ISSN 2074-5893 Питання прикладної математики і математичного моделювання. Випуск 19

УДК 519.622.2 doi: 10.15421/321904

Н.В. Варех, Н.Л. Козакова, А.О. Лаврентьєва
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

ДОСЛІДЖЕННЯ АСИМПТОТИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ВІДХИЛЕННЯМ АРГУМЕНТУ

Проведено дослідження асимптотичної поведінки розв'язків на нескінченному інтервалі часу одного класу систем диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу, що узагальнюють рівняння Емдена-Фаулера в сублінійному випадку. Знайдено умови, за яких кожний розв'язок або сильно осцилює, або всі його компоненти монотонно прямують до нуля на нескінченності. Доведено дві теореми за різних обмежень на відхилення аргументу.

Ключові слова: система диференціальних рівнянь, відхилення аргументу, нескінченний інтервал часу, асимптотична поведінка розв'язків.

Проведено исследование асимптотического поведения решений на бесконечном интервале времени одного класса систем дифференциальных уравнений с отклонением аргумента, которые являются обобщением уравнения Эмдена-Фаулера в сублинейном случае. Найдены условия, при которых каждое решение или сильно осциллирует, или все его компоненты монотонно стремятся к нулю на бесконечности. Доказано две теоремы при различных ограничениях на отклонения аргумента.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, отклонение аргумента, бесконечный интервал времени, асимптотическое поведение решений.

In this paper, we study the asymptotic behavior of solutions at an infinite time interval of one class of systems of differential equations with the deviation of an argument, which are a generalization of the Emden-Fowler equation in the sublinear case. Conditions were found under which each solution either oscillates strongly or all its components monotonically tend to zero at infinity. Two theorems under different constraints on the deviation of an argument are proved.

Equation $d^{(n)}y(t)/dt^{n}+ \delta\, p(t)f(y(t)) = 0$, $f(u) = u^{\alpha}$, $\delta = -1$ or 1, has been the object of much research. Some cases of this equation are models of processes in theoretical physics (Emden, Fowler, Fermi equations). After that, this physical problem becomes a mathematical problem at an infinite interval. It is found that the asymptotic properties of the solutions depend on the sign δ, type of nonlinearity $f(u)$ ($f(u) = u^{\alpha}$), ($0< \alpha <1$ – sublinear case, $\alpha = 1$ – linear case, $\alpha >1$ – superlinear), n – even or odd. For this equation, conditions have already been found under which, when $\delta = 1$ and n are even, all solutions oscillates; if n is odd, then each solution either oscillates or monotonically goes to zero indefinitely. If $\delta = -1$, n is even, then each solution oscillates either monotonically to zero or to infinity when $t \to \infty$ together with the derivatives of order (n -1). If $\delta = -1$, n is odd, then each solution oscillates or is monotonically infinite for $t \to \infty$ together with the derivatives of order (n -1). Then, the following results were obtained for differential systems and equations with the general nature of the argument rejection (differential-functional equations). The next stage of the study is to summarize the results for such systems. This article investigates the system of differential equations with the deviation of the argument for the case $\delta = 1$, $n = 3$. The obtained

results are refined and the results obtained earlier are generalized. Two theorems with different assumptions about rejection of the argument by analytical methods are proved. These theorems have different applications. The results of the study are a generalization of the sublinear case for odd *n*.

Keywords: system of differential equations, argument deviation, infinite time interval, asymptotic behavior of solutions.

Вступ. Емден і Фаулер в своїх астрофізичних дослідженнях при описі стану зірок, Фермі при дослідженні розподілу електронів в атомі отримали окремі випадки одного класу диференціального рівняння другого порядку. Зацікавившись цими рівняннями, математики дослідили і узагальнили їх. Вони назвали рівняння вигляду

$$d^{(n)}y(t)\,/\,dt^{n}+\delta\, p(t)\, f\left(y(t)\right)=0,$$

$$f(u)=u^{\alpha},\ \delta=\pm 1,\ p(t)>0$$

рівняннями типу Емдена - Фаулера.

Для таких рівнянь було встановлено [1], що властивості розв’язків суттєво залежать від знаку δ, типу нелінійності (0< α <1 – сублінійний випадок, α =1 – лінійний, α >1 – суперлінійний).

Було знайдено умови, за яких при δ =1 і парному *n* кожний розв’язок осцилює, а при непарному *n* або осцилює, або монотонно прямує до нуля разом зі своїми похідними до порядку (*n* -1).

За тих самих умов при δ = -1 при парному *n* кожний розв’язок або осцилює, або монотонно прямує до нуля, або до нескінченості при $t \to \infty$ разом зі своїми похідними до порядку (*n* -1). При непарному *n* кожний розв’язок або осцилює, або монотонно прямує до нескінченності при $t \to \infty$ разом з похідними до порядку (*n* -1).

Відомо, що рівняння з запізнюванням аргументу є моделями процесів, які залежать не тільки від теперішнього стану, але від минулого. Результати асимптотичної поведінки розв’язків для одного рівняння *n* -го порядку підсумовані в [2]. Далі питання було перенесено на системи диференціальних рівнянь без відхилення і з відхиленням аргументу. В роботах [3], [4] досліджено систему при δ = -1 для більш загальних умов на нелінійність і відхилення аргументу ніж в попередніх роботах.

Нижче розглянуто дослідження системи диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу для δ = 1, *n* =3.

Постановка задачі. На нескінченному проміжку розглянемо систему

$$dy_1\,/\,dt=a_i(t)\,f_i\left(y_{i+1}(\tau_{i+1}(t))\right), i=\overline{1,n-1},$$

$$dy_n(t)\,/\,dt=-\delta\, a_n(t)\, f_n\left(y_1(\tau_1(t))\right) \qquad (1)$$

при таких припущеннях:

$$0\le a_i(t)\in C[t_0,\infty),\ 0\le\tau_i(t)\in C[t_0,\infty),\ \lim_{t\to\infty}\tau_i(t)=\infty,$$

де $uf_i(u)>0, i=\overline{1,n-1}$, $f_i(u)$– неспадні функції.

Теорема 1. Нехай виконуються умови:

1. $n = 3$,

2. $\tau_3(\tau_2(\tau_1(t))) \le t,$ (2)

3. $\left|f(uv)\right| \ge K\left|f(u)\right|\left|f(v)\right|,$

$$\int_{+0}^{c} \frac{du}{f_3(f_1(f_2(u)))} < \infty, \int_{-0}^{-c} \frac{du}{f_3(f_1(f_2(u)))} < \infty, \quad (3)$$

4. $\int_{t_0}^{\infty} a_1(t)dt = \infty, \int_{t_0}^{\infty} a_2(t)dt = \infty,$ (4)

5. $\int_{t_1}^{\infty} a_3(t) f_3\left(\int_{t_1}^{\tau_1(t)} a_1(s) f_1\left(\int_{t_1}^{\tau_2(s)} a_2(p)dp \right) ds \right) dt = \infty,$ (5)

6. $\int_{t_1}^{\infty} a_1(t) f_1\left(\int_{\tau_2(t)}^{c\tau_2(t)} a_2(s) f_2\left(\int_{\tau_3(s)}^{c\tau_3(s)} a_3(p)dp \right) ds \right) dt = \infty, \ c > 1.$ (6)

Тоді кожний розв'язок системи (1) або сильно осцилює, або кожна компонента розв'язку монотонно прямує до нуля при $t \to \infty$.

Доведення. Розглянемо довільний розв'язок $y(t) = \left(y_1(t), y_2(t), y_3(t)\right).$ Якщо розв'язок $y(t)$ – сильно осцилює, то теорему доведено.

Нехай $y(t)$ має неосцилюючу компоненту $y_i(t),$ тоді з структури системи випливає, що всі інші компоненти також не осцилюють, тобто зберігають знак для достатньо великих t.

Припустимо, для визначеності, що $y_1(t) > 0$ для $t \ge t_0,$ отже, $y_1(\tau_1(t)) > 0$ при $t \ge t_1 \ge t_0.$ Тоді з останнього рівняння випливає, що $y_3(t)$ монотонно спадна функція, тому або 1. $y_3(t) < 0$ для $t \ge t_1,$ або 2. $y_3(t) > 0$ для $t \ge t_1.$

1. Нехай $y_3(t) < 0.$ Доведемо, що це неможливо. Використаємо монотонне спадання $y_3(t) < -c.$ З другого рівняння системи (1) маємо

$$y_2(t) - y_2(t_1) < f_2(-c)\int_{t_1}^{t} a_2(s)ds, \ f_2\left(-c\right) < 0.$$

З умови (4) випливає $\lim_{t\to\infty} y_2(t) = -\infty,$ тобто

$$y_2(t) < -K < 0.$$

Тоді з першого рівняння системи (1) маємо

$$y_1(t) - y_1(t_1) < f_1(-K)\int_{t_1}^{t} a_1(s)ds.$$

З умови (3) можна зробити висновок, що $\lim_{t\to\infty} y_1(t) = -\infty,$ а це суперечить припущенню $y_1(t) > 0.$

2. Нехай $y_3(t) > 0$. Тоді з другого рівняння системи випливає, що $y_2(t)$ монотонно зростає і тому або *a*. $y_2(t) > 0$, або *b*. $y_2(t) < 0$.

2a. Нехай $y_2(t) > 0$ $(y_3(t) > 0)$. Тоді $y_2(t)$ монотонно зростаюча додатна функція, а $y_3(t)$ – монотонно спадна додатна функція. Використовуючи такі властивості, з другого рівняння отримаємо

$$y_2(t) \geq f_2(y_3(\tau_1(t))) \int_{t_1}^{t} a_2(s)ds. \tag{7}$$

З (7) при $t = \tau_2(t)$ та монотонного зростання функції $f_1(u)$ з першого рівняння отримаємо

$$y_1(t) \geq f_1(f_2(y_3(\tau_3(\tau_2(t))))) \int_{t_1}^{t} a_1(s) f_1\left(\int_{t_1}^{\tau_2(s)} a_2(p)dp \right) ds.$$

Оскільки $y_3(t)$ – спадна, то $y_3(\tau_3(\tau_2(\tau_1(t)))) \geq y_3(t)$.

Звідси випливає

$$y_1(\tau_1(t)) \geq f_1(f_2(y_3(\tau_3(\tau_2(\tau_1(t)))))) \int_{t_1}^{\tau_1(t)} a_1(s) f_1\left(\int_{t_1}^{\tau_2(s)} a_2(p)dp \right) ds \geq$$

$$\geq f_1(f_2(y_3((t)))) \int_{t_1}^{\tau_1(t)} a_1(s) f_1\left(\int_{t_1}^{\tau_2(s)} a_2(p)dp \right) ds.$$

Використовуючи ці нерівності, з останнього рівняння системи (1), після інтегрування маємо

$$\int_0^c \frac{dy_3(t)/dt}{f_3(f_1(f_2(u)))} dt \leq -\int_{t_1}^{\infty} a_3(t) f_3\left(\int_{t_1}^{\tau_1(t)} a_1(s) f_1\left(\int_{t_1}^{\tau_2(s)} a_2(p)dp \right) \right) dt.$$

Отримали суперечність. Ліворуч маємо обмежену величину внаслідок умови (3), а праворуч – в наслідок умови (5) необмежену від'ємну.

2b. Нехай $y_2(t) < 0$ $\left(y_3(t) > 0, \dfrac{dy_3(t)}{dt} < 0\right)$. Тоді з системи (1) маємо $y_1(t)$ – монотонно спадна додатна функція, $y_2(t)$ – монотонно зростаюча від'ємна функція, а $y_3(t)$ – монотонно спадна додатна функція. Тоді існують

$$\lim_{t\to\infty} y_1(t) = k \geq 0, \lim_{t\to\infty} y_2(t) = -l \leq 0, \lim_{t\to\infty} y_3(t) = m \geq 0.$$

Доведемо, що $k = 0, l = 0, m = 0$. Припустимо супротивне $l \neq 0$.Тоді

$$-3l/2 \leq y_2(t) \leq -l/2, t \geq t_1,$$

$$-3l/2 \leq y_2(\tau_2(t)) \leq -l/2, t \geq t_2 \geq t_1.$$

Тоді з першого рівняння маємо

$$y_1(t) - y_1(t_2) \leq f_1(-3l/2) \int_{t_2}^{t} a_1(s)ds.$$

Внаслідок умови (4) отримаємо $y_1(t) < 0$, що суперечить припущенню.

Аналогічно методом від супротивного можна довести, що $\lim\limits_{t\to\infty} y_3(t)=0.$

Доведемо, що $\lim\limits_{t\to\infty} y_1(t)=k=0.$

Припустимо супротивне $k\neq 0.$ Тоді $k/2\le y_1(\tau_1(t))\le 3l/2.$

З третього рівняння в результаті інтегрування з урахуванням додатності $y_3(t)$ і неспадання $f(u)$ отримаємо

$$-y_3(t_1)\le -f_3(k/2)\int\limits_{t_1}^{\infty} a_3(s)ds.$$

Замінюючи t_1 на будь-яке t маємо

$$y_3(t)\ge f_3(k/2)\int\limits_{t}^{ct} a_3(s)ds,\ c>1. \tag{8}$$

Застосовуючи отриману оцінку при $t=\tau_3(t)$, з другого рівняння, враховуючи від'ємність $y_2(t)$, отримаємо

$$-y_2(t_1)\ge M\int\limits_{t_1}^{\infty} a_2(s)f_2\left(\int\limits_{\tau_3(s)}^{c\tau_3(s)} a_3(p)dp\right)ds,\ M>0.$$

Поступаючи як перед цим, отримаємо оцінку

$$y_2(\tau_2(t))\le -M\int\limits_{\tau_2(t)}^{c\tau_2(t)} a_2(s)f_2\left(\int\limits_{\tau_3(s)}^{c\tau_3(s)} a_3(p)dp\right)ds.$$

Застосовуючи цю нерівність, з першого рівняння системи (1) отримаємо

$$y_1(t)-y_1(t_1)\le -M_1\int\limits_{t_1}^{t} a_1(s)f_1\left(\int\limits_{\tau_2(s)}^{c\tau_2(s)} a_2(s)f_2\left(\int\limits_{\tau_3(s)}^{c\tau_3(s)} a_3(p)dp\right)ds\right)ds,\ M_1>0.$$

Переходячи до границі при $t\to\infty$, враховуючи умову (6), отримуємо суперечність. Отже, $\lim\limits_{t\to\infty} y_1(t)=0.$ Теорему доведено.

При інших обмеженнях на функції $\tau_i(t),\ i=\overline{1,3}$ має місце

Теорема 2. Нехай виконуються умови (3), (4) та умови:

1. $\tau_2(t)\le t,\ \tau_3(t)\le t,\ g(t)=\min\left(\tau_1(t),t\right),$ (9)

2. $\int\limits_{t_1}^{\infty} a_3(t)\left(f_3\left(\int\limits_{t_1}^{g(t)} a_1(s)f_1\left(\int\limits_{t_1}^{\tau_2(s)} a_2(p)dp\right)\right)ds\right)dt=\infty,$ (10)

3. $\int\limits_{t_1}^{\infty} a_1(t)\left(f_1\left(\int\limits_{t}^{ct} a_2(s)f_2\left(\int\limits_{s}^{cs} a_3(p)dp\right)\right)ds\right)dt=\infty,\ c>1.$ (11)

Тоді кожний розв'язок системи (1) або сильно осцилює, або кожна компонента розв'язку монотонно прямує до нуля при $t\to\infty$.

Доведення. Проводиться за схемою доведення теореми 1. Припустивши, що система (1) має неосцилюючу компоненту, приходимо до висновку, що всі компоненти не осцилюють.

Припустимо для визначеності, що $y_1(t)>0$ (для $y_1(t)<0$ доведення проводиться так само). Розглянемо дві можливості для функції $y_3(t)$: 1. $y_3(t)<0$, 2. $y_3(t)>0$.

1. Нехай $y_3(t)<0$. Застосовуючи ті самі міркування, що і в теоремі 1 приходимо до суперечності $y_1(t)<0$. Тобто цей випадок неможливий.

2. Нехай $y_3(t)>0$. Тоді $y_2(t)$ – монотонно зростає. Виникають дві можливості для $y_2(t)$: *a*. $y_2(t)>0$, *b*. $y_2(t)<0$.

2*a*. Нехай $y_2(t)>0$ $(y_3(t)>0)$. Через спадання $y_3(t)$ і зростання $f_i(u)$, $\tau_3(t)\le t$, $\tau_2(t)\le t$ з нерівності (7) отримаємо

$$y_2(t)\ge f_2(y_3(t))\,f_2\left(\int_{t_1}^{t}a_2(s)ds\right),$$

$$y_2(\tau_2(t))\ge f_2(y_3(t))\,f_2\left(\int_{t_1}^{\tau_2(t)}a_2(s)ds\right).$$

Використовуючи цю нерівність, з першого рівняння маємо через спадання функції $f_3(u)$ і (8)

$$y_1(t)-y_1(t_1)\ge f_1(f_2(y_3(t)))\int_{t_1}^{t}a_1(s)\,f_1\left(\int_{t_1}^{\tau_2(s)}a_2(p)dp\right)ds.$$

Оскільки $g(t)\le\tau_1(t)$ і $g(t)\le t$, $y_3(t)$ спадає і $y_1(t)$ зростає, то з попередньої нерівності випливає

$$y_1(\tau_1(t))\ge y_1(g(t))\ge f_1(f_2(y_3(g(t))))\int_{t_1}^{g(t)}a_1(s)\,f_1\left(\int_{t_1}^{\tau_2(s)}a_2(p)dp\right)ds\ge$$

$$\ge f_1(f_2(y_3(t)))\int_{t_1}^{g(t)}a_1(s)\,f_1\left(\int_{t_1}^{\tau_2(s)}a_2(p)dp\right)ds.$$

З останнього рівняння системи, використовуючи цю нерівність, отримаємо

$$\int_{t_1}^{\infty}\frac{dy_3(t)/dt}{f_3(f_1(f_2(y_3(t))))}dt\le-\int_{t_1}^{\infty}a_3(t)\,f_3\left(\int_{t_1}^{g(t)}a_1(s)\,f_1\left(\int_{t_1}^{\tau_2(s)}a_2(p)dp\right)\right)dt.$$

Поклавши $y_3(t)=u$, і врахувавши умови (3) і (10) отримаємо суперечність. Отже цей випадок також неможливий.

2*b*. Нехай $y_2(t)<0$. Тоді $y_1(t)$ – спадна функція, $y_2(t)$ – від'ємна та зростаюча, а $y_3(t)$ – додатна спадна. Як і при доведенні теореми 1 приходимо до висновку $\lim\limits_{t\to\infty}y_2(t)=0$, $\lim\limits_{t\to\infty}y_3(t)=0$.

Залишилось довести, що $\lim\limits_{t\to\infty}y_1(t)=0$. Припустимо супротивне $\lim\limits_{t\to\infty}y_1(t)=k\ne0$. Так само як в теоремі 1 отримаємо нерівність (8).

Оскільки $y_3(t)$ – спадна функція і $\tau_3(t)\le t$, з (8) випливає

$$y_3(\tau_3(t)) \ge y_3(t) \ge f_3(k/2)\int_t^{ct} a_3(s)ds.$$

Тоді з другого рівняння, з урахуванням умови $y_2(t)<0$, можна отримати

$$-y_2(t_1) \ge M\int_{t_1}^{\infty} a_2(s)\, f_2\left(\int_s^{cs} a_3(p)dp\right)ds \ge M\int_{t_1}^{ct_1} a_2(s)\, f_2\left(\int_s^{cs} a_3(p)dp\right)ds,\ c>1.$$

Змінивши для зручності t_1 на t, з урахуванням монотонного зростання $y_2(t)$ і $\tau_2(t)\le t$, отримаємо

$$y_2(\tau_2(t)) \le y_2(t) \le -M\int_t^{ct} a_2(s)\, f_2\left(\int_s^{cs} a_3(p)dp\right)ds.$$

Тоді з першого рівняння маємо

$$y_1(t)-y_1(t_1) \le -M_1\int_{t_1}^{t} a_1(s)\, f_1\left(\int_s^{cs} a_2(p)\, f_2\left(\int_p^{cp} a_3(q)dq\right)dp\right)ds.$$

Застосовуючи умову (11), при $t\to\infty$, з цієї нерівності отримуємо суперечність.

Отже $\lim\limits_{t\to\infty} y_1(t)=0$. Теорему доведено.

Зауважимо, якщо $\tau_i(t),\ i=\overline{1,3}$ мають характер запізнення, то умови (10) і (5) збігаються, а умова (11) слабша за умову (6). В інших випадках кожна з теорем має свою область застосування.

Висновки. Досліджено систему диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу для випадку $\delta = 1$, $n = 3$. Отримані результати покращують і узагальнюють результати, що отримані в роботі [5]. Доведено дві теореми з різними припущеннями відносно відхилення аргументу аналітичними методами. Ці теореми мають різні області застосування. Вони містять різні обмеження на відхилення аргументу. Результати дослідження є узагальненням сублінійного випадку при непарному *n*.

Бібліографічні посилання

1. **Кигурадзе, И.Т.** К вопросу колеблемости решений нелинейных дифференциальных уравнений [Текст] / И.Т. Кигурадзе // Дифференциальные уравнения, 1965, Т. 1 – № 8 – С. 995-1006.
2. **Шевело, В.Н.** Осцилляция решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом [Текст] / В.Н. Шевело. – Київ: Наукова думка, 1978. – 156 с.
3. **Варех, Н.В.** Дослідження асимптотичної поведінки розв’язків диференціально-функціональних систем [Текст] / Н.В. Варех, О.Я. Вольфсон, Г.Ф. Мусаєва, О.А. Падалка // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (MPZIS-2017): Матеріали XV Міжнародної наукової конференції, м. Дніпро. – 2017. – С. 34-35.
4. **Варех, Н.В.** Дослідження поведінки розв’язків диференціальних систем з відхиленням аргументу [Текст] / Н.В. Варех, О.Я. Вольфсон, О.А. Падалка // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д: ДНУ, 2018. – С. 14-23.

5. **Шевело, В.Н.** Осцилляторные свойства решений систем дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом [Текст] / В.Н. Шевело, Н.В. Варех, А.Г. Грицай. – Препринт 85.10. – Київ, 1985. – 48 с.

Надійшла до редколегії 10.10.2019.