якої зображено на рис.1.

В [11] виділено ще один важливий апроксимаційний вираз другого порядку для оператора (5). Різницевий оператор Λu у цьому випадку визначений на множині, що складається із дев'яти точок (відповідний шаблон зображено на рис.2).

$$\begin{aligned} \Lambda y = & \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \left[\left(k_{\alpha\alpha} y_{x_\alpha}^- \right)_{x_\alpha} + \left(k_{\alpha\alpha} y_{x_\alpha}^- \right)_{\bar{x}_\alpha} \right] + \\ & + \frac{1}{4} \sum_{\alpha \neq \beta}^{1+2} \left[\left(k_{\alpha\beta} y_{x_\beta}^- \right)_{x_\alpha} + \left(k_{\alpha\beta} y_{x_\beta}^- \right)_{\bar{x}_\alpha} + \left(k_{\alpha\beta} y_{x_\beta} \right)_{x_\alpha} + \left(k_{\alpha\beta} y_{x_\beta}^- \right)_{\bar{x}_\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

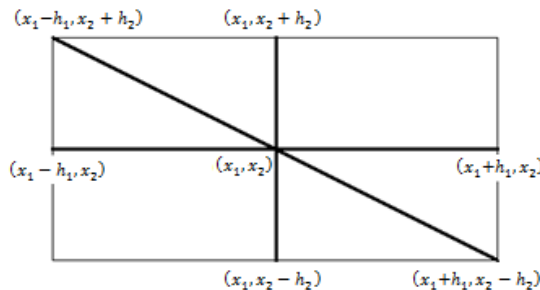


Рис. 1 – Семиточковий шаблон

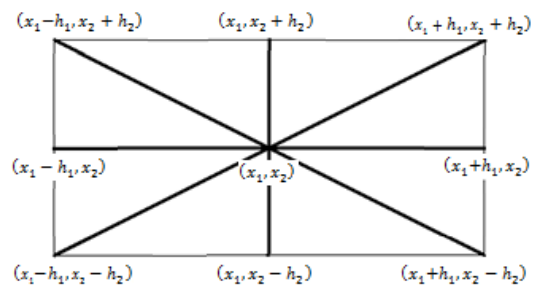


Рис. 2 – Дев'ятиточковий шаблон

Побудова різницевої схеми для коефіцієнтів при мішаних похідних, що змінюють знак. Основна ідея конструювання різницевої схеми для задачі (1), (2) в цьому випадку полягає в використанні вже побудованих схем зі спеціальними значеннями коефіцієнтів при мішаних похідних. Розглянемо еліптичний оператор (5) з мішаною похідною задачі (1), (2) та припустимо, що виконуються умови еліптичності (4). Тоді для апроксимації оператора Lu скористаємося наступними виразами [1, 9]:

$$\Lambda y = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \Lambda_{\alpha\beta} y, \quad \Lambda_{\alpha\alpha} y = \left(a_{\alpha\alpha} y_{x_\alpha}^- \right)_{x_\alpha}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{\alpha\beta} y = & \frac{1}{4} \left[\left(a_{\alpha\beta}^- y_{x_\beta}^- \right)_{x_\alpha} + \left(a_{\alpha\beta}^{-(+1_\alpha)} y_{x_\beta} \right)_{\bar{x}_\alpha} + \left(a_{\alpha\beta}^+ y_{x_\beta} \right)_{x_\alpha} + \left(a_{\alpha\beta}^{-(+1_\alpha)} y_{x_\beta}^- \right)_{\bar{x}_\alpha} \right], \\ a_{\alpha\beta}^\pm = & a_{\alpha\beta} \pm |a_{\alpha\beta}|, \quad a_{\alpha\beta} = 0,5 \left[k_{\alpha\beta}(x) + k_{\alpha\beta}(x_\alpha - h_\alpha, x_\beta) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

Таким чином, поклавши в (8) вирази (16) та (17), отримаємо нову різницеву схему, що задовольняє умови монотонності та консервативності. В [12] доведено, що вона має другий порядок апроксимації.

З використанням позначень $b_1 = 0,5[k_{12}(x_1 + h_1; x_2) + k_{12}(x_1, x_2)]$ та $b_2 = 0,5[k_{12}(x_1; x_2) + k_{12}(x_1 - h_1, x_2)]$ можна записати наступним чином вираз з (17):

$$\begin{aligned} \left(a_{12}^- y_{x_2}^- \right)_{x_1} = & \frac{1}{h_1 h_2} \left[(b_1 - |b_1|) (y(x_1 + h_1; x_2) - y(x_1 + h_1; x_2 - h_2)) - \right. \\ & \left. - (b_2 - |b_2|) (y(x_1; x_2) - y(x_1; x_2 - h_2)) \right] \end{aligned}$$

Аналогічно можна отримати інші різницеві вирази (17).

Різницеві схеми як операторні рівняння. Після заміни диференціального оператора різницеvim ми перейшли від крайової задачі (1), (2) до системи лінійних алгебраїчних рівнянь порядку $(N_1 - 1) \times (N_2 - 1)$ відносно наближених значень шуканого розв'язку $y(x_1; x_2)$ у внутрішніх вузлах сітки.

Запишемо цю систему у зручному вигляді, а саме – у вигляді операторного рівняння [12]. З цією метою введемо простір $H = H(\omega_h)$ сіткових функцій, визначених на ω_h . При цьому в просторі $H = H(\omega_h)$ мають місце наступні формули для обчислення скалярного добутку та норми:

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} u_{ij} v_{ij} h_1 h_2, \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)}.$$

Нарівні з H розглянемо простір $\dot{H} = \dot{H}(\overline{\omega_h})$ сіткових функцій, які визначені на $\overline{\omega_h}$ і дорівнюють нулю на межі γ_h . Тоді матимемо таку задачу:

$$\begin{aligned} \Lambda u &= -f, x \in \omega_h, \\ y(x) &= g(x), x \in \Gamma, \end{aligned} \quad (18)$$

де $A: \dot{H} \rightarrow H$, $\Lambda u = \Lambda_{11}u + \Lambda_{12}u + \Lambda_{21}u + \Lambda_{22}u$ – різницевий оператор, побудований за допомогою будь-якої з розглянутих вище схем (7), (14), (15).

В системі (18) виділимо ті рівняння, які містять крайові значення та перенесемо їх в праву частину. Останні рівняння залишемо без змін. Тоді різницева задача (18) набуває вигляду

$$Au = \varphi, \quad (19)$$

де $A: H \rightarrow H$, $A = -\Lambda$. Крайові умови задачі (1) тут враховані правою частиною φ . При цьому права частина (19) відрізняється від правої частини (18) лише в примежових точках.

Відмітимо деякі важливі властивості оператора A [12]. Оператор A є самоспряженим, тобто для будь-яких $u, v \in H$ виконується рівність $(Au, v) = (u, Av)$. Крім того, справедлива лема [5]: для всякої сіткової функції $u(x)$, що задана на сітці ω_h та перетворюється в нуль на межі γ_h , має місце подвійна нерівність

$$\gamma_1 \|u\|^2 \leq (Au, u) \leq \gamma_2 \|u\|^2, \quad (20)$$

де γ_1 і γ_2 – сталі енергетичної еквівалентності оператора A . З урахуванням умови еліптичності (3), вони обчислюються так [3]:

$$\gamma_1 = \frac{8c_1}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2l}, \quad \gamma_2 = \frac{8c_2}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2l},$$

де c_1 і c_2 – сталі з умови (3), $h = h_1 = h_2$, $l = l_1 = l_2$.

Двошарові ітераційні методи. Для розв'язання отриманої різницевої еліптичної задачі розглянемо двошарові ітераційні методи, а саме – метод Чебишова і метод простої ітерації. В роботах [5, 8, 12] запропонована така явна двошарова ітераційна схема:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Ay_k = g, k = 0, 1, \dots$$

з довільним початковим наближенням $y_0 \in H$ та ітераційними параметрами τ_k , що знаходяться за формулами

$$\tau_k = \frac{\tau_0}{1 + \rho_0 \mu_k}, \quad \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad \rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}, \quad \mu_k \in \mathfrak{M}_n, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Тут через \mathfrak{M}_n позначено множину коренів полінома Чебишова:

$$\mathfrak{M}_n = \left\{ -\cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right), i = 0, 1, \dots, n \right\}.$$

З наведеної формули для τ_k видно, що для обчислення ітераційних параметрів потрібно задати число ітерацій n :

$$n \geq n_0(\varepsilon) = \frac{\ln(1/\varepsilon + \sqrt{1/\varepsilon^2 - 1})}{\ln(1/\rho_1)} \quad \text{або} \quad n_0(\varepsilon) = \frac{\ln(2/\varepsilon)}{\ln(1/\rho_1)}, \quad \rho_1 = \frac{1 - \sqrt{\xi}}{1 + \sqrt{\xi}}.$$

Такий метод має назву *ітераційний чебишовський метод*.

Частинним випадком чебишовського методу є метод, побудований при додатковому обмеженні $\tau_k \equiv \tau$, тобто в припущенні, що ітераційні параметри τ_k не залежать від номера ітерації k . Така задача виникає при знаходженні ітераційного параметра τ для стаціонарної двошарової схеми

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} + Ay_k = g, \quad k = 0, 1, \dots$$

Оптимальне значення параметра τ цієї схеми знайдено: $\tau = \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$, а

відповідний ітераційний метод має назву *метод простої ітерації*. Для числа ітерацій в ньому вірна оцінка

$$n \geq n_0(\varepsilon) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln \rho_0} \quad \text{або} \quad n_0(\varepsilon) \approx \frac{1}{2\xi} \ln \frac{1}{\varepsilon}.$$

Тришарові ітераційні методи. Тришарова ітераційна схема [8, 12] для рівняння (19) пов'язує три ітераційних наближення y_{k+1} , y_k і y_{k-1} так, що y_{k+1} визначається через y_k і y_{k-1} . Явна стандартна тришарова ітераційна схема має вигляд

$$y_{k+1} = \alpha_{k+1}(E - \tau_{k+1}A)y_k + (1 - \alpha_{k+1})y_{k-1} + \alpha_{k+1}\tau_{k+1}g, \\ y_1 = (E - \tau_1A)y_0 + \tau_1g, \quad k = 1, 2, \dots, \quad y_0 \in H,$$

де y_0 – довільне початкове наближення, α_k та τ_k – ітераційні параметри.

В [8, 12] показано, що виходячи з умов збіжності методу, параметри α_k та τ_k розраховуються наступним чином:

$$\alpha_{k+1} = \frac{2q_{k+1}}{\rho_0 q_k}, \quad \tau_k \equiv \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad q_k = \frac{2\rho_1^k}{1 + \rho_1^{2k}}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Такий метод має назву *напівітераційний метод Чебишова*. Для числа ітерацій n має місце оцінка $n \geq n_0(\varepsilon)$, де

$$n_0(\varepsilon) = \frac{\ln 0,5\varepsilon}{\ln \rho_1}, \quad \rho_1 = \frac{1 - \sqrt{\xi}}{1 + \sqrt{\xi}}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

Аналогічно двошаровим методам можна побудувати *стаціонарний тришаровий метод* [8, 12]:

$$y_{k+1} = \alpha(E - \tau A)y_k + (1 - \alpha)y_{k-1} + \alpha \tau g,$$

$$y_1 = (E - \tau A)y_0 + \tau g, \quad k = 1, 2, \dots, \quad y_0 \in H$$

зі сталими (стаціонарними) параметрами вигляду

$$\alpha = 1 + \rho_1^2, \quad \tau = \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad \rho_1 = \frac{1 - \sqrt{\xi}}{1 + \sqrt{\xi}}, \quad \xi = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

де γ_1 і γ_2 – сталі енергетичної еквівалентності, визначені в (20).

Опис розробленого програмного продукту. Після розгляду основних понять та принципів побудови різницевих схем для еліптичних диференціальних рівнянь з мішаними похідними та явних ітераційних методів для розв’язання еліптичних сіткових рівнянь, були розроблені відповідні обчислювальні алгоритми. Зазначені алгоритми спираються на методи побудови різницевих схем різних порядків точності для еліптичного рівняння з мішаними похідними у випадку коефіцієнтів при мішаних похідних, що не змінюють та змінюють знак, принципи побудови відповідних операторних рівнянь та наближені методи їх розв’язання (ітераційний метод Чебишова (ІМЧ), метод простої ітерації (МПІ), напівітераційний метод Чебишова (НМЧ) та стаціонарний ітераційний метод (СІМ)).

В розробленому програмному продукті користувачеві надається можливість задати параметри сітки та значення точності розрахунків. Натиснувши на кнопку «Вирішити», отримаємо зображення побудованої сітки та результати розв’язання задачі явними ітераційними методами, зображеними у вигляді таблиці, побудованої за вузлами сітки. Для кожного методу виводяться кількість ітерацій та норма похибки, що характеризує точність розв’язку(рис. 3).

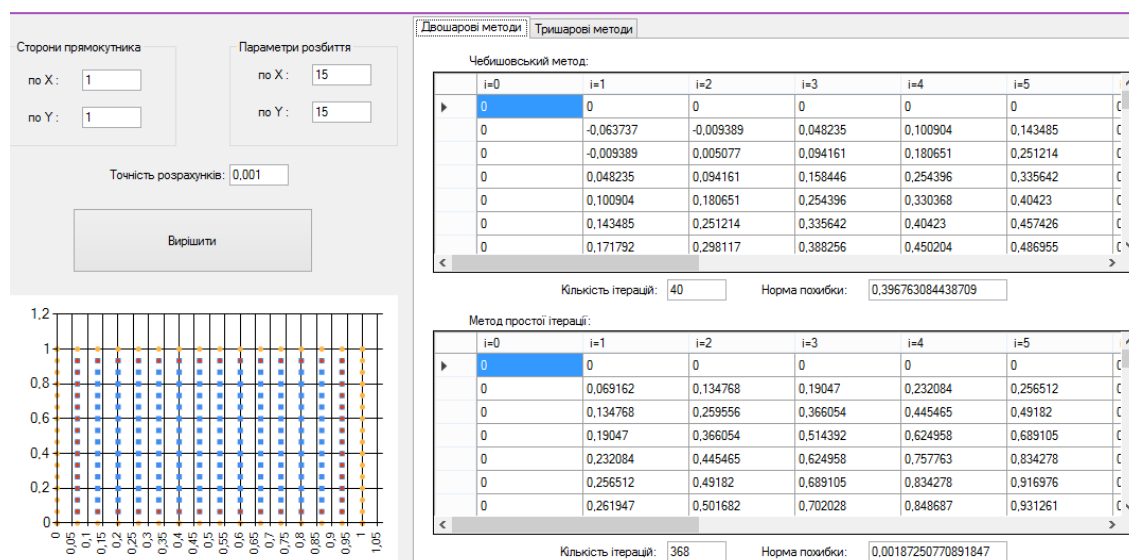


Рис. 3 – Інтерфейс продукту

Також результати роботи програми формуються у вигляді текстового файлу. Так, за допомогою математичного пакету Maple будуються графіки отриманих розв'язків, що надає можливість візуально оцінити їх точність у порівнянні з точним розв'язком, отриманим у цьому ж пакеті.

Модельна задача 1. Розглянемо задачу знаходження неперервної в квадраті функції, яка задовольняє рівняння (1) при

$$f(x_1; x_2) = -4x_1 \cos x_2 + 3x_1^2 x_2 \sin x_2 - 2x_1^2 [\cos x_2 - x_2 \sin x_2] + x_1^2 [\sin x_2 + x_2 \cos x_2];$$

$$k_{11}(x) = x_1, \quad k_{12}(x) = k_{21}(x) = x_1 x_2, \quad k_{22}(x) = x_2$$

та крайові умови

$$u(x) = g(x) = x_1^2 \cos x_2, \quad x \in \Gamma,$$

де Γ – межа \bar{G} , $x = (x_1; x_2)$. Будемо вважати, що умови (3), (4) виконані. Точний розв'язок цієї задачі відомий в \bar{G} і дорівнює

$$u(x_1; x_2) = x_1^2 \cos x_2.$$

Нескладно бачити, що властивості вихідних даних $f(x)$, $g(x)$, ($\alpha, \beta = 1, 2$) такі, що задача (1), (2) має єдиний розв'язок, який становить гладку функцію в області. Графік розв'язку зображено на рис. 4.

Отже, перейдемо для розв'язання задачі (1), (6) методом скінченних різниць при значенні точності розрахунків $\varepsilon = 0.001$. Враховуючи, що коефіцієнти при мішаних похідних не змінюють свій знак, для розв'язання задачі нами можуть бути використанні схеми (7), (14) та (15), які задовольнятимуть властивості монотонності та консервативності.

За допомогою розробленого програмного продукту було проведено експеримент з використанням різницевих схем (7), (14), (15) при різних розбиттях сітки. В табл. 1 та табл. 2 зображені загальні відомості про результати до проведених експериментів.

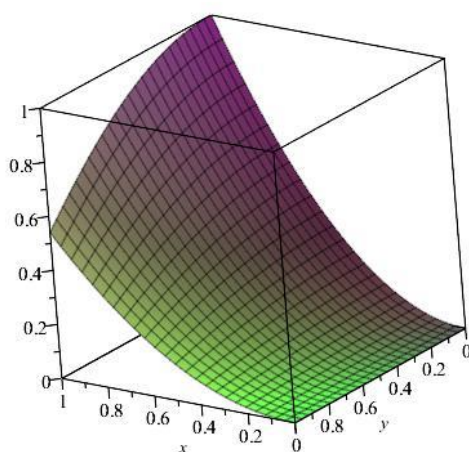


Рис.4 – Графік розв'язку

Провівши експерименти при різних значеннях параметрів сітки, можемо зробити такі висновки: для апроксимації диференціального оператора (1) краще всього обирати різницевий оператор (15) другого порядку точності, а

для розв'язання операторного рівняння (19) найкращим вибором є тришаровий напівітераційний метод Чебишова другого порядку точності.

Таблиця 1

Результати для другої модельної задачі при розбитті сітки 5×5

Ітераційний метод	Перша різницева схема з точністю $O(h)$			Друга різницева схема з точністю $O(h^2)$ та семиточковим шаблоном			Третя різницева схема з точністю $O(h^2)$ та дев'ятиточковим шаблоном		
	n	Норма похибки	Час рахунку, мс	n	Норма похибки	Час рахунку, мс	n	Норма похибки	Час рахунку, мс
ІМЧ	14	0,128115	21	14	0,086434	28	14	0,122756	22
МПП	47	0,696711	12	44	0,027417	13	44	0,001411	14
НМЧ	14	0,702594	7	14	0,027417	7	14	0,001411	6
СІМ	14	0,723746	3	14	0,027459	3	14	0,001411	4

Таблиця 2

Результати для другої модельної задачі при розбитті сітки 10×15

Ітераційний метод	Перша різницева схема з точністю $O(h)$			Друга різницева схема з точністю $O(h^2)$ та семиточковим шаблоном			Третя різницева схема з точністю $O(h^2)$ та дев'ятиточковим шаблоном		
	n	Норма похибки	Час рахунку, мс	n	Норма похибки	Час рахунку, мс	n	Норма похибки	Час рахунку, мс
ІМЧ	38	0,09719	61	36	0,06451	64	42	0,042836	99
МПП	347	0,015657	102	301	0,003095	119	477	0,000134	234
НМЧ	38	0,015657	16	36	0,003095	18	42	0,000134	30
СІМ	38	0,015657	17	36	0,004396	19	42	0,000129	30

Для візуалізації отриманих результатів надаються графіки розв'язків, побудованих з використанням першої, другої та третьої різницевих схем та тришарового напівітераційного методу Чебишова при розбитті сітки 5×5 (рис. 5) та при розбитті сітки 10×15 (рис. 6).

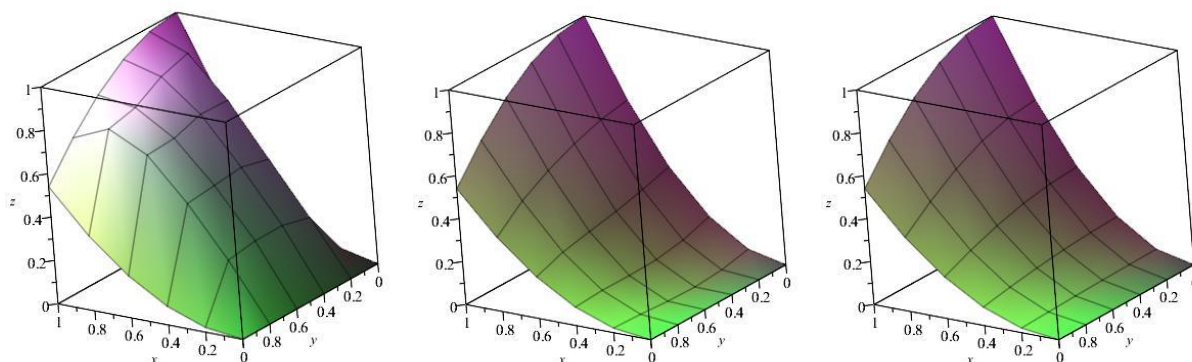


Рис. 5 – Графіки розв'язків, побудованих з використанням першої, другої та третьої різницевих схем відповідно та тришарового напівітераційного методу Чебишова

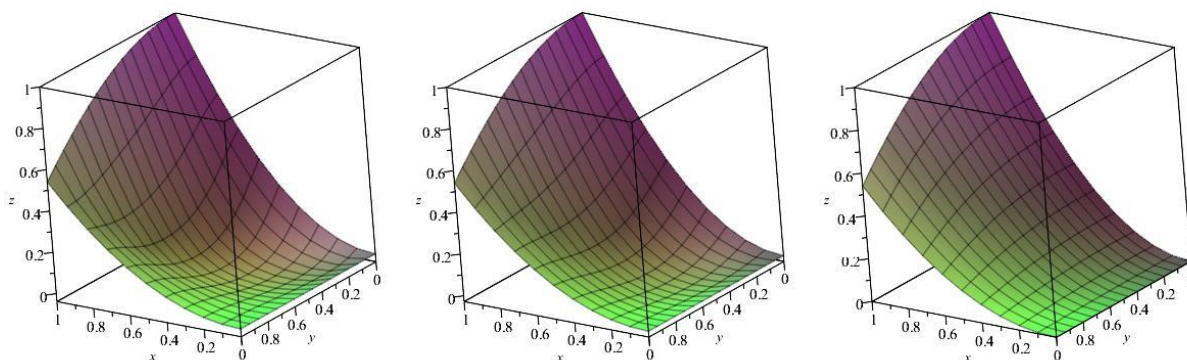


Рис. 6 – Графіки розв'язків, побудованих з використанням першої, другої та третьої різницевої схем відповідно та тришарового напівітераційного методу Чебишова

Модельна задача 2. Розглянемо задачу знаходження неперервної в квадраті функції, яка задовольняє рівняння (1) при

$$f(x_1; x_2) = 32 \sin(4x_1) \sin(4x_2) - 4 \cos x_1 [4 \cos(x_1 + x_2) \cos x_2 - \sin x_2 \sin(x_1 + x_2)] - \\ - 4 \cos x_2 [4 \cos(x_1 + x_2) \cos x_1 - \sin x_1 \sin(x_1 + x_2)]; \\ k_{11}(x) = k_{22}(x) = 1, \quad k_{12}(x) = k_{21}(x) = \cos(x_1 + x_2)$$

та крайові умови

$$u(x) = g(x) = \sin(4x_1) \sin(4x_2), \quad x \in \Gamma,$$

де Γ – межа \bar{G} , $x = (x_1; x_2)$. Будемо вважати, що умови (3), (4) виконані. Точний розв'язок цієї задачі відомий в \bar{G} і дорівнює

$$u(x_1; x_2) = \sin(4x_1) \sin(4x_2).$$

Нескладно бачити, що властивості вихідних даних $f(x)$, $g(x)$, ($\alpha, \beta = 1, 2$) такі, що задача (1), (2) має єдиний розв'язок, який становить гладку функцію в області. Графік розв'язку зображено на рис. 7.

У модельній задачі 2 ми розглянемо пошук розв'язку задачі (1), (2) методом скінченних різниць при значенні точності розрахунків $\varepsilon = 0.001$ для коефіцієнтів при мішаних похідних, що змінюють свій знак. Оскільки в цьому випадку схеми (7), (14) та (15) не є придатними, використаємо схему (16), (17), яка вирішує проблему змінних знаків коефіцієнтів при мішаних похідних та задовольняє властивості монотонності й консервативності.

Схема (16), (17) має другий порядок апроксимації диференціального оператора (1) та має шаблон с дев'ятьма точками (рис. 2). Для проведення якісного порівняльного аналізу будемо розв'язувати задачу, використовуючи не тільки схему (16), (17), але й схему (14), з урахуванням заміни (17).

За допомогою розробленого програмного продукту було проведено експерименти, з використанням зазначених вище різницевоїх схем при різних розбиттях сітки. З результатами можна ознайомитися в таблицях 3 та 4.

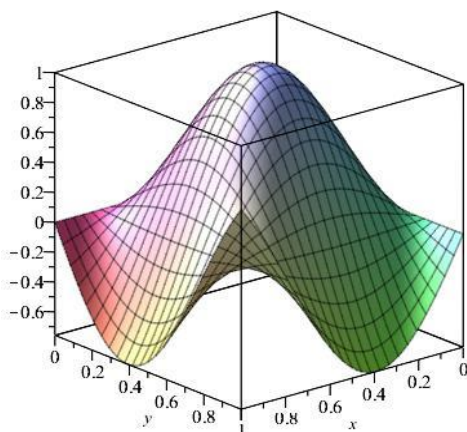


Рис. 7 – Графік розв'язку задачі

Таблиця 3

Результати для третьої модельної задачі при розбитті сітки 10×10

Ітераційний метод	Перша різницева схема з точністю та семиточковим шаблоном			Друга різницева схема з точністю та дев'ятиточковим шаблоном		
	n	Норма похибки	Час рахунку, мс	n	Норма похибки	Час рахунку, мс
ІМЧ	24	0,969810	53	24	0,468357	56
МПІ	138	1,280824	54	138	0,02281	59
НМЧ	24	1,280825	10	24	0,022826	9
СІМ	24	1,277643	10	24	0,017973	10

Таблиця 4

Результати для третьої модельної задачі при розбитті сітки

Ітераційний метод	Перша різницева схема з точністю та семиточковим шаблоном			Друга різницева схема з точністю та дев'ятиточковим шаблоном		
	n	Норма похибки	n	Норма похибки	Норма похибки	Час рахунку, мс
ІМЧ	56	0,593492	117	44	0,374173	117
МПІ	581	0,925466	219	447	0,001871	196
НМЧ	56	0,925466	34	44	0,001874	28
СІМ	56	0,925228	38	44	0,001068	27

Проглянувши таблиці, бачимо, що значно збільшились кількість ітерацій та час рахунку методів при розв'язанні такого типу задач.

Для візуалізації отриманих результатів надаються графіки розв'язків, побудованих з використанням першої, другої та третьої різницевих схем та тришарового напівітераційного методу Чебишова при розбитті сітки 10×10 (рис. 8) та при розбитті сітки 20×15 (рис. 9).

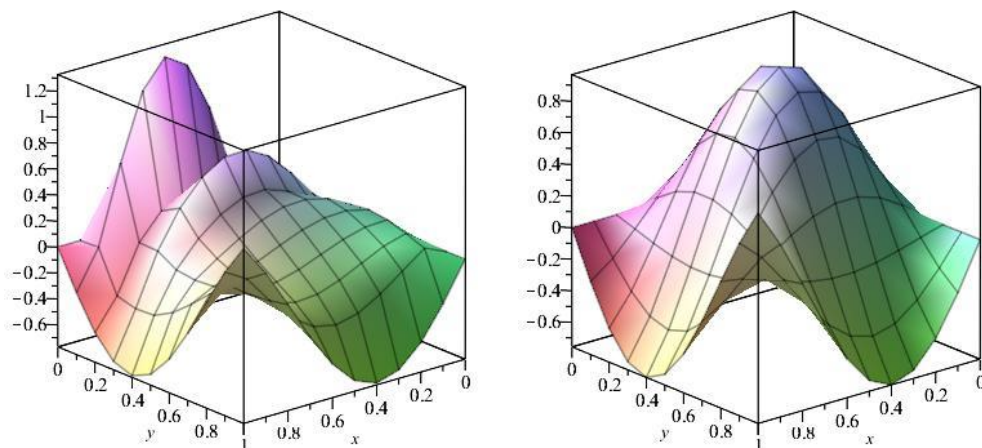


Рис. 8 – Графіки розв’язків, побудованих з використанням першої та другої різницьких схем відповідно та тришарового напівітераційного методу Чебишова

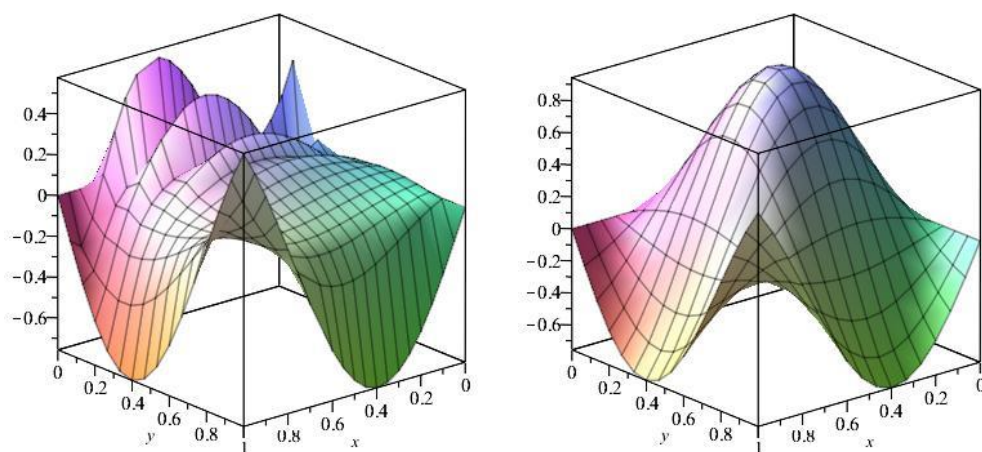


Рис. 9 – Графіки розв’язків, побудованих з використанням першої та другої різницьких схем відповідно та тришарового напівітераційного методу Чебишова

Висновки. Було проведено аналіз серед різноманітних сучасних методів розв’язання даної задачі та на його основі обраний найбільш поширений і універсальний метод – метод скінченних різниць. Тож, були побудовані обчислювальні алгоритми різницьких схем різних порядків апроксимації. При цьому було збережено важливі властивості монотонності і консервативності. Для цього були використані спеціальні різницькі схеми для еліптичних рівнянь з мішаними похідними для коефіцієнтів $k_{\alpha\beta}$ при мішаних похідних, які змінюють свій знак. Також були побудовані обчислювальні алгоритми для розв’язання системи різницьких рівнянь, яка має специфічний вигляд.

На основі розроблених алгоритмів був створений програмний продукт та проведено порівняльний аналіз результатів роботи реалізованих методів на прикладі модельних задач різного типу.

Розглянута проблема є дуже важливою, оскільки на практиці виникають все більш і більш складні постановки задач для диференціальних рівнянь

еліптичного типу, які вимагають як розробки нових методів, так і розширення області застосування вже існуючих методів. При цьому відбувається переоцінка порівняльних характеристик різних методів.

Результати даної роботи можуть бути застосовані під час розробки ефективних обчислювальних схем більш високих порядків точності для розв'язання еліптичних диференціальних рівнянь з мішаними похідними, в тому числі за крайових умов інших типів; при дослідженні різницевих схем і відповідних ітераційних алгоритмів під час розв'язання інших класів стаціонарних і нестаціонарних задач математичної фізики та оптимального керування.

Бібліографічні посилання

1. **Kim, S.** Microhydrodynamics: Principles and Selected Applications [Текст] / S. Kim, S. J. Karrila. – Dover, 2005.
2. **Тихонов, А.Н., Самарский, А.А.** Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М., «Наука», 1972.
3. **Самарский, А.А.** Разностные методы для эллиптических уравнений [Текст] / А.А. Самарский, В.Б. Андреев. – М.: Наука, 1976.
4. **Matus, P.** Computational methods in applied mathematics [Текст] / P. Matus, I. Rybak., 2004, no.4, pp.494–505.
5. **Samarskii, A.A.** The theory of difference schemes [Текст] / A.A. Samarskii. – New York: Basel. Marcel Dekker, Inc, 2001.
6. **Вазов, В.** Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных [Текст] / В. Вазов, Дж. Форсайт. – М., ИЛ, 1963.
7. **Ладыженская, О.А.** Краевые задачи математической физики [Текст] / О.А. Ладыженская. – М., 1973.
8. **Самарский, А.А.** Введение в теорию разностных схем [Текст] / А.А. Самарский. – М.: Наука, 1971.
9. **Rybak, I.V.** Monotone and conservative difference schemes for elliptic equations with mixed derivatives [Текст] / I. V. Rybak. – Dover, 2004 .
10. **Балашова, С.Д.** Чисельні методи. Частина 2. Методи розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь [Текст] / С.Д. Балашова. – Київ, 1992.
11. **Сьярле, Ф.** Метод конечных элементов для эллиптических задач: пер. с англ. [Текст] / Ф. Сьярле. – М.: Мир, 1980.
12. **Самарский, А. А.** Методы решения сеточных уравнений [Текст] / А.А. Самарский, Е.С. Николаев. – М.: Наука, 1978.

Надійшла до редколегії 21.06.2019.