УДК 519.6

Л.Т. Бойко
Дніпропетровський національний університет ім. Олеся Гончара

СПОСІБ ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ В МЕТОДІ ТИХОНОВА

На конкретних прикладах систем лінійних алгебраїчних рівнянь у некоректній постановці продемонстрована ідея способу підвищення точності наближених розв'язків, добутих методом регуляризації Тихонова.

На конкретных примерах систем линейных алгебраических уравнений в некорректной постановке продемонстрирована идея способа повышения точности приближенных решений, полученных методом регуляризации Тихонова.

On concrete examples of ill-posed systems of the linear algebraic equations the idea of a way of increase of accuracy of the approximate decisions received by a method of regularization of Tikhonov is shown.

Ключові слова: некоректно поставлена задача, метод регуляризації Тихонова, підвищення точності наближеного розв'язку.

Вступ. У більшості практичних задач, де виникає необхідність розв'язувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), коефіцієнти матриці та вектора вільних членів добуваються експериментально, а значить наближено, при цьому, підвищити точність вихідних даних для таких СЛАР, як правило, неможливо.

Розв'язувати некоректно поставлені СЛАР можна методом регуляризації Тихонова, який дозволяє будувати стійкі наближені розв'язки у відповідності з похибками вихідних даних. Актуальним стає питання: «Як, користуючись методом Тихонова, підвищити точність розв'язку, не підвищуючи точності вихідних даних?»

Математична постановка задачі. У практичних задачах часто матриця *A* та вектор *u* відомі лише наближено. В цих випадках замість СЛАР

$$Az = u \tag{1}$$

маємо справу з деякою іншою СЛАР

$$\tilde{A}z = \tilde{u}\,, \quad z \in R^n, \quad \tilde{u} \in R^m\,, \tag{2}$$

такою, що

$$\left\|\tilde{A} - A\right\| \le h\,, \qquad \left\|u - \tilde{u}\right\| \le \delta\,. \tag{3}$$

Про точну СЛАР (1), розв'язок якої треба знайти, відомо лише те, що для A та u виконуються нерівності (3). Але систем з такими даними існує безліч, і в межах відомих нам похибок даних (3) ці системи між собою не розрізняються. Отже, мова може йти лише про побудову наближеного нормального розв'язку системи (1) на основі наближеної СЛАР (2) та похибок (3). Наближені розв'язки повинні бути стійкими до малих збурень у коефіцієнтах матриці та вектора вільних членів.

За методом регуляризації Тихонова наближення до нормального розв'язку – це розв'язок такої задачі [1]

$$\begin{cases} M^{\alpha} \equiv \left\|\tilde{A}z - \tilde{u}\right\|^2 + \alpha\left\|z\right\|^2 \to \min, \quad \alpha > 0, \\ B(\alpha) \equiv \left\|\tilde{A}z^{(\alpha)} - \tilde{u}\right\| - \delta_1 = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Мінімізуючи функціонал M^{α} в задачі (4), приходимо до СЛАР

$$\left(\tilde{A}^T\tilde{A} + \alpha E\right)z^{(\alpha)} = \tilde{A}^T\tilde{u}\,. \tag{5}$$

Розв'язком СЛАР (5) буде вектор $z^{(\alpha)}$, на якому функціонал M^{α} досягає мінімального значення. Параметр регуляризації $\alpha>0$ знаходимо з умови $B(\alpha) = 0$, при чому число δ_1 в (4) обчислюємо за формулою

$$\delta_1 = \begin{cases} 2\left(h\left\|z^{(\alpha)}\right\| + \delta\right) + \tilde{\mu}, & \text{ÿêù î } \tilde{\mu} \ne 0, \\ h\left\|z^{(\alpha)}\right\| + \delta, & \text{ÿêù î } \tilde{\mu} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

якщо
якщо

Тут $\tilde{\mu} = \inf\limits_{z \in R^n} \left\| \tilde{A}z - \tilde{u} \right\|$.

Такий алгоритм дозволяє будувати множину розв'язків $z(h,\delta)$, таких, що

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ \delta\to 0}} z(h,\delta) = z(0,0), \tag{7}$$

де $z(0,0)$ – це розв'язок, або псевдорозв'язок, або нормальний розв'язок системи (1) залежно від того, чи розв'язується ця система однозначно, чи має множину розв'язків, чи не має жодного розв'язку.

Залежність (7) показує, що наближений розв'язок $z(h,\delta)$ тим краще апроксимує точний розв'язок $z(0,0)$, чим меншими є похибки *h, δ.* Таким чином, метод Тихонова дає алгоритм для конструювання стійкого до збурень вихідних даних наближеного розв'язку системи (2) загального вигляду, включаючи погано обумовлені системи.

Оскільки в реальних практичних задачах похибки *h, δ*, як правило, не можна як завгодно зменшувати, то задача полягає в розробці алгоритму уточнення розв'язку $z(h,\delta)$ при ненульових похибках *h, δ*, які не можна зменшувати (але збільшувати можна).

Метод розв'язування задачі. Приймаючи до уваги (7) та вважаючи похибки h, δ задачі (2), (3) малими, розкладемо розв'язок $z(0,0)$ точної задачі (1) у ряд Тейлора в околі точки (h,δ)

$$z(0,0) = z(h,\delta) - h\left.\frac{\partial z}{\partial h}\right|_{(h,\delta)} - \delta\left.\frac{\partial z}{\partial \delta}\right|_{(h,\delta)} + O\left(h^2+\delta^2\right). \tag{8}$$

У розкладанні (8) $z(h,\delta)$ – це розв'язок задачі (2), (3), добутий методом регуляризації Тихонова при відомих похибках *h, δ*. Для обчислення частинних похідних першого порядку зробимо перерахунок задачі (2), (3) при інших (більших) значеннях похибок *h, δ*. Для цього позначимо $h_2 > h_1 = h > 0,\quad \delta_2 > \delta_1 = \delta > 0$ та скористаємось різницевими формулами для похідних

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial z}{\partial h}\right|_{(h_1,\delta_1)} &= \frac{z(h_1,\delta_1) - z(h_2,\delta_1)}{h_1 - h_2} + O(h_1),\\ \left.\frac{\partial z}{\partial \delta}\right|_{(h_1,\delta_1)} &= \frac{z(h_1,\delta_1) - z(h_1,\delta_2)}{\delta_1 - \delta_2} + O(\delta_1). \end{aligned} \tag{9}$$

Підставимо (9) до (8) та зберемо перші три доданки у правій частині роз-кладання (8), які і будуть утворювати уточнений розв'язок задачі (2), (3)

$$\begin{aligned} \bar{z}(h_1,\delta_1) &= z(h_1,\delta_1) - h_1\frac{z(h_1,\delta_1) - z(h_2,\delta_1)}{h_1 - h_2} - \delta_1\frac{z(h_1,\delta_1) - z(h_1,\delta_2)}{\delta_1 - \delta_2} =\\ &= z(h_1,\delta_1) + \frac{z(h_1,\delta_1) - z(h_2,\delta_1)}{\frac{h_2}{h_1} - 1} + \frac{z(h_1,\delta_1) - z(h_1,\delta_2)}{\frac{\delta_2}{\delta_1} - 1}. \end{aligned} \tag{10}$$

Якщо $h_2 = 2h_1,\ \delta_2 = 2\delta_1$, то вигляд формули (10) дещо спроститься

$$\bar{z}(h_1,\delta_1) = 3z(h_1,\delta_1) - z(h_2,\delta_1) - z(h_1,\delta_2). \tag{11}$$

З формул (10), (11) бачимо, що для того, щоб уточнити наближений розв'язок задачі (2), (3), добутий методом Тихонова при заданих значеннях похибок $h=h_1$, $\delta=\delta_1$, потрібно ще додатково двічі застосувати метод Тихонова при інших (більших) варіантах похибок *h,δ*.

Якщо в СЛАР (2) матриця *A* відома точно (h = 0), а вектор вільних членів – наближено (δ > 0), то формули (10), (11) для уточнення наближеного розв'язку можна спростити.

Для цього розкладання (8) запишемо у вигляді

$$z(0) = z(\delta) - \delta\cdot z'(\delta) + \frac{\delta^2}{2}z''(\delta) + O\left(\delta^3\right). \tag{12}$$

Для обчислення похідних першого та другого порядків у розкладанні (12) зробимо перерахунок задачі (2), (3) при більших значеннях похибки *δ*. Для цього позначимо $\delta_3 > \delta_2 > \delta_1 = \delta > 0$ та скористаємось різницевими формулами для похідних.

Якщо обчислені наближені розв'язки $z(\delta_1),\ z(\delta_2)$ задачі (2), то формула для уточнення наближеного розв'язку $z(\delta_1)$ стане такою

$$\bar{z}(\delta_1) = z(\delta_1) + \frac{z(\delta_1) - z(\delta_2)}{\dfrac{\delta_2}{\delta_1} - 1}. \tag{13}$$

Якщо крім розв'язків $z(\delta_1)$, $z(\delta_2)$ задачі (2), відомо ще $z(\delta_3)$, то мож-на побудувати більш точний варіант формули для уточнення наближеного розв'язку $z(\delta_1)$, а саме

$$\bar{\bar{z}}(\delta_1) = z(\delta_1) - \frac{z(\delta_2) - z(\delta_1)}{\dfrac{\delta_2}{\delta_1} - 1} \cdot \frac{\delta_3}{\delta_3 - \delta_2} + \frac{z(\delta_3) - z(\delta_1)}{\dfrac{\delta_3}{\delta_1} - 1} \cdot \frac{\delta_2}{\delta_3 - \delta_2}. \tag{14}$$

Якщо $\delta_2 = 2\delta_1,\ \delta_3 = 3\delta_1$, то вигляд формул (13), (14) спроститься.

$$\bar{z}(\delta_1) = 2z(\delta_1) - z(\delta_2). \qquad \bar{\bar{z}}(\delta_1) = 3z(\delta_1) - 3z(\delta_2) + z(\delta_3). \tag{15}$$

Формули (10), (13), (14) та їхні частинні випадки за ідеєю побудови та виглядом нагадують формули Рунге, за допомогою яких, уточнюється наближене значення похідної після проведення двох, або трьох додаткових перерахунків з різними (більшими) кроками [2].

Модельні приклади та аналіз результатів

Приклад 1. Розглянемо одне рівняння з двома невідомими. У рівнянні всі коефіцієнті відомі наближено

$$\tilde{a}z_1 + \tilde{b}z_2 = \tilde{c}\,. \tag{16}$$

Перепишемо рівняння (16) у матричному вигляді

$$\tilde{A}z = \tilde{u}\,,$$

де $\tilde{A} = \begin{bmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \end{bmatrix}$, $\tilde{u} = \tilde{c}$, $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$, $\|\tilde{A} - A\| \le h,\ \ \|\tilde{u} - u\| \le \delta$.

Тут $h,\ \delta$ – відомі числа, $A,\ u$ – невідомі матриця та вектор.

Простота прикладу дозволила за алгоритмом Тихонова (4), (5), (6) побудувати розв'язок $z(h,\delta)$ задачі (16) у вигляді формули

$$z(h,\delta) = \frac{\tilde{c}}{\left(\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2\right) + h\sqrt{\left(\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2\right)}} \left(1 - \frac{\delta}{|\tilde{c}|}\right) \begin{bmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Якщо $h \to 0,\ \ \delta \to 0$, то наближене рівняння (16) прямує до точного рівняння

$$az_1 + bz_2 = c\,, \tag{18}$$

а вектор (17) прямує до нормального розв'язку $z(0,0)$ рівняння (18).

$$z(0,0) = \frac{c}{a^2 + b^2} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Для проведення розрахунків виберемо конкретний числовий приклад.

$$z_1 + 7z_2 = 5\,. \tag{20}$$

Вважаючи коефіцієнти рівняння (20) відомими точно, знаходимо за формулою (19) нормальний розв'язок цього рівняння

$$z(0,0) = \frac{5}{1 + 49} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}7 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Далі розглянемо варіанти наближеного завдання рівняння (20).

Варіант 1. $0{,}95z_1 + 7{,}05z_2 = 4{,}95$.

У цьому прикладі та всюди далі користуємось спектральною нормою матриці та евклідовою нормою вектора. Знаходимо

$$h = h_1 = 0{,}05\sqrt{2}; \quad \delta = \delta_1 = 0{,}05; \qquad z(h_1,\delta_1) = \begin{bmatrix} 0{,}0910816 \\ 0{,}6759213 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Варіант 2. $0{,}90z_1 + 7{,}10z_2 = 4{,}95$. Знаходимо

$$h = h_2 = 0{,}10\sqrt{2}; \quad \delta = \delta_1 = 0{,}05; \qquad z(h_2,\delta_1) = \begin{bmatrix} 0{,}0844308 \\ 0{,}6660652 \end{bmatrix}. \tag{23}$$

Варіант 3. $0{,}95z_1 + 7{,}05z_2 = 4{,}90$. Знаходимо

$$h = h_1 = 0,05\sqrt{2}; \quad \delta = \delta_2 = 0,10; \quad z(h_1, \delta_2) = \begin{bmatrix} 0,0892227 \\ 0,6621266 \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Для кожного варіанта наближеного рівняння вектор $z(h,\delta)$ обчислювався двома способами: за допомогою комп'ютерної програми, в якій ре-алізовувався алгоритм методу Тихонова (4), (5), (6), та (для контролю) за допомогою формули (17). Результати збіглися до сьомого розряду після коми, так вони і представлені векторами (22), (23), (24).

Як видно, найближчим до вектора (21) є вектор (22). Менш точні результати (23), (24) використаємо для того, щоб за формулою (11) підвищити точність вектора (22).

$$\bar{z}(h_1, \delta_1) = \begin{bmatrix} 0,0995913 \\ 0,6995721 \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Як видно, вектор (25) є ближчим до вектора (21), ніж вектор (22).

Приклад 2. Система двох рівнянь з одним невідомим.

$$\begin{cases} z = \tilde{b}_1, \\ z = \tilde{b}_2. \end{cases} \tag{26}$$

Перейдемо до матричного запису системи (26)

$$Az = \tilde{u}, \tag{27}$$

де $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{u} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \end{bmatrix}, \quad \|u - \tilde{u}\| \le \delta$.

Матриця *A* системи (27) відома точно, а вектор $\tilde{u}$ з похибкою δ, вектор u (вектор точної СЛАР) вважаємо невідомим.

Простота прикладу 2 дозволила за алгоритмом методу Тихонова (4), (5), (6) побудувати розв'язок $z(\delta)$ задачі (27) у вигляді формули

$$z(\delta) = \frac{\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2}{2} - \sqrt{2\delta(\tilde{\mu} + \delta)}, \quad \text{де } \tilde{\mu} = \frac{|\tilde{b}_1 - \tilde{b}_2|}{\sqrt{2}}. \tag{28}$$

Формулою (28) визначається наближення до нормального розв'язку системи (26) залежно від похибки δ. Якщо $\delta \to 0$, то наближена система рівнянь (26) прямує до точної системи рівнянь

$$\begin{cases} z = b_1, \\ z = b_2, \end{cases} \tag{29}$$

а наближений розв'язок (28) прямує до нормального розв'язку $z(0)$ системи (29)

$$z(0) = \frac{b_1 + b_2}{2}. \tag{30}$$

Для проведення розрахунків виберемо конкретний числовий приклад

$$\begin{cases} z = 2, \\ z = 1. \end{cases} \tag{31}$$

Нормальний розв'язок системи (31) знаходимо за формулою (30)

$$z(0) = 1,5.$$

Тепер розглянемо три варіанти наближеного завдання рівнянь (31):

Варіант 1. $\begin{cases} z = 2,1; \\ z = 1,1. \end{cases}$ Знаходимо $\delta = \delta_1 = 0,1\sqrt{2}; \ z(\delta_1) = 1,110100$. (32)

Варіант 2. $\begin{cases} z = 2,2; \\ z = 1,2. \end{cases}$ Знаходимо $\delta = \delta_2 = 0,2\sqrt{2}; \ z(\delta_2) = 0,951668$. (33)

Варіант 3. $\begin{cases} z = 2,3; \\ z = 1,3. \end{cases}$ Знаходимо $\delta = \delta_3 = 0,3\sqrt{2}; \ z(\delta_3) = 0,820202$. (34)

Для кожного варіанта наближених рівнянь розв'язок $z(\delta)$ обчислював-ся двома способами: за допомогою комп'ютерної програми, в якій був реалізованим алгоритм методу Тихонова (4), (5), (6), та (для контролю) за допомогою формули (28). Результати збіглися до шостого розряду після коми, так вони і представлені в (32), (33), (34).

За допомогою формул (15) уточнимо результат (32), використовуючи менш точні результати (33), (34):

$$\overline{z}(\delta_1) = 1,268532\,; \qquad \overline{\overline{z}}(\delta_1) = 1,295498\,.$$

Як бачимо, формули (15) дозволяють підвищити точність результату (32), не підвищуючи точності наближених рівнянь.

Приклад 3. Як модельний приклад була також розглянута система, в якій число обумовленості є більшим, ніж 39600 [3]

$$\begin{cases} z_1 + 0,99z_2 = 1,99; \\ 0,99z_1 + 0,98z_2 = 1,97. \end{cases} \tag{35}$$

Як видно, точним розв'язком системи (35) є вектор $z = \left[1;\ 1\right]^T$, але цей розв'язок є нестійким.

Розглянемо три варіанти наближеного завдання системи (35).

Варіант 1. $\begin{cases} 0,99z_1 + 0,98z_2 = 1,97; \\ 0,98z_1 + 0,97z_2 = 1,95. \end{cases} \qquad \delta = \delta_1 = 0,02\sqrt{2}; \quad h = h_1 = 0,02\,.$

$$z(h_1, \delta_1) = \left[0,964873;\ 0,955078\right]^T \tag{36}$$

Варіант 2. $\begin{cases} 0,98z_1 + 0,97z_2 = 1,97; \\ 0,97z_1 + 0,96z_2 = 1,95. \end{cases} \qquad \delta = \delta_1 = 0,02\sqrt{2}; \quad h = h_2 = 0,04\,.$

$$z(h_2, \delta_1) = \left[0,955370;\ 0,945571\right]^T \tag{37}$$

Варіант 3. $\begin{cases} 0,99z_1 + 0,98z_2 = 1,95; \\ 0,98z_1 + 0,97z_2 = 1,93. \end{cases} \qquad \delta = \delta_2 = 0,04\sqrt{2}; \quad h = h_1 = 0,02\,.$

$$z(h_1, \delta_2) = \left[0,934722;\ 0,925232\right]^T \tag{38}$$

Вектори (36), (37), (38) обчислювались методом Тихонова за допомогою комп'ютерної програми. Для уточнення наближеного розв'язку (36) була використана формула (11)

$$\overline{z}(h_1, \delta_1) = \left[1,004527;\ 0,994431\right]^T . \tag{39}$$

Як бачимо, вектор (39) є ближчим до точного розв'язку системи (35), ніж вектор (36).

При проведенні чисельних розрахунків у наведених трьох прикладах була використана програмна реалізація алгоритму методу Тихонова, виконана студентом групи ПС-09-1 О.М. Жело.

Висновок. Розглянуті приклади підтверджують, що розроблений спосіб дозволяє підвищити точність наближеного розв'язку некоректної СЛАР, добутого методом Тихонова, використовуючи менш точні результати, добуті при різних (більших) похибках завдання СЛАР. Це, у свою чергу, підвищує ефективність застосування чисельних методів при розв'язуванні практичних задач.

Бібліографічні посилання

1. **Тихонов А.Н.** Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М., 1979. – 288 с.
2. **Турчак Л.И.** Основы численных методов: учеб. пособие /Л.И. Турчак.– М., 1987. – 320 с.
3. **Бойко Л.Т.** Основи чисельних методів: навч. посібник /Л.Т. Бойко. – Дніпропетровськ, 2009. – 244 с.

Надійшла до редколегії 18.05.2012