

В.Л. Волошко, М.П. Петулько

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

ЩОДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПЛАСТИН ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Розглянута гранична задача теорії пластин, яка зводиться до системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду та алгоритм саморегуляризації цієї системи. При розв'язуванні лінійної задачі для бігармонічного рівняння застосовується метод потенціалів. Наведені приклади чисельної реалізації, які демонструють високу обчислювальну ефективність у випадку областей складної форми.

Ключові слова: бігармонічне рівняння, метод потенціалів, саморегуляризація, система інтегральних рівнянь, формула Симпсона, фундаментальний розв'язок

Рассмотрена граничная задача теории пластин, которая сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма первого рода и алгоритм саморегуляризации этой системы. При решении линейной задачи для бигармонического уравнения применяется метод потенциалов. Приведены примеры численной реализации, которые демонстрируют высокую вычислительную эффективность в случае областей сложной формы.

Ключевые слова: бигармоническое уравнение, метод потенциалов, саморегуляризация, система интегральных уравнений, формула Симпсона, фундаментальное решение.

Mathematical model construction of complicate physical phenomenon often leads to the setting and solving problems of parameters optimal control in differential equations in partial derivatives. Chosen equation with boundary and initial conditions is usually mathematical model basis of the object, which is under analysis. Optimal control of right-hand side function in non-linear problem for inhomogeneous biharmonic has been investigated. With the help of various gradient methods the problems of parameters control in such equations are solved successfully. Herewith linear problem is solved with the potential method on every step. The boundary value problem of plate theory, which is reduced to a system of Fredholm integral equations of the first kind and an algorithm of self-regularization of this system, is considered. The potential method is used to solve the linear problem for the harmonic equation. Examples of numerical implementation are shown that demonstrate high computational efficiency in the case of complex form regions.

Algorithm for linear boundary value problem solution with boundary integral equations overcomes this problem successfully. Physical examples of numerical implementation have been presented, analysis of obtained solutions have been conducted. Their accuracy, algorithm simplicity and time spent evidence about this approach promising for practical results obtaining in plate theory and mathematical physics problems successful numerical solving.

Keywords: biharmonic equation, potential method, self-regulation, system of integral equations, Simpson formula, fundamental solution.

Вступ. Для постановки і розв'язування складних задач оптимізації, механіки, теорії керування [3] необхідні ефективні обчислювальні алгоритми розв'язку крайових задач рівнянь математичної фізики.

На відміну від точних (аналітичних) розв'язків для канонічних областей отримати такий розв'язок у випадку складної форми області становить істотні труднощі. Далі розглядається наближений метод розв'язування крайової задачі, який базується на інтегральному представленні певного типу і, головне, при цьому ефективно враховується складність області.

Обчислювальна ефективність цього методу, який має назву методу потенціалу, ґрунтується на двох відомих обставинах. Перша з них полягає в тому, що крайова задача зводиться до системи інтегральних рівнянь. Це означає, що апроксимації при чисельній реалізації методів потенціалу підлягають інтегральні оператори, а не диференціальні. А така апроксимація може бути здійснена з високою точністю при малих затратах часу на обчислення. Другий момент, – зведення вихідної крайової задачі до контурних інтегральних рівнянь – приводить до скорочення на одиницю розмірності множини, на якій відшукуються невідомі. Метод полягає в тому, що ядра відповідних потенціалів є фундаментальні розв'язки відповідних диференціальних рівнянь, саме такий варіант методу потенціалу був використаний. В процесі розробки, засвоєння і поглиблення уявлень про обчислювальні можливості цього підходу виявлені його істотні переваги і помітна конкурентна спроможність порівняно з іншими наближеними методами – скінчених елементів і кінцевих різниць[1, 3].

1. Крайова задача для бігармонічного рівняння.

$$\Delta \Delta w(x, y) = 0 \quad (x, y) \in \Omega, \quad (1)$$

$$w|_{\Gamma} = \varphi, \quad \left. \frac{dw}{dn} \right|_{\Gamma} = \psi, \quad (2)$$

де $w = w(x, y)$ – невідома функція; Γ – контур складної форми, який обмежує область Ω ; φ, ψ – неперервні в Ω функції. На відміну від точних розв'язків для канонічних областей, використовується наближений метод розв'язування граничної задачі для такого рівняння. Останній базується на інтегральному представленні розв'язку у вигляді суми бігармонічних потенціалів, ядра яких є фундаментальними розв'язками рівняння (1). Отже, розв'язок задачі (1)–(2) будемо шукати у вигляді:

$$w(x, y) = \int_{\Gamma} \left[\mu_1(s) \cdot r^2 \ln r + \mu_2(s) \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} (r^2 \ln r) \right] d\Gamma(s), \quad (3)$$

де μ_1, μ_2 – невідомі функції щільності, $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$

Далі крайова задача (1) – (2) зводиться до системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду

системи лінійних алгебраїчних рівнянь, обчислені за формулою Симпсона [2].

В результаті розв'язку системи (6) визначаємо μ_1 і μ_2 на ділянках контуру. Після цього можна підрахувати значення функції $w(x, y)$ в будь-якій внутрішній точці області.

Далі досліджуємо обчислювальну ефективність методу потенціалу, для чого використовуємо модельні функції та аналітичні формули, за якими можна отримати точні розв'язки для канонічних областей.

Для перевірки чисельних результатів розглядаємо різні бігармонічні в області Ω функції $f(x, y)$, тобто $\Delta\Delta f(x, y) = 0$. Такі функції далі називаються модельними. Вони наведені в другій колонці табл.1. Потім формулюємо граничну задачу

$$w|_{\Gamma} = f|_{\Gamma}, \quad \frac{\partial w}{\partial n}|_{\Gamma} = \frac{\partial f}{\partial n}|_{\Gamma},$$

де Γ – контур, який має форму еліпса, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис.1). В силу єдиності розв'язку останньої, знайдена функція $w(x, y)$ у внутрішніх точках області повинна тотожно співпадати з модельною функцією.

В табл.1 наведені результати цього обчислювального експерименту.

Таблиця 1

Форма контура	$f(x, y)$	$(x, y) \in \Omega$	Точний розв'язок	Наближений розв'язок
коло радіуса $R=6$	$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$	(1,0)	0.500000	0.497914
коло радіуса $R=8$	3	(3,0)	3.00000	3.00007
еліпс $a=10, b=8$	$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$	(0,5)	12.5000	12.5009
еліпс $a=3, b=15$	5	(0,4)	5.00000	4.99949
еліпс $a=7, b=5$	$x + y$	(3,4)	7.00000	7.00142

Дані цієї таблиці свідчать про явище саморегуляризації системи інтегральних рівнянь (4), а також про високу точність отриманих результатів для областей канонічної форми, які мають форму еліпса. Варто зауважити, що в цьому випадку точність знайдених чисельних результатів також підтверджується шляхом застосування точних аналітичних формул, викладених в [1]. Розглянемо тепер випадки областей більш складної форми (рис. 2 – 4), для яких точних аналітичних розв'язків не існує (крім квадрата), а достовірність можна перевірити тільки за допомогою модельних функцій. В табл.2 наведені чисельні результати в деяких внутрішніх точках складних

областей у випадку, коли розглядається гранична задача для бігармонічного рівняння.

Пластина має форму гіпоциклоїди (рис.3)

$$x = (R - r) \cos \phi + d \cos \left(\frac{R - r}{r} \phi \right)$$

$$y = (R - r) \sin \phi + d \sin \left(\frac{R - r}{r} \phi \right),$$

з параметрами $R = 7\text{м}$, $r = 1,2\text{м}$, $d = 0,6\text{м}$.

Таблиця 2

Контур	n	$(x, y) \in \Omega$	Точний розв'язок	Наближений розв'язок
Еліпс $a=6, b=8$	40	(0,5; 0,2)	0,00409999	0,06564821
Еліпс $a=6, b=8$	100	(3; 0)	81	80,9855333
Еліпс $a=6, b=8$	200	(1,5; 0)	5,0625	5,06285312
Квадрат $a=4$	40	(0,5; 0,4)	-0,1519	-0,14965914
Квадрат $a=4$	104	(1,5; 0,4)	2,9281	2,93074988
Квадрат $a=4$	200	(1,5; 0,4)	2,9281	2,93063146
Гіпоциклоїда $R = 7\text{м}$, $r = 1,2\text{м}$, $d = 0,6\text{м}$	40	(0; 0)	0	1,87983955
Гіпоциклоїда $R = 7\text{м}$, $r = 1,2\text{м}$, $d = 0,6\text{м}$	100	(0; 0)	0	0,11555555
Гіпоциклоїда $R = 7\text{м}$, $r = 1,2\text{м}$, $d = 0,6\text{м}$	200	(3; 0,2)	78,8416	78,8457022
Овал Касіні $a = 6\text{м}, c = 5,5\text{м}$	40	(0; 0)	0	-0,00636387
Овал Касіні $a = 6\text{м}, c = 5,5\text{м}$	100	(1,5; 0,4)	2,9281	2,92795265
Овал Касіні $a = 6\text{м}, c = 5,5\text{м}$	200	(2; 0)	16	16,0012047

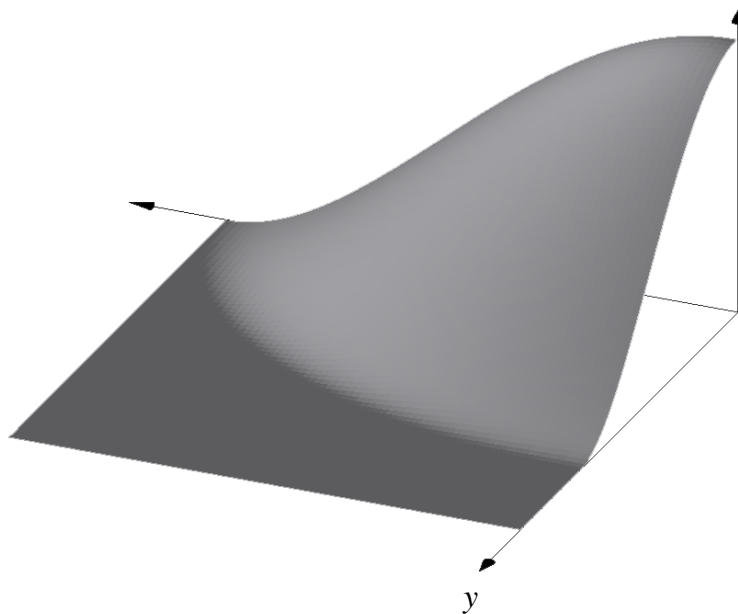


Рис. 1 Пластина форми еліпса

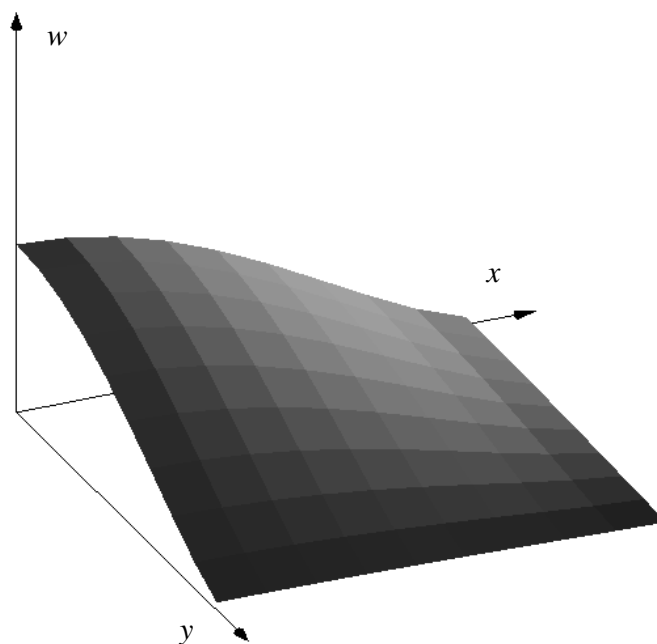


Рис. 2 Квадрат зі стороною $a = 4$

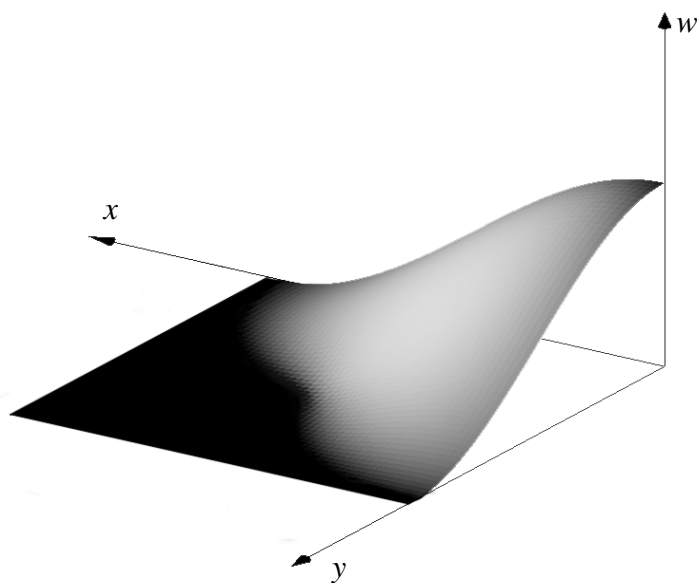


Рис. 3

Пластина має форму овалу Кассіні (рис.4) $\rho^2 = c^2 \cos 2\varphi + \sqrt{a^4 - c^4 \sin^2 2\varphi}$, де $a = 6\text{м}$, $c = 5,5\text{м}$.

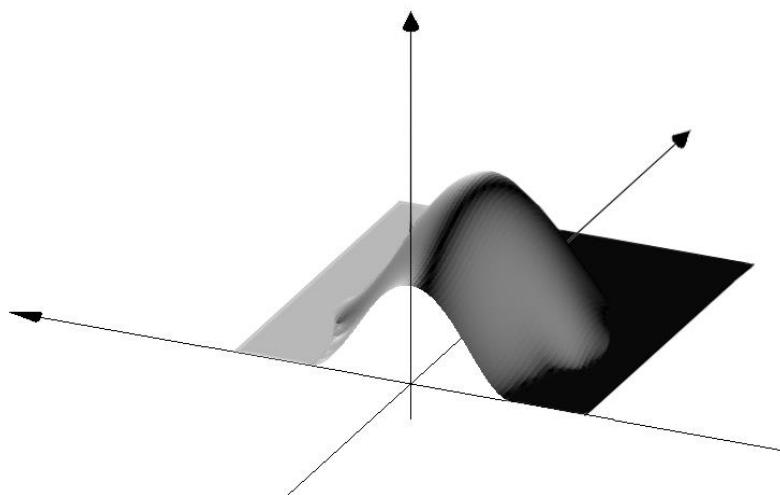


Рис. 4

2. Крайова задача для неоднорідного бігармонічного рівняння. Фізичний приклад. Розглянемо рівняння Софі Жермен, тобто рівняння згину серединних точок тонкої пружної пластини

$$\Delta\Delta w(x, y) = \frac{q}{D}, \quad (7)$$

$$w(x, y)|_{\bar{A}} = 0, \quad \left. \frac{\partial w(x, y)}{\partial n} \right|_{\bar{A}} = 0, \quad (8)$$

де $w = w(x, y)$ – невідома функція згину серединної точки (x, y) пластини (призматичне тіло, товщина якого мала порівняно з іншими геометричними параметрами), Γ – контур пластини, який обмежує її область Ω ; $q = const$ –

інтенсивність поперекового навантаження; $D = \frac{Eh^2}{12(1-\sigma^2)}$ –

жорсткість пластини, h – товщина пластини, E – модуль пружності першого роду, σ – коефіцієнт Пуассона її матеріалу. Крайові умови (8) фізично відповідають випадку, коли пластина в граничних точках жорстко закріплена. Легко перевірити безпосередньою підстановкою, що розв'язком рівняння (7) буде

$$w_1(x, y) = \frac{q(x^2 + y^2)^2}{D}. \quad (9)$$

Тоді

$$\Delta \Delta w_1(x, y) = \frac{q}{D} \quad \text{в } \Omega, \quad (10)$$

Далі розв'яжемо однорідну задачу з неоднорідними крайовими умовами

$$\Delta \Delta w_2(x, y) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (11)$$

$$\begin{aligned} w_2(x, y)|_{\bar{A}} &= -w_1(x, y) \\ \left. \frac{\partial w_2(x, y)}{\partial n} \right|_{\bar{A}} &= -\left. \frac{\partial w_1(x, y)}{\partial n} \right|_{\bar{A}}, \end{aligned} \quad (12)$$

Тобто при формуванні крайових умов (12) ми фактично обчислюємо на контурі Γ відому функцію $w_1(x, y)$ та її нормальну похідну. Алгоритм розв'язку задачі (11) – (12) є таким самим, як і для задачі (1)–(2). Знайшовши функції щільності μ_1, μ_2 маємо розв'язок задачі (7)–(8)

$$w(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y) \quad \text{або}$$

$$\begin{aligned} w(x, y) &= \frac{q(x^2 + y^2)^2}{64D} + \int_{\Gamma} (r^2 \ln r) \cdot \mu_1(\xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta) + \\ &+ \int_{\Gamma} [-r(2 \ln r + 1)] \cdot \mu_2(\xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta), \end{aligned}$$

де $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$, а (x, y) – тепер внутрішня точка області Ω .

Наведемо конкретний приклад розрахунку напружено-деформованого стану пластини з такими параметрами: $h = 0,07\text{м.}$, $q = 3\text{кн/м}^2$, $\sigma = 0,3$,

$E = 21,6 \cdot 10^{10}$ н/м². Для еліпса(зокрема, круга) отримані результати можна порівняти з відомими, обчисленими аналітично. В табл.3 наведено такі порівняння для пластини, яка має форму круга радіуса 5. Дані таблиці свідчать про високу точність методу.

Таблиця 3

Координати точок пластини	Отриманий розв'язок	Точний розв'язок	Похибка
(5,0)	0.00000	0.00000	-.131861E-08
(4,0)	0.331926E-06	0.332885E-06	0.958352E-09
(2,0)	0.181387E-05	0.181237E-05	-.150112E-08
(0,0)	0.257184E-05	0.256856E-05	-.328873E-08
(-1,0)	0.236998E-05	0.236718E-05	-.279783E-08
(-3,0)	0.105203E-05	0.105208E-05	0.518412E-10
(-4,0)	0.331929E-06	0.332885E-06	0.956305E-09
(-5,0)	0.00000	0.00000	-.748359E-09

3. Крайова задача для неоднорідного бігармонічного рівняння з неоднорідними крайовими умовами.

$$\Delta\Delta w(x, y) = f \text{ в } \Omega, \quad (13)$$

$$w|_{\Gamma} = \phi, \quad \left. \frac{dw}{dn} \right|_{\Gamma} = \psi, \quad (14)$$

де $w = w(x, y)$ – невідома функція, f, ϕ, ψ – задані неперервні функції, Γ – контур, який обмежує область Ω .

За теоремою Гілберта [1] розв'язок рівняння (13) має вид:

$$w_1(x, y) = \frac{1}{8\pi D} \iint_{\Omega} r^2 \ln r \cdot f(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta), \quad (15)$$

тобто $w_1(x, y)$ знайдена через подвійний інтеграл задовольняє рівняння (13). Отже,

$$\Delta\Delta w_1(x, y) = f, \quad (16)$$

а для того, щоб задовольнити граничним умовам формулюємо таку задачу:

$$\Delta\Delta w_2(x, y) = 0 \text{ в } \Omega \quad (17)$$

$$w_2|_{\Gamma} = (\phi - w_1)|_{\Gamma}, \quad \left. \frac{dw_2}{dn} \right|_{\Gamma} = \left(\psi - \left. \frac{\partial w_1}{\partial n} \right|_{\Gamma} \right), \quad (18)$$

де при формуванні крайових умов (18) треба знайти різницю значень функцій ϕ, ψ та $w_1(x, y)$ і її нормальної похідної на границі Γ відповідно. Для знаходження функції $w_1(x, y)$ та її нормальної похідної треба обчислити

відповідні подвійні інтеграли по області прямокутної форми, що охоплює контур Γ . Цю область, покриваємо прямокутною сіткою. Далі задача (17) – (18) аналогічна задачі (1)–(2), детально викладеній в частині 1. Як і в частині 2, розв’язком задачі (13)–(14) буде

$$w(x, y) = w_1(x, y) + w_2(x, y) \quad \text{або}$$

$$w(x, y) = \frac{1}{8\pi D} \iint_{\Omega} r^2 \ln r \cdot f(\xi, \eta) d\Omega(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} (r^2 \ln r) \cdot \mu_1(\xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} [-r(2 \ln r + 1)] \cdot \mu_2(\xi, \eta) d\Gamma(\xi, \eta).$$

Висновок. Приклади чисельної реалізації методу потенціалу свідчать про його високу обчислювальну ефективність. При розгляді різних модельних функцій і складних форм областей точність становить понад 99%, яка зростала при збільшенні числа елементарних дуг від $n=40$ до $n=200$. Характерним і важливим висновком чисельного експерименту є збереження точності шуканої функції при ускладненні форми контура.

Результати можуть бути базою для постановки і розв’язування складних задач оптимізації, крайових задач рівнянь математичної фізики в нелінійній постановці з побудовою різних схем ітераційних процесів.

Бібліографічні посилання

1. **Арсенін, В.Я.** Методи математичної фізики і спеціальні функції [Текст] / В.Я. Арсенін. – М.: Наука, 1984. – 385с.
2. **Бойко, Л.Т.** Основи чисельних методів [Текст] / Л.Т. Бойко. – Д.: Видавництво ДНУ, 2009. – 244с.
3. **Киселева, Е.М.** Решение задачи оптимального граничного управления для неоднородного бигармонического уравнения [Текст] / Е.М. Киселева, Л.В. Волошко // Проблемы управления и информатики. – 2014. – №4. – С. 58–68.
4. **Кузьменко, В.І.** Конспект лекцій з курсу «Некоректні задачі» [Текст] / В.І. Кузьменко. – Д.: Видавництво ДНУ, 2009. – 76с.
5. **Самуль, В.І.** Основи теорії пружності і пластичності [Текст] / В.І. Самуль. – М.: Вища школа, 1970. – 287с.

Надійшла до редколегії 11.09.2019.