

Л.Т. Бойко, А.А. Конончук

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ ПРЯМОГО ТА ОБЕРНЕНОГО ОПЕРАТОРА РЕАЛЬНОГО ПРОЦЕСУ

Розглянуто алгоритм побудови оберненого оператора реального процесу, що переводить вхідні дані у вихідний результат. Обернений оператор реального процесу дозволяє знайти значення вхідних даних для заданого результату на виході. Задача зводиться до розв'язування нелінійного рівняння в некоректній постановці. Програмна реалізація алгоритму перевірялася на трьох тестових прикладах.

Ключові слова: реальний процес, прямий та обернений оператори, вхідні та вихідні дані, некоректна задача, метод Тихонова.

Рассмотрен алгоритм построения обратного оператора реального процесса, переводящего входные данные у выходной результат. Обратный оператор реального процесса позволяет найти значения входных данных для заданного результата на выходе. Задача сводится к решению нелинейного уравнения в некорректной постановке. Программная реализация алгоритма проверялась на трёх тестовых примерах.

Ключевые слова: реальный процесс, прямой и обратный операторы, входные и выходные данные, некорректная задача, метод Тихонова.

Consider the task of building a mathematical model of the real process, which translates the data at the entrance to a certain result at the output. Considered the case when several data is submitted to the entrance, and the output result is only one.

The direct operator of the real process makes it possible to determine (provide) the result at the exit based on the known data at the entrance. The reverse operator on a known result on the way out of the real process allows you to find the necessary input.

Operators of the real process are modeled with algebraic polynomial to some extent. The degree of algebraic polynomial and its coefficients depend on a specific real process. Since input and output are known with some error in real-world processes, we take into account input and output errors when building operators. The task of building such operators is incorrect on Adamar, so we use the method of regularization of Tikhonov. This method allows you to build sustainable approach (taking into account the error of the input and output data) the right operators.

The article examines in detail the algorithm for building a reverse operator. The direct operator algorithm is reviewed in the authors' previous article (link [2] in this article). Building a reverse operator comes down to solving a non-linear equation in an incorrect setting. The non-linear equation is solved by Newton's iterative method.

The software implementation of the algorithm has been carried out. Three test examples are considered, which confirm the correctness of the algorithm and program.

The algorithm can be summarized in case there are several data (at least two) at both the entrance and exit.

Key words: real process, direct and inverse operators, input data, output data, incorrect task, Tikhonov method.

Вступ. Існують багато реальних процесів, які переводять деякі вхідні дані у інші – вихідні дані. При цьому, внутрішній процес «переробки» вхідних даних у вихідні залишається або зовсім невідомим, або мало дослідженим. В реальних ситуаціях виникає необхідність передбачати результат по відомих вхідних даних, тобто розв'язувати пряму задачу, або навпаки, по заданому результату передбачати набір вхідних даних, тобто розв'язувати обернену задачу.

Математично це означає, що потрібно побудувати наближену модель оператора, який відображує свою область визначення (множину вхідних даних реального процесу), у свою область значень (множину вихідних даних реального процесу). Знання такого оператора дозволить розв'язувати пряму задачу. До побудованого оператора треба вміти будувати обернений оператор. Задача побудови прямого і оберненого операторів для багатьох реальних процесів залишається актуальною.

В реальних процесах вхідні та вихідні дані відомі, як правило, з деякими похибками, тобто наближено. Отже, оператори (прямий і обернений) потрібно будувати теж наближено (у відповідності до похибок даних). Задача побудови таких операторів є некоректною за Адамаром [1].

Дана стаття є продовженням роботи [2], в якій детально (з ілюстраціями на відповідних тестових прикладах) описано алгоритм побудови прямого оператора реального процесу. В даній роботі детально розглядається алгоритм побудови оберненого оператора до відомого прямого.

Постановка задачі. Від конкретного реального процесу залежить кількість вхідних та вихідних даних. Для простоти розглянемо випадок, коли на вхід подається декілька даних $a_j, j = \overline{2, n}, n \geq 2$, а вихідний результат b лише один. Відомі проміжки, до яких належать дані $a_j \in [\alpha_j, \beta_j], j = \overline{2, n}$, при цьому результат b попадає в деякий свій проміжок $[\gamma, \delta]$.

Реальний процес встановлює залежність $b = f(a_2, a_3, \dots, a_n)$, де функція $f(a_2, a_3, \dots, a_n)$ є невідомою. Побудувати прямий оператор означає побудувати математичну модель, за допомогою якої можна встановити наближено аналітичну залежність результату b від вхідних даних $a_j, j = \overline{2, n}$. Таку математичну модель будемо називати «прогносною». Знаючи прогнозну модель, можна для реального процесу по відомих на вході даних $a_j, j = \overline{2, n}$ передбачити (прогнозувати) результат b . Позначимо прогнозну модель $F(a_2, a_3, \dots, a_n)$.

Алгоритм побудови прогнозної моделі у вигляді алгебраїчного многочлена різного степеня розглянуто в роботі [2]. Отже, маємо залежність

$$b = f(a_2, a_3, \dots, a_n) \approx F(a_2, a_3, \dots, a_n) \equiv x_1 + \sum_{j=2}^s x_j c_j. \quad (1)$$

Тут s – загальна кількість доданків у многочлена (1). Коефіцієнти c_j обчислюємо через вхідні дані a_j , $j = \overline{2, n}$ за такими формулами:

$$\begin{aligned} c_j &= a_j, j = \overline{2, n}; c_{n+j-1} = a_2 a_j, j = \overline{2, n}; c_{2n+j-3} = a_3 a_j, j = \overline{3, n}; \\ c_{3n+j-6} &= a_4 a_j, j = \overline{4, n}; \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Після побудови прогнозової моделі коефіцієнти x_i , $i = \overline{1, s}$ в залежності (1) стають відомими. Отже, використовуючи (1), можна наближено прогнозувати результат b для кожного варіанту вхідних даних $a_j \in [\alpha_j, \beta_j]$, $j = \overline{2, n}$.

Алгоритм побудови оберненого оператора. Для побудови оберненого оператора використаємо прогнозну модель (1), вважаючи відомими коефіцієнти x_i , $i = \overline{1, s}$ та результат $b \in [\gamma, \delta]$. Шуканим стає вектор z^* , де

$$z^* = \begin{bmatrix} a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}, a_j \in [\alpha_j, \beta_j], j = \overline{2, n}, n \geq 2. \quad (3)$$

Для розв'язування цієї задачі створимо із прогнозової моделі (1) нелінійне алгебраїчне рівняння

$$\Phi(a_2, a_3, \dots, a_n) \equiv (x_1 - b) + \sum_{j=2}^s x_j c_j(a_2, a_3, \dots, a_n) = 0. \quad (4)$$

Рівняння (4) може мати не один розв'язок. Із множини можливих розв'язків шукатимемо такий вектор z^* , який буде найближчим до деякого бажаного фіксованого вектора ψ , який виберемо таким чином:

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_2 \\ \dots \\ \psi_n \end{bmatrix}, \psi_i = \frac{\alpha_i + \beta_i}{2}, i = \overline{2, n}. \quad (5)$$

Нелінійне рівняння (4) розв'язуємо ітераційним методом Ньютона. Нехай $z^{(p)}$ – p -та ітерація, що наближує шуканий вектор z^* . Ітераційна формула матиме вигляд

$$z^{(p+1)} = z^{(p)} + \varepsilon^{(p)}, p = 0, 1, \dots, \quad (6)$$

де вектор поправок $\varepsilon^{(p)}$ знаходимо як розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\Phi(z^{(p)}) + W(z^{(p)}) \cdot \varepsilon^{(p)} = 0. \quad (7)$$

Тут позначено

$$W(z^{(p)}) \equiv \left[\frac{\partial \Phi}{\partial a_2}, \frac{\partial \Phi}{\partial a_3}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial a_n} \right]_{z=z^{(p)}}. \quad (8)$$

Розв'язавши систему (7) методом Тихонова, добудемо вектор $\varepsilon^{(p)}$ і, підставивши його в ітераційну формулу (6), добудемо наступну ітерацію $z^{(p+1)}$. В якості вектора $z^{(0)}$ беремо вектор ψ за формулами (5).

Для формування рядка (8) обчислимо необхідні похідні від лівої частини рівняння (4)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_k} = \sum_{j=2}^s x_j \frac{\partial c_j}{\partial a_k}, \quad k = \overline{2, n}. \quad (9)$$

Для зупинки ітераційного методу використана умова $\|\varepsilon^{(p)}\| \leq \varepsilon$, де ε – задане достатньо мале додатне число.

Програмна реалізація та тестування алгоритму. З використанням мови програмування C# у середовищі візуальної розробки програм MS Visual Studio 2017 була виконана програмна реалізація алгоритму побудови прямого та оберненого оператора. Правильність роботи програмного продукту в задачі побудови прямого оператора була перевірена на трьох тестових прикладах, розглянутих в роботі [2]. На цих же тестових прикладах розглянемо роботу алгоритму побудови оберненого (до прогнозної моделі) оператора реального процесу. В усіх тестових прикладах припускалося, що $a_j \in [0; 1]$, $j = \overline{2, n}$.

Приклад 1. Розглянемо реальний процес, який визначимо такою лінійною функцією ($n = 4$):

$$f(a_2, a_3, a_4) = 5 + a_2 + 2a_3 - a_4. \quad (10)$$

Функція (10) буде використана в задачі побудови прогнозної моделі лише для обчислення результату b при фіксованих варіантах коефіцієнтів $a_j \in [0; 1]$, $j = \overline{2, 4}$ та для визначення проміжку $[\gamma, \delta]$, якому належить результат b .

Прогнозну модель, тобто функцію $F(a_2, a_3, a_4)$, будемо у двох варіантах: у вигляді лінійної прогнозної моделі

$$F_1(a_2, a_3, a_4) = x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 \quad (11)$$

та квадратичної прогнозної моделі

$$F_2(a_2, a_3, a_4) = x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_2^2 x_5 + a_2 a_3 x_6 + a_2 a_4 x_7 + a_3^2 x_8 + a_3 a_4 x_9 + a_4^2 x_{10}. \quad (12)$$

Для прогнозних моделей (11), (12) шукаємо коефіцієнти $\{x_j\}_{j=1}^s$. Результати роботи програми виявилися такими [2]:

$$F_1(a_2, a_3, a_4) = 4,999092 + 0,999362 \cdot a_2 + 1,999400 \cdot a_3 - 0,999798 \cdot a_4; \quad (13)$$

$$F_2(a_2, a_3, a_4) = 4,999064 + 0,999345 \cdot a_2 + 1,999393 \cdot a_3 - 0,999709 \cdot a_4 + 0,000000 \cdot a_2^2 + 0,000000 \cdot a_2 a_3 + 0,000000 \cdot a_2 a_4 + 0,000000 \cdot a_3^2 + 0,000000 \cdot a_3 a_4 + 0,000000 \cdot a_4^2. \quad (14)$$

Як видно з (13), (14), квадратична прогнозна модель підтвердила лінійність реального процесу (10), оскільки у (14) виявилися нульовими всі коефіцієнти при квадратичних доданках. Крім того, з точністю до четвертого розряду після коми коефіцієнти прогнозних моделей (13), (14) є близькими до відповідних коефіцієнтів реального процесу (10).

Далі використаємо лінійну прогнозну модель (13) для розв'язування оберненої задачі. Для цього випадку з (4) маємо

$$\Phi(a_2, a_3, a_4) = (x_1 - b) + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4. \quad (15)$$

За формулами (9) знаходимо з (15): $\frac{\partial \Phi}{\partial a_2} = x_2$, $\frac{\partial \Phi}{\partial a_3} = x_3$, $\frac{\partial \Phi}{\partial a_4} = x_4$. Рядок (8)

набуває вигляду $W(z^{(p)}) = [x_2, x_3, x_4]$. Як видно, $W(z^{(p)})$ не залежить від номера ітерації.

Передаємо у програму: $b = 5$; $\varepsilon = 0,001$; $z^{(0)} = \psi = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}$.

За одну ітерацію (оскільки прогнозна модель була лінійною) програма видала результат, показаний на рис. 1.

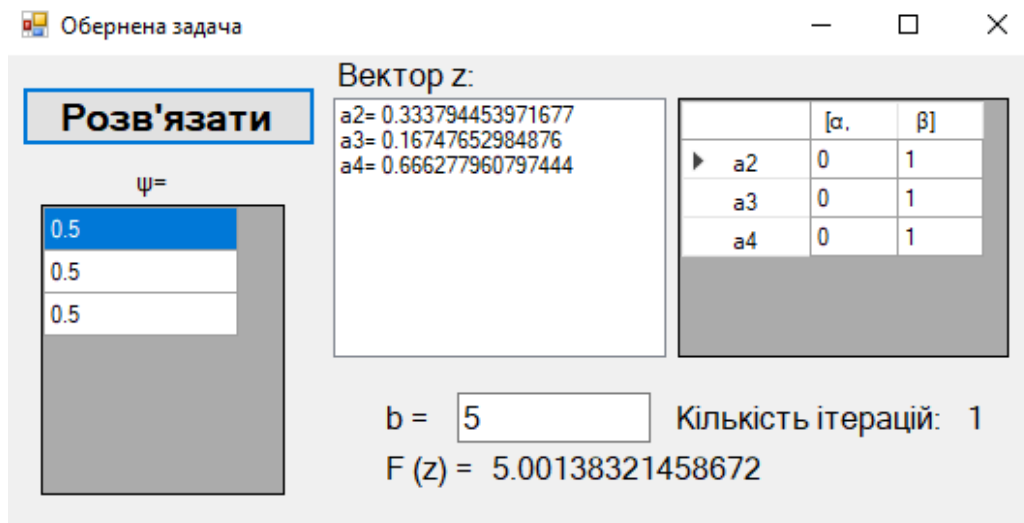


Рис. 1. Результат розв'язування оберненої задачі для прикладу 1

Як видно, знайдені коефіцієнти $a_j, j = \overline{2,4}$ попадають у проміжок $[0;1]$. Якщо підставити ці коефіцієнти у прогнозну модель (13), то отримаємо приблизне значення числа b , а саме $b \approx 5,001$.

Приклад 2. Для простоти візьмемо $n = 3$. Реальний процес виберемо у вигляді такої квадратичної функції:

$$f(a_2, a_3) = -3 + a_2 - 5a_3 + a_2 a_3 + a_3^2. \quad (16)$$

Для прогнозної моделі розглянемо три варіанти:
лінійна прогнозна модель

$$F_1(a_2, a_3) = x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3; \quad (17)$$

квадратична прогнозна модель

$$F_2(a_2, a_3) = x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_2^2 x_4 + a_2 a_3 x_5 + a_3^2 x_6; \quad (18)$$

кубічна прогнозна модель

$$F_3(a_2, a_3) = x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_2^2 x_4 + a_2 a_3 x_5 + a_3^2 x_6 + a_2^3 x_7 + \\ + a_2^2 a_3 x_8 + a_2 a_3^2 x_9 + a_3^3 x_{10}. \quad (19)$$

Для прогнозних моделей (17), (18) (19) шукаємо коефіцієнти $\{x_j\}_{j=1}^s$, тобто розв'язуємо пряму задачу, використовуючи метод Тихонова. Результати роботи програми виявилися такими [2]:

$$F_1(a_2, a_3) = -3,634766 + 1,731650 \cdot a_2 - 3,304419 \cdot a_3; \quad (20)$$

$$F_2(a_2, a_3) = -3,001522 + 1,001327 \cdot a_2 - 4,992501 \cdot a_3 + 0,000380 \cdot a_2^2 + \\ + 0,999031 \cdot a_2 a_3 + 0,995694 \cdot a_3^2; \quad (21)$$

$$F_3(a_2, a_3) = -3,01833 + 1,043906 \cdot a_2 - 4,878557 \cdot a_3 - 0,001719 \cdot a_2^2 + \\ + 0,980397 \cdot a_2 a_3 + 0,978338 \cdot a_3^2 - 0,000164 \cdot a_2^3 + 0,000790 \cdot a_2^2 a_3 - \\ - 0,001086 \cdot a_2 a_3^2 + 0,002822 \cdot a_3^3. \quad (22)$$

Як видно з (20), (21), (22), квадратична та кубічна прогнозні моделі є ближчими між собою і дають кращі наближення до реального процесу (16), ніж лінійна прогнозна модель (20). Зауважимо, що цей результат є очікуваним.

Застосуємо алгоритм побудови оберненого оператора до квадратичної прогнозної моделі (18) у вигляді (21) при $n = 3$. З формули (4) маємо

$$\Phi(a_2, a_3) = x_1 - b + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_2^2 x_4 + a_2 a_3 x_5 + a_3^2 x_6.$$

Звідси знаходимо потрібні похідні:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_2} = x_2 + 2x_4 a_2 + x_5 a_3; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_3} = x_3 + x_5 a_2 + 2x_6 a_3. \quad (23)$$

Знаходимо значення похідних (23) у точці $z^{(p)}$:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} \right|_{z=z^{(p)}} = x_2 + 2x_4 a_2^{(p)} + x_5 a_3^{(p)}; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial a_3} \right|_{z=z^{(p)}} = x_3 + x_5 a_2^{(p)} + 2x_6 a_3^{(p)}. \quad (24)$$

Підставимо (24) у (8) і те, що вийде, – у (7). Як видно, координати рядка $W(z^{(p)})$ будуть мінятися від ітерації до ітерації.

Передаємо у комп'ютерну програму: $b = -3$; $\varepsilon = 0,001$; $z^{(0)} = \psi = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}$.

За чотири ітерації програма видала результат, показаний на рис.2.

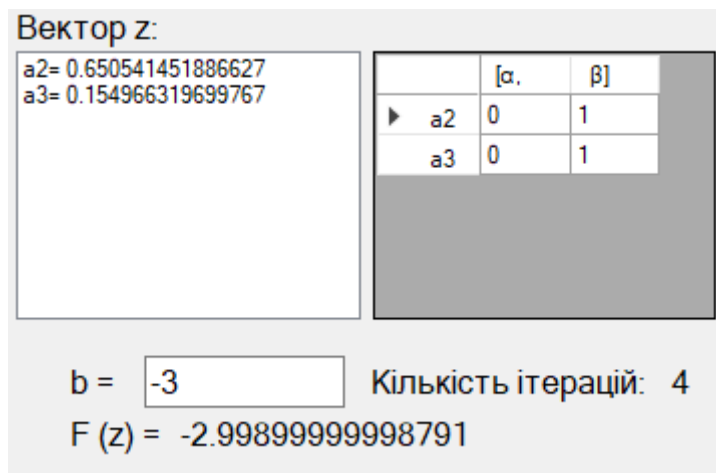


Рис. 2. Результат розв'язування оберненої задачі для прикладу 2

Як видно, знайдені коефіцієнти a_2, a_3 попадають у проміжок $[0;1]$. Якщо підставити значення цих коефіцієнтів у прогнозну модель (21), то отримаємо приблизне значення числа b , а саме $b \approx -2,999$.

Приклад 3. Візьмемо $n = 3$ і зафіксуємо кубічний реальний процес такою функцією:

$$f(a_2, a_3) = 4 - a_2^2 + a_2 a_3 + a_3^3. \quad (25)$$

Прогнозні моделі побудуємо так же, як у прикладі 2, тобто за формулами (17), (18), (19). Результати програмної побудови прогнозних моделей такі [2]:

$$F_1(a_2, a_3) = 3,480499 - 0,259965 \cdot a_2 + 1,567229 \cdot a_3; \quad (26)$$

$$F_2(a_2, a_3) = 4,050609 - 0,100724 \cdot a_2 - 0,615177 \cdot a_3 - 0,886646 \cdot a_2^2 + 1,030751 \cdot a_2 a_3 + 1,516834 \cdot a_3^2; \quad (27)$$

$$F_3(a_2, a_3) = 3,970925 + 0,161384 \cdot a_2 + 0,021750 \cdot a_3 - 1,274541 \cdot a_2^2 + 0,933896 \cdot a_2 a_3 + 0,003209 \cdot a_3^2 + 0,141933 \cdot a_2^3 + 0,072789 \cdot a_2^2 a_3 - 0,030191 \cdot a_2 a_3^2 + 1,000000 \cdot a_3^3. \quad (28)$$

Як видно, з трьох прогнозних моделей (26), (27), (28) кубічна прогнозна модель є найближчою до кубічного реального процесу (25).

Будувати обернений оператор методом Ньютона будемо до кубічної прогнозної моделі (19) у вигляді (28) при $n = 3$. З формули (4) маємо нелінійне рівняння

$$\Phi(a_2, a_3) = x_1 - b + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_2^2 x_4 + a_2 a_3 x_5 + a_3^2 x_6 + a_2^3 x_7 + a_2^2 a_3 x_8 + a_2 a_3^2 x_9 + a_3^3 x_{10}.$$

Знаходимо потрібні похідні

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} &= x_2 + 2x_4 a_2 + x_5 a_3 + 3a_2^2 x_7 + 2a_2 a_3 x_8 + a_3^2 x_9; \\ \frac{\partial \Phi}{\partial a_3} &= x_3 + x_5 a_2 + 2x_6 a_3 + a_2^2 x_8 + 2a_2 a_3 x_9 + 3a_3^2 x_{10}. \end{aligned} \quad (29)$$

Обчислюємо значення похідних (29) у точці $z^{(p)}$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} \right|_{z=z^{(p)}} &= x_2 + 2x_4 a_2^{(p)} + x_5 a_3^{(p)} + 3(a_2^{(p)})^2 x_7 + 2a_2^{(p)} a_3^{(p)} x_8 + (a_3^{(p)})^2 x_9; \\ \left. \frac{\partial \Phi}{\partial a_3} \right|_{z=z^{(p)}} &= x_3 + x_5 a_2^{(p)} + 2x_6 a_3^{(p)} + (a_2^{(p)})^2 x_8 + 2a_2^{(p)} a_3^{(p)} x_9 + 3(a_3^{(p)})^2 x_{10}. \end{aligned} \quad (30)$$

Значення (30) підставимо до (8) а те, що вийде, – до (7) і застосуємо метод Тихонова до розв'язування СЛАР (7).

Передаємо у комп'ютерну програму: $b = 5,5$; $\varepsilon = 0,001$; $z^{(0)} = \psi = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{bmatrix}$.

Програма видає результат, показаний на скріншоті (рис. 3) і обчислений за три ітерації.

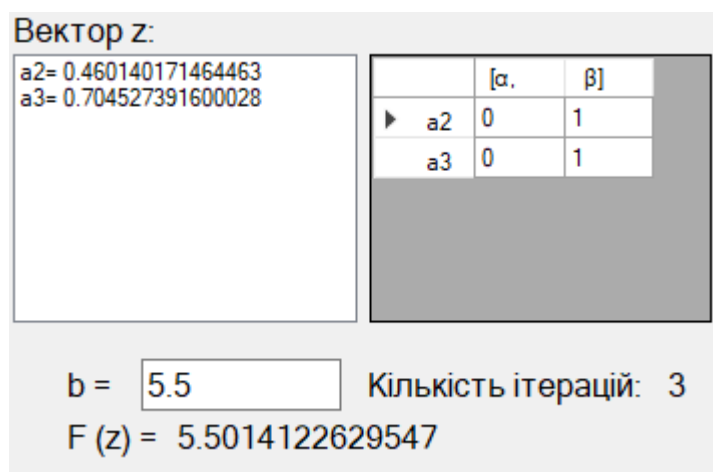


Рис. 3. Результат розв'язування оберненої задачі для прикладу 3 при $\varepsilon = 0,001$

Як видно, знайдені коефіцієнти a_2, a_3 попадають у проміжок $[0;1]$. Якщо підставити значення цих коефіцієнтів у прогнозну модель (28), то отримаємо приблизне значення числа b , а саме $b \approx 5,501$.

Якщо в методі Ньютона взяти $\varepsilon = 0,000001$, то результати покращаться при невеликому збільшенні кількості ітерацій (рис. 4).

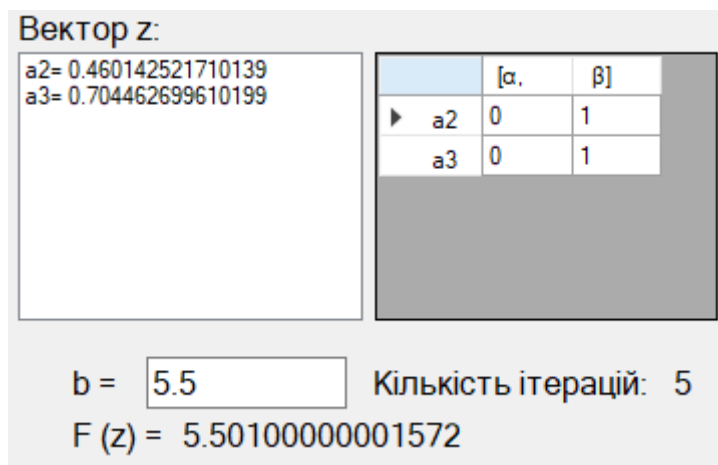


Рис. 4. Результат розв’язування оберненої задачі для прикладу 3 при $\varepsilon = 0,000001$

Також, якщо підставимо знайдений вектор z у прогнозну модель (28), то отримаємо число, яке є ближчим до заданого числа b , ніж при $\varepsilon = 0,001$ (рис. 3, 4).

Висновки. Тестування програмно реалізованого алгоритму підтверджує його дієздатність. Планується застосувати алгоритм до дійсно реальної практичної задачі.

Алгоритм може бути узагальненим на випадок декількох даних на вході та декількох (≥ 2) даних на виході із реального процесу.

Бібліографічні посилання

1. **Тихонов, А.Н.** Методы решения некорректных задач [Текст] / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М., 1979. – 288 с.
2. **Бойко, Л.Т.** Алгоритм відтворення аналітичної залежності між даними на вході і на виході моделі «чорна скриня» [Електронний збірник] / Л.Т. Бойко, А.А. Конончук // The 10th International conference “Science and society” 15th March 2019. – Hamilton, Canada, 2019. – P. 406-415.

Надійшла до редколегії 22.10.2019.