УДК 519.6 doi: 10.15421/321906

Л.Л. Гарт, М.О. Васенін, Н.В. Балейко
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ АЛГОРИТМІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ФРЕДГОЛЬМА ДРУГОГО РОДУ У СЕРЕДОВИЩІ MATLAB

Досліджено найбільш поширені наближені методи розв'язання лінійного інтегрального рівняння Фредгольма другого роду, розроблено відповідні обчислювальні схеми та оцінено порядок їх точності. Для проведення експериментів виконано програмну реалізацію обраних методів на мові програмування Matlab. Проведено якісний порівняльний аналіз результатів роботи реалізованих алгоритмів на прикладі розв'язання конкретних задач.

Ключові слова: інтегральне рівняння Фредгольма другого роду, обчислювальні схеми, порівняльний аналіз, наближений розв'язок, похибка, якісна оцінка.

Исследованы наиболее распространенные приближенные методы решения линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода, разработаны соответствующие вычислительные схемы и оценен порядок их точности. Для проведения экспериментов выполнена программная реализация выбранных методов на языке программирования Matlab. Проведен качественный сравнительный анализ результатов работы реализованных алгоритмов на примере решения конкретных задач.

Ключевые слова: интегральное уравнение Фредгольма второго рода, вычислительные схемы, сравнительный анализ, приближенное решение, погрешность, качественная оценка.

The most common approximate methods for solving the linear Fredholm integral equation of the second kind are investigated, corresponding computational schemes are developed, and the order of their accuracy is estimated. For experiments, a software implementation of the selected methods was executed in the Matlab programming language. A qualitative comparative analysis of the results of the implemented algorithms was carried out on the example of solving specific problems.

The problems of modeling complex physical processes are one of the most advanced and important ones throughout human history and today. One of the tools that helps to create a model of a process or phenomenon is integral equations. It is a very large class of problems and equations, consisting of many varieties.

One of the types of equations of this class is the Fredholm integral equations of the second kind, because these equations help to solve problems such as the analysis of dynamic machines and mechanisms in mechanics, the problem of self-oscillations of aircraft wings in aerodynamics, the problem of forced vibrations of a string, the problem of determining the critical criticality shaft rotation and a huge range of tasks in the fields of electrical engineering, physics, auto-regulation, astronomy, acoustics and more. However often these processes are quite complex, and it is very difficult to solve the integral equation explicitly. Therefore, it is advisable to make a comparative analysis of approximate methods for solving Fredholm second kind equations and to conclude in which case one or the other method produces the best results.

The results of the studies can be applied to the modeling of physical oscillation or regulation processes that require the solution of a linear Fredholm equation of the second kind with a complex kernel and a free term, which makes it impossible to find the exact solution of the equation.

Key words: Fredholm integral equation of the second kind, computational schemes, comparative analysis, approximate solution, error, qualitative estimation.

Вступ. Проблеми моделювання складних фізичних процесів є одними з найпередовіших да найважливіших протягом історії людства та сьогодення. Одним з інструментів, що допомагають створити модель процесу або явища, є інтегральні рівняння. Це дуже великий клас задач і рівнянь, що складається з багатьох різновидів.

Одним з типів рівнянь цього класу є інтегральні рівняння Фредгольма другого роду, адже ці рівняння допомагають вирішити такі задачі, як аналіз динамічних машин та механізмів у механіці, задача про власні коливання крил літака у аеродинаміці, задача о вимушених коливаннях струни, задача про визначення критичної швидкості обертання валу та ще величезний спектр задач у областях електротехніки, фізики, авторегулювання, астрономії, акустики та інших. Але часто ці процеси бувають досить складними і розв’язати інтегральне рівняння у явному вигляді дуже важко. Тому було доцільно виконати порівняльний аналіз найбільш поширених наближених методів розв’язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду та зробити висновки щодо ефективності того чи іншого методу на класі таких рівнянь з певними властивостями.

Власне, сам Ерік Фредгольм створив теорію (яка отримала назву теорія Фредгольма), що призначена для дослідження можливості розв'язання виключно таких рівнянь. Свій внесок у розвиток існуючих та пошук нових наближених методів розв’язання інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду зробили багато вчених-математиків, серед яких Борис Гальоркін та Микола Петров [1].

Постановка задачі. Інтегральним рівнянням називають рівняння, в якому невідома функція входить під знак інтеграла. Інтегральне рівняння Фредгольма другого роду, як відомо, має вигляд

$$y(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)y(x)ds=f(x), \quad a\le x\le b, \tag{1}$$

де $\left[a,b\right]$ – заданий проміжок числової осі; $K\left(x,s\right)$ – відома функція в області $S=\left\{(x,s):\ a\le x\le b;\ a\le s\le b\right\}$, яку називають ядром інтегрального рівняння; $f\left(x\right)$ – відома функція на відрізку $\left[a,b\right]$ (вільний член або права частина рівняння); $y\left(x\right)$ – шукана функція на $\left[a,b\right]$; λ – числовий параметр, який може бути як заданий, так і ні. В останньому випадку рівняння (1) являє собою не одне рівняння, а сім’ю рівнянь, що залежить від числового параметра λ.

Нагадаємо деякі важливі поняття і терміни, пов’язані з розглядуваним рівнянням. Значення параметра λ, при яких відповідне однорідне інтегральне рівняння

$$y(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)y(s)ds=0,\quad a\le x\le b$$

має нетривіальні розв'язки, називають характеристичними значеннями інтегрального рівняння (1), а ненульові розв'язки, що їм відповідають, – власними функціями інтегрального рівняння. При цьому числа $\frac{1}{\lambda}$ називають власними числами (значеннями) інтегрального рівняння (1). Характеристичні значення і власні функції інтегрального рівняння Фредгольма часто називають характеристичними значеннями і власними функціями ядра $K(x,s)$. З теорії інтегральних рівнянь відомо [1], що якщо λ не є характеристичним значенням ядра, то рівняння (1) має єдиний розв'язок $y(x)\in L_2[a,b]$ для будь-якої правої частини $f(x)\in L_2[a,b]$.

Ядро $K(x,s)$ інтегрального рівняння (1) називають фредгольмовим, якщо воно належить простору $L_2(S)$; якщо $K(x,s)\in L_2(S)$ є ядром зі слабкою особливістю, то відповідне інтегральне рівняння називають рівнянням зі слабкою особливістю. Ядро $K(x,s)$ називають виродженим, якщо воно має вигляд

$$K(x,s)=\alpha_1(x)\beta_1(s)+\ldots+\alpha_m(x)\beta_m(s),\quad (x,s)\in S,$$

де $\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^m$, $\{\beta_i(s)\}_{i=1}^m$ – дві системи лінійно-незалежних на $[a,b]$ функцій. Ядро $K(x,s)$ називають різницевим, якщо воно залежить від різниці аргументів:

$$K(x,s)=K(x-s),\quad (x,s)\in S.$$

Ядро $K(x,s)$ називається симетричним, якщо

$$K(x,s)=K(s,x),\quad (x,s)\in S.$$

При цьому інтегральне рівняння, отримане з (1) заміною ядра $K(x,s)$ на $K(s,x)$, називають спряженим (союзним, транспонованим) рівнянням по відношенню до рівняння (1).

Змінні s та x можуть змінюватись у різних інтервалах (наприклад, $a\le s\le b$ та $c\le x\le d$). Для визначеності будемо вважати, що $c=a$ та $b=d$ (цього завжди можливо досягти лінійною підстановкою $x=\alpha\overline{x}+\beta$ за допомогою правильного вибору сталих α та β).

Випадок, коли границі інтегрування a і/або b можуть бути нескінченними, не виключається, але тоді слід уважно перевіряти виконання умови квадратичного інтегрування ядра $K(x,s)$ у квадраті $S=\{a\le x\le b;\ a\le s\le b\}$.

Метою даної роботи є порівняльний аналіз найбільш поширених методів наближеного розв'язання інтегрального рівняння (1), що передбачає побудову відповідних обчислювальних схем, їх програмну реалізацію та оцінку ефективності на прикладі розв'язання конкретних задач.

За досліджувальні методи в роботі було обрано метод квадратур, метод вироджених ядер, метод найменших квадратів, метод Гальоркіна-Петрова, метод колокації [1]. Розглянемо детальніше кожен з названих методів.

1. Метод квадратур [2 – 4]. Побудуємо на відрізку $[a,b]$ сітку з вузлами $a \le x_1 < x_2 < \ldots < x_n \le b$ і перепишемо рівняння (1) у вузлах сітки:

$$y(x_i) - \lambda \int_a^b K(x_i, s) y(s) ds = f(x_i), \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Далі за допомогою тої чи іншої квадратурної формули апроксимуємо інтеграли в рівностях (2) кінцевими сумами:

$$y_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} A_j K_{ij} y_j = f_i, \; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

де $y_i = \tilde{y}(x_i)$, $f_i = f(x_i)$, $K_{ij} = K(x_i, x_j)$; $\tilde{y}$ – наближення до шуканої функції y; A_j – ваги квадратурної формули.

Розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3) дає наближені значення шуканої функції $y(x)$ у вузлах сітки x_i. По них за допомогою інтерполяції можна побудувати наближений розв'язок інтегрального рівняння (1) в аналітичному вигляді на усьому проміжку $[a,b]$.

Нехай $\lambda = 1$, а сітка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ рівномірна з кроком h. Для апроксимації інтегралів використаємо формулу трапецій. Тоді система лінійних алгебраїчних рівнянь (3) матиме вигляд

$$y_i - h \sum_{j=1}^{n} w_i K_{ij} y_j = f_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

де $w_1 = w_n = \dfrac{1}{2}$, $w_j = 1$ при $j = 2, 3, \ldots, n-1$.

2. Метод вироджених ядер [3, 4]**.** Як зазначалось вище, ядро інтегрального рівняння є виродженим, якщо його можна представити у вигляді

$$K(x,s) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x) \beta_i(s). \tag{5}$$

Будемо вважати, що $\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^{m}$, $\{\beta_i(s)\}_{i=1}^{m}$ – дві лінійно-незалежні системи неперервних на $[a,b]$ функцій.

Підставимо ядро (5) в інтегральне рівняння Фредгольма (1):

$$y(x) - \lambda \int_a^b \left[\sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x) \beta_i(s) \right] y(s) ds = f(x), \; x \in [a,b]. \tag{6}$$

Поміняємо в (6) операції інтегрування та сумування місцями:

$$y(x) - \lambda \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x) \int_a^b \beta_i(s) y(s) ds = f(x), \quad x \in [a,b]. \tag{7}$$

Уведемо наступні позначення для інтегралів у рівнянні (7):

$$c_i = \int_a^b \beta_i(s) y(s) ds, \; i = 1, 2, \ldots, m. \tag{8}$$

Користуючись співвідношеннями (7), (8), отримаємо наступне аналітичне представлення розв'язку рівняння Фредгольма (1) з виродженим ядром:

$$y(x) = \lambda \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_i(x) + f(x), \quad x \in [a,b],$$

де c_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ – числові коефіцієнти, що потребують визначення. Підставляючи цей вираз в (7), матимемо:

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i(x) \left\{ c_i - \int_a^b \beta_i(s) \left[f(s) + \lambda \sum_{j=1}^{m} c_j \alpha_j(x) \right] ds \right\} = 0, \ x \in [a,b].$$

Система функцій $\{\alpha_i(x)\}_{i=1}^{m}$ лінійно незалежна, отже всі числові коефіцієнти в лінійній комбінації у лівій частині дорівнюють нулеві:

$$c_i - \int_a^b \beta_i(s) \left[f(s) + \lambda \sum_{j=1}^{m} c_j \alpha_j(x) \right] ds = 0, \ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{9}$$

або

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^{m} c_j \int_a^b \alpha_j(x) \beta_i(s) ds = \int_a^b \beta_i(s) f(s) ds, \ i = 1, 2, \ldots, m. \tag{10}$$

Якщо ввести позначення

$$a_{ij} = \int_a^b \alpha_j(x) \beta_i(s) ds, \quad f_i = \int_a^b \beta_i(s) f(s) ds, \quad i, j = 1, 2, \ldots, m, \tag{11}$$

то співвідношення (10) набудуть вигляду системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих c_i:

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^{m} a_{ij} c_i = f_i, \ \ i = 1, 2, \ldots, m. \tag{12}$$

Детальніше:

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{11} & \ldots & -\lambda a_{11} \\ -\lambda a_{11} & 1 - \lambda a_{22} & \ldots & -\lambda a_{11} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda a_{11} & -\lambda a_{11} & \ldots & 1 - \lambda a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \ldots \\ f_m \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Якщо число λ регулярне (тобто λ не є характеристичним значенням рівняння (1)), то визначник матриці системи (13) відмінний від нуля і вона має єдиний розв'язок.

Очевидно, що клас інтегральних рівнянь з виродженим ядром досить обмежений. Якщо ядро в інтегральному рівнянні невироджене, але достатньо гладке, то його можна апроксимувати близьким до нього виродженим ядром (наприклад, розклавши його в ряд Тейлора), а отримане після цього інтегральне рівняння розв'язати наведеним вище способом.

3. Метод найменших квадратів [3, 4]**.** Напишемо вираз для нев'язки інтегрального рівняння Фредгольма (1):

$$Ry(x) = y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds - f(x), \quad x \in [a,b]. \tag{14}$$

Якщо $y(x)$ – точний розв'язок рівняння (1), то його нев'язка дорівнюватиме нулю, тобто $Ry(x)=0$.

Наближений розв'язок $\tilde{y}(x)$ рівняння (1) будемо шукати в аналітичному вигляді

$$\tilde{y}(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i(x),\quad x\in[a,b],\tag{15}$$

де c_i $(i=1,2,..,n)$ – невідомі константи, які підлягають визначенню; $\varphi_i(x)$ $(i=1,2,..,n)$ – задані лінійно-незалежні на $[a,b]$ (координатні) функції.

Позначимо для скорочення запису через c вектор невідомих коефіцієнтів c_i, $i=1,2,..,n$. Підставимо наближений розв'язок (15) у вираз для нев'язки (14) і положимо $\epsilon(x,c)=R\tilde{y}(x)$. Матимемо

$$\epsilon(x,c)=\sum_{i=1}^{n}c_i\left[\varphi_i(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi_i(s)ds\right]-f(x),\quad x\in[a,b].\tag{16}$$

Сталі c_i, $i=1,2,..,n$ знайдемо з умови мінімуму функціонала

$$J(c)=\int_a^b\epsilon^2(x,c)dx,\tag{17}$$

тобто з умов

$$\frac{\partial J}{\partial c_i}=0,\quad i=1,2,\ldots,n.\tag{18}$$

Якщо підставити (16) в (17), отримаємо:

$$J(c)=\int_a^b\left\{\sum_{i=1}^{n}c_i\left[\varphi_i(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi_i(s)ds\right]-f(x)\right\}^2dx.$$

Обчислимо частинні похідні:

$$\frac{\partial J}{\partial c_i}=\int_a^b 2\left\{\sum_{i=1}^{n}c_i\left[\varphi_j(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi_j(s)ds\right]-f(x)\right\}\times$$
$$\times\left[\varphi_i(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi_i(s)ds\right]dx,\quad i,j=1,2,...,n.$$

Прирівняємо частинні похідні до нуля і отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь з симетричною матрицею відносно невідомих c_i, $i=1,2,\ldots,n$:

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}c_j=b_i,\quad i=1,2,..,n,\tag{19}$$

де

$$a_{ij}=\int_a^b\left[\varphi_j(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi_j(s)ds\right]\times\left[\varphi_i(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi_i(s)ds\right]dx;$$

$$b_i=\int_a^b f(x)\left[\varphi_i(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi_i(s)ds\right]dx,\quad i,j=1,2,...,n.$$

Розв'язавши систему (19), отримаємо значення невідомих коефіцієнтів c_i, $i=1,2,\ldots,n$ і знайдемо наближений розв'язок у вигляді (15), що, у свою чергу, дозволить знайти чисельні значення наближеного розв'язку в будь-якій точці на $[a,b]$.

4. Метод Гальоркіна-Петрова [3, 4]**.** Нехай в інтегральному рівнянні Фредгольма (1) $K(x,s)\in L_2(S)$ (фредгольмове ядро), $f(x)\in L_2[a,b]$. Розв'язок $y(x)$ рівняння (1) будемо шукати у гільбертовому просторі $L_2[a,b]$ зі скалярним добутком $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$. Оберемо в $L_2[a,b]$ дві системи лінійно-незалежних на $[a,b]$ функцій $\varphi_i(x)$ та $\psi_i(x)$, $i=1,2,\ldots,n$. Наближений розв'язок $\tilde{y}(x)$ рівняння (1) будемо шукати в аналітичному вигляді

$$\tilde{y}(x)=f(x)+\sum_{j=1}^{n}c_j\varphi_j(x),\quad x\in[a,b]. \tag{20}$$

Тут c_j ($j=1,2,\ldots,n$) – невідомі константи, які підлягають визначенню з умови ортогональності нев'язки (14) рівняння Фредгольма (1) на наближеному розв'язку $\tilde{y}(x)$ усім лінійно-незалежним функціям $\psi_i(x)$, $i=1,2,\ldots,n$:

$$(R\tilde{y},\psi_i)=0,\ i=1,2,\ldots,n\,. \tag{21}$$

Нескладно бачити, з урахуванням (14), (20), що співвідношення (21) є системою лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів c_j:

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_j=b_i,\quad i=1,2,\ldots,n\,, \tag{22}$$

де

$$a_{ij}=\int_a^b\varphi_j(x)\psi_i(x)dx-\lambda\int_a^b\psi_i(x)\int_a^bK(x,s)\varphi_j(s)dsdx,$$

$$b_i=\lambda\int_a^b\psi_i(x)\int_a^bK(x,s)f(s)dsdx,\quad i,j=1,2,...,n.$$

Розв'язавши систему (22), знайдемо усі невідомі коефіцієнти c_j, $j=1,2,\ldots,n$ і отримаємо наближений розв'язок у вигляді (20), що, у свою чергу, надасть змогу отримати чисельні результати на розглядуваному відрізку.

5. Метод колокації [3, 4]. Будемо шукати наближений розв'язок $\tilde{y}(x)$ інтегрального рівняння Фредгольма (1) в наступному аналітичному вигляді:

$$\tilde{y}(x)=\sum_{j=1}^{n}c_j\varphi_j(x),\ \ x\in[a,b], \tag{23}$$

де c_j ($j=1,2,\ldots,n$) – невідомі числові коефіцієнти, що підлягають визначенню; $\varphi_j(x)$ ($j=1,2,\ldots,n$) – задані лінійно-незалежні на $[a,b]$ координатні функції. Підставимо вираз (23) у ліву частину (14) і отримаємо нев'язку рівняння (1) на наближеному розв'язку $\tilde{y}(x)$:

$$R\tilde{y}(x)=\sum_{j=1}^{n}c_j\varphi_j(x)-\lambda\int_a^bK(x,s)\sum_{j=1}^{n}c_j\varphi_j(x)ds-f(x)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n} c_j\left[\varphi_j(x)-\lambda\int_a^b K(x,s)\varphi_j(x)ds\right]-f(x).$$

Згідно з методом колокації, вимагатимемо, щоб нев’язка $R\tilde{y}(x)$ оберталася до нуля у заданій системі точок відрізка $[a,b]$: $a\le x_1<x_2<\ldots<x_n\le b$. Тоді отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $c_j,\ j=1,2,\ldots,n$:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\left[\varphi_j(x_i)-\lambda\int_a^b K(x_i,s)\varphi_j(x_i)ds\right]=f(x_i),\quad i=1,2,...,n. \tag{24}$$

Якщо позначити елементи матриці системи (24) за

$$\psi_j(x_i,\lambda)=\varphi_j(x_i)-\lambda\int_a^b K(x_i,s)\varphi_j(s)ds,\quad i=1,2,\ldots,n, \tag{25}$$

то ця система запишеться у наступному вигляді:

$$\sum_{j=1}^{n}\psi_j(x_i,\lambda)c_j=f(x_i),\quad i=1,2,\ldots,n. \tag{26}$$

Якщо визначник системи (26) не дорівнює нулеві, то з неї можна однозначно знайти значення коефіцієнтів $c_j,\ j=1,2,\ldots,n$ і, відповідно, отримати наближений розв'язок $\tilde{y}(x)$ рівняння (1) за формулою (23).

Отже, алгоритм розв’язання інтегрального рівняння Фредгольма (1) методом колокації полягає у розрахуванні елементів матриці за формулами (25) з подальшим розв'язанням системи лінійних алгебраїчних рівнянь (26). Це надає змогу отримати наближений аналітичний розв'язок вихідної задачі, а з нього (за необхідністю) і чисельні результати.

Модельний приклад [4]**.** З використанням кожного з розглянутих вище наближених методів було проведено чисельні експерименти для розв’язання наступного модельного прикладу. Нехай у рівнянні (1) задані: межі інтегрування $a=-\pi$ та $b=\pi$, параметр $\lambda=\dfrac{3}{10\pi}$, ядро $K(x,s)=\dfrac{1}{0.64\cos^2\dfrac{x+s}{2}-1}$ та права частина $f(x)=25-16\sin^2(x)$. Отже, інтегральне рівняння має вигляд:

$$y(x)-\frac{3}{10\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{y(s)}{0.64\cos^2\frac{x+s}{2}-1}ds=25-16\sin^2(x),\quad x\in[-\pi,\pi].$$

Точний розв’язок цього рівняння відомий і надається формулою

$$y(x)=8.5+\left(\frac{128}{17}\right)\cos(2x).$$

Для наведеного модельного прикладу за допомогою програмної реалізації алгоритмів розглянутих вище методів були одержані чисельні результати та проведено їх якісний порівняльний аналіз.

Результати чисельних експериментів. Зауважимо насамперед, що оцінка складності алгоритмів за часом та простором залежить від середовища та мови програмування, на яких реалізовувались алгоритми. Так як увесь програмний код у цій роботі був реалізований на мові програмування Matlab, то кожна можливість цієї мови приймається за атомарну операцію, хоча в інших мовах та середовищах такої можливості може не бути. В зв'язку з цим оцінки обчислювальної складності та просторової складності не можна порівнювати з іншими реалізаціями, але, оскільки усі методи були реалізовані в Matlab, то правомірними є і їх порівняння, і відповідні висновки.

Наведемо спочатку загальну таблицю, у яку занесемо усі попередньо отримані результати чисельних експериментів.

Таблиця 1

Порівняльна таблиця оцінок ефективності методів

Назва методу	**Часова складність**	**Просторова складність**	**Час, с**	**Точність** $\|\Delta\|$	**Складність реалізації**
Квадратур	$O(n^2)$	$O(n^2)$	0.002	10^{-14}	2
Вироджених ядер	$O(m^2)$	$O(m)$	1.559	0.350	4
Найменших квадратів	$O(n^3)$	$O(n^2)$	65.990	0.721	3
Гальоркіна-Петрова	$O(m^2)$	$O(m^2)$	81.845	0.670	4
Колокації	$O(m^2)$	$O(m^2)$	0.977	0.824	5

Також наведемо загальний порівняльний графік для усіх розглянутих методів для спільного модельного прикладу (рис. 1).

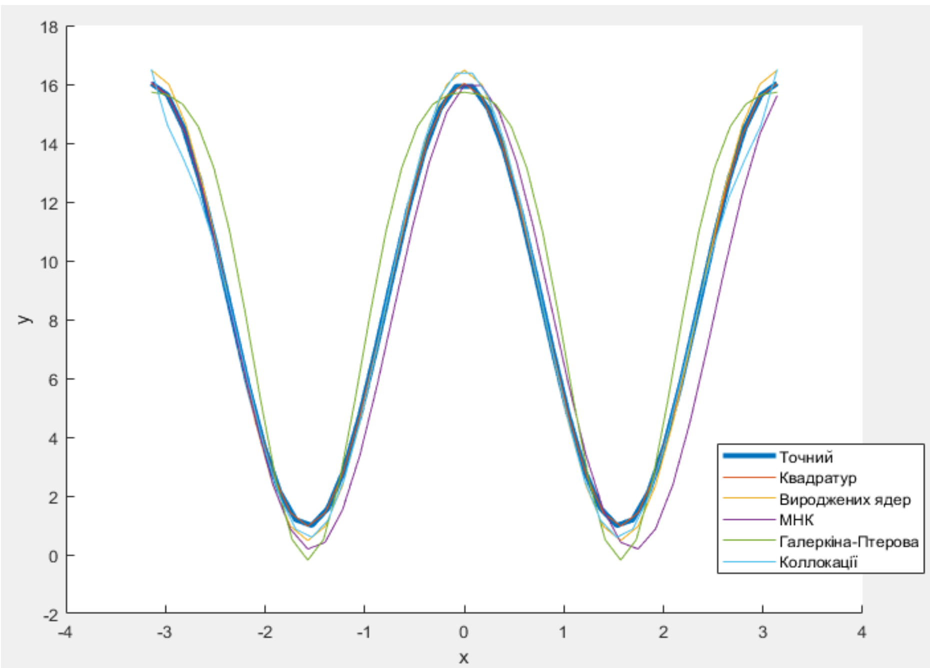

Рис. 1 - Загальний порівняльний графік

Нормалізація оцінки. На основі показників, наведених у порівняльній таблиці з результатами експериментів, нажаль, дуже складно надати комплексну оцінку тому чи іншому методу. Для того щоб вирішити це питання, треба зробити нормалізацію критеріїв оцінювання. Нормалізовувати будемо до шкали від одного до п'яти балів.

Спочатку розглянемо оцінку складності реалізації. Оцінка надавалась за таким принципом, що чим складніше алгоритм, тим більший бал він отримає. Це було зроблено для найкращого розуміння суті оцінки. Але такий показник є скоріше негативним: треба щоб більший бал відображав більш позитивні риси ніж менший. Тому тепер оцінка буде виглядати зворотною: один бал для дуже складного алгоритму та п'ять – для найпростішого.

Розглянемо оцінку складності алгоритму. Усього протягом чисельних експериментів було встановлено три оцінки складності, а саме $O\left(n^2\right)$, $O\left(n^3\right)$, $O\left(m^2\right)$. Тому зробимо наступну нормалізацію. Найгіршій оцінці, тобто $O\left(n^3\right)$ поставимо у відповідність три бали, середній $O\left(n^2\right)$ - чотири, а найкращій $O\left(m^2\right)$ – п'ять балів. Звісно, існують і набагато кращі оцінки, але ми розглядаємо лише множину тих методів, які були розглянуті у ході роботи, тому оцінки розташувались саме таким чином.

Аналогічно, нормалізуємо оцінку просторової складності алгоритму. У цьому випадку, ми також маємо три варіанти можливих оцінок, а саме $O\left(n^2\right)$, $O(m)$, $O\left(m^2\right)$. Тому, слідуючи попереднім принципам, нормалізуємо ці показники так, що найгіршому випадку, тобто $O\left(n^2\right)$ буде відповідати оцінка три бали, а найкращому $O(m)$ – п'ять балів.

Час виконання алгоритму нормалізувати досить просто, тому що ми маємо п'ять різних показників цього параметру. Розташуємо їх у порядку зростання та найменшому дамо найвищу оцінку у п'ять балів, а найбільшому навпаки – найменшу – у один бал.

За цим же принципом можна нормалізувати оцінку точності алгоритму, так як також маємо п'ять різних значень.

Запишемо отримані результати в іншу порівняльну таблицю, а також підрахуємо середній бал для кожного методу. Але також слід пам'ятати, що ефективність деяких методів дуже залежить від виду рівняння, від властивостей, що характерні цьому рівнянню, та від того, чи знаємо ми деякі характерні риси його розв'язку. Щоб врахувати ці фактори, зробимо додатковий стовпчик, де будемо ставити позначку «+» напроти таких методів, у яких є деякі примітки у використанні.

Таблиця 2

Порівняльна таблиця нормалізованих оцінок методів

Назва методу	**Часова склад-ність**	**Просторо-ва склад-ність**	**Час ви-конання**	**Точність $\|\Delta\|$**	**Складність реалізації**	**Сере-дній бал**
Квадратур	4	3	5	5	4	4,2
Вироджених ядер	5	5	3	4	2	3.8
Найменших квадратів	3	3	2	2	3	2.6
Гальоркіна-Петрова	5	4	1	3	2	3
Колокації	5	4	4	1	1	3

Висновки. Проведемо аналіз результатів, користуючись нормалізованими оцінками методів. Спочатку звернем увагу на середню оцінку методів, а потім розглянемо і порівняємо кожний детальніше.

За середньою оцінкою випереджає метод квадратур. Це пов’язано з високою точністю, гарними показниками складності за часом та за простором, а також із швидкістю виконання. Крім того, цей алгоритм не потребує попередніх підготовчих зусиль, чи якихось знань про характер розв’язку рівняння.

У той же час, метод найменших квадратів на розглянутих модельних прикладах виявився найменш ефективним майже за усіма показниками, і він потребує знання характеру розв’язку, адже, як показав чисельний експеримент, метод надзвичайно точний, коли функція проста і це відомо, і дуже втрачає ці властивості у складних випадках.

Декілька кращими видалися результати у методі Гальоркіна-Петрова, який значно випереджає метод найменших квадратів показниками складності за часом та простором, утім так само для складних прикладів його показники часу виконання та точності навіть нижче. Але для прикладу, який добре застосований до цього методу, він дає дуже точні результати.

Метод вироджених ядер надзвичайно точний для рівнянь з виродженими ядрами, але й навіть при їх апроксимації зберігає високу точність, маючи при цьому найкращі показники складності.

У свою чергу, метод колокації виявився надзвичайно складним у реалізації та підготовці і пошуку гарного прикладу, що й знизило йому оцінку, але все таки утримав планку точності, швидкості та складності. Втім, його точність також залежить від типу координатних функцій, і у випадку, коли це – поліноми Лежандра, від вибору порядку поліному.

Отже, далі можемо зробити висновки про те, у якому випадку застосовувати той чи інший алгоритм, а у якому – ні.

Якщо функція ядра інтегрального рівняння Фредгольма досить складна, а також складно чи неможливо встановити характер розв'язку, слід застосовувати метод квадратур, адже він показав найкращі результати у середньому випадку, при тому, що він не має надмірних вимог до рівняння і не потребує знання поведінки розв'язку.

Обирання інших методів цілком залежить від того, яким є ядро рівняння та від кількості інформації про точний розв'язок. Так, якщо одразу можна побачити, що ядро вироджене або його легко можна привести до такого вигляду, слід обрати метод вироджених ядер. У іншому випадку, якщо відомо, що характер розв'язку близький до поліноміального, то можна сміливо використовувати метод колокації з використанням поліномів Лежандра.

Що стосується методів Гальоркіна-Петрова та метода найменших квадратів, то рекомендації щодо їх використання однакові: це добрі знання про характер розв'язку та невелика складність (особливість) функції-ядра. Порад щодо обрання того чи іншого методу надати часом складно, тому що вони показали схожі результати на одних і тих самих прикладах. Проте, якщо враховувати лише середню отриману оцінку методів, то перевагу слід віддати методу Гальоркіна-Петрова.

На останок, слід зробити зауваження, що всі отримані результати не носять стовідсоткову правдоподібність, адже є фактори, які врахувати дуже важко, але у рамках того середовища, у межах якого відбувалося дослідження, отримані результати можна вважати коректними й об'єктивними.

Бібліографічні посилання

1. **Полянин, А.Д.** Справочник по интегральным уравнениям [Текст] / А.Д. Полянин, А.В. Манжиров. – М.: Физматлит, 2003. – 384 с.
2. **Бахвалов, Н.С.** Численные методы [Текст] / Н.С. Бахвалов. – М.: Наука, 1975. – 632 с.
3. **Березин, И.С.** Методы вычислений. Том 2. [Текст] / И.С. Березин – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. – 620 с.
4. **Верлань, А.Ф.** Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы [Текст] / А.Ф. Верлань, В.С. Сизиков. – К.: Наукова думка,1986. – 544 с.

Надійшла до редколегії 21.10.2019.