

І.С. Тонкошкур, Т.Є. Зайцева

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕЧІЇ ДВОШАРОВОЇ РІДКОЇ ПЛІВКИ ПО ЦИЛІНДРИЧНІЙ ПОВЕРХНІ

Розглянута задача про сумісну течію двох взаємно нерозчинних рідких плівок і газу по циліндричній поверхні під дією сили тяжіння. За допомогою метода малого параметра одержано наближений розв'язок рівнянь динаміки рідкої плівки вздовж поверхні циліндра. Отримано нелінійне рівняння для визначення оптимального значення параметра впливу газового потоку.

Ключові слова: двошарова рідка плівка, газовий потік, метод малого параметра, циліндрична поверхня.

Рассмотрена задача о совместном течении двух взаимно нерастворимых жидких пленок и газа по цилиндрической поверхности под действием силы тяжести. С помощью метода малых возмущений получено приближенное решение уравнений динамики жидкой пленки по поверхности цилиндра. Получено нелинейное уравнение для определения оптимального значения параметра влияния газового потока.

Ключевые слова: двухслойная жидкая пленка, газовый поток, метод малого параметра, цилиндрическая поверхность.

The problem of a stationary joint flow of a two-layer liquid film and gas along the outer (or inner) surface of a circular cylinder of radius r_0 is considered. It is assumed that the films are insoluble in one another, and there are no chemical reactions. The axis of the body is located vertically, and the films flow down from its top. The film is affected by gravity, as well as a gas stream directed upwards or downwards. A cylindrical coordinate system (r, θ, z) is introduced: the z coordinate is measured along the axis of the cylinder, r and θ are the polar coordinates in a plane perpendicular to the axis of the body.

To describe the flow of a liquid film, a viscous incompressible fluid model is used, which is based on the equations of continuity and Navier-Stokes. The following boundary conditions are set on the interface surfaces: on the solid surface - draw off "sticking", on the "liquid-liquid" and "liquid-gas" interfacial surfaces - the conditions of equilibrium of forces and continuity of speeds.

To simplify these differential equations, the method of a small parameter, for which the relative thickness of the films is selected, is applied. Solutions of simplified equations (in a zero approximation) are obtained in analytical form. Functional dependences are obtained for calculating the optimal effect of the gas flow on the "working" film.

In accordance with the described method, calculations of the flow of a two-layer film on the outer and inner surfaces of the circular cylinder are performed in cases where the gas stream is directed upwards, downwards, and also when the gas flow is absent.

An increase in the relative thicknesses of the films δ_1 and δ_2 (with decreasing radius of the cylinder r_0) leads to an increase in deviations from the case of a plane surface that corresponds to the limiting case $\delta_1 = \delta_2 = 0$. The results of calculations of the flow of a two-layer liquid film on the surface of a circular cylinder are presented. The analysis of the influence of physical parameters on the speed profiles is carried out. The results of

calculations for determining the optimal effect of gas flow on a liquid film are presented, when the profile of the speed of the "working" film is the most uniform.

Keywords: two-layer liquid film, gas flow, small parameter method, cylindrical surface.

Вступ. Течії в'язкої рідини з вільними межами застосовуються в різних технологічних процесах і апаратах, зокрема в плівкових хімічних реакторах. Важливою задачею при проектуванні таких апаратів є організація течії рідкої плівки таким чином, щоб розподіл швидкості в поперечному перерізі був близьким до рівномірного. Одним зі способів реалізації такої течії є використання допоміжної плівки, яка б рухалась по твердій стінці і прискорювала б «робочу» плівку.

Дослідження течій двошарових плівок проводились в роботах [1-6]. Спільні течії рідини і газу навколо плоских поверхонь розглядалися в роботах [1-3,5,6]. В [1-3] дія газового потоку враховувалося наближено (за допомогою задання дотичного напруження на поверхні розділу «рідина - газ»). В [5,6] – запропонована методика наближеного розрахунку трифазної течії двох рідких плівок і газу в прямокутному каналі, що основана на методі збурень.

В плівкових апаратах часто реалізуються течії рідини по зовнішнім або внутрішнім поверхням вузьких труб. У цих випадках необхідно враховувати кривизну поверхні. В [4] досліджувались течії двох рідких плівок на зовнішній поверхні циліндра, що обертається в нерухомому газі. В даній роботі розглянута задача про течію двошарової рідкої плівки по циліндричній поверхні з урахуванням впливу газового потоку.

Постановка задачі. Розглядається задача про стаціонарну сумісну течію двошарової рідкої плівки і газу по зовнішній (або внутрішній) поверхні кругового циліндра радіуса r_0 . Припускається, що плівки є нерозчинними одна в другій, а хімічні реакції відсутні. Вісь тіла розташована вертикально. На плівки діє сила тяжіння, а також газовий потік, направлений вгору або вниз.

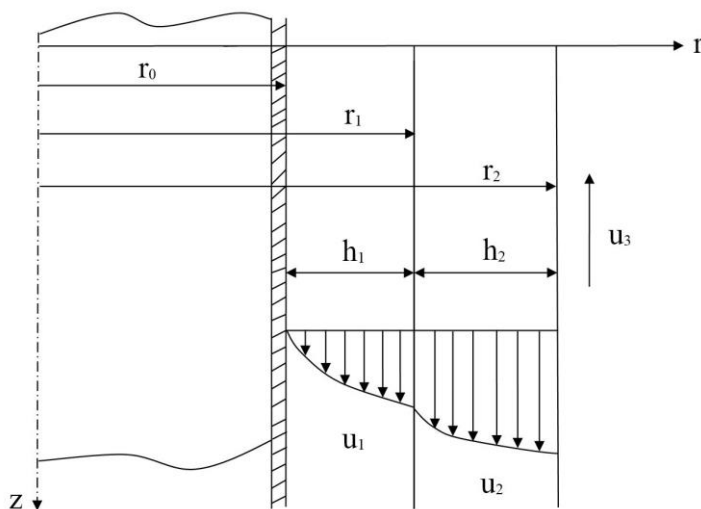


Рис.1. Схема течії

Для опису течії рідких плівок використовується система диференціальних рівнянь Нав'є-Стокса і нерозривності. В циліндричній системі координат (r, θ, z) ці рівняння мають вигляд

$$\begin{aligned} u_i \frac{\partial u_i}{\partial z} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_i}{\partial r} \right) + g, \\ u_i \frac{\partial v_i}{\partial z} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_i}{\partial r} - \frac{v_i}{r^2} \right), \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (rv_i)}{\partial r} + \frac{\partial u_i}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Тут u, v – компоненти вектора швидкості в напрямку осей координат z та r , p – тиск, ρ – густина рідини, ν – коефіцієнт кінематичної в'язкості, g – прискорення вільного падіння, $i = 1, 2$ (індекси 1, 2, відповідають номеру рідкої плівки, G – газу).

На поверхнях розділу ставляться наступні крайові умови:

1) на поверхні твердого тіла (при $r = r_0$) – умови «прилипання»

$$u_1 = v_1 = 0, \quad (1)$$

2) на межфазній поверхності «рідина - рідина» (при $r = r_1$) – умови рівноваги сил і неперервності швидкостей

$$p_{n1} = p_{\sigma 1} + p_{n2}, \quad p_{\tau 1} = p_{\tau 2}, \quad u_{n1} = u_{n2}, \quad u_{\tau 1} = u_{\tau 2}, \quad (2)$$

3) на міжфазній поверхні «рідина - газ» (при $r = r_2$)

$$p_{n2} = p_{\sigma 2} + p_{nG}, \quad p_{\tau 2} = p_{\tau G}, \quad u_{n2} = u_{nG}, \quad u_{\tau 2} = u_{\tau G}, \quad (3)$$

Тут p_n і p_τ – нормальна і дотична компоненти тензора напружень на міжфазній поверхні, p_σ – капілярний тиск. Параметри газового потоку на межі «рідина - газ» вважаються заданими.

Метод розв'язання. Для спрощення вихідної системи диференціальних рівнянь застосовується метод малого параметра, за який вибрана відносна товщини плівки: $\varepsilon = \bar{h}/l$, де \bar{h}, l – характерні поперечний і поздовжній розміри. Введемо також характерну поздовжню швидкість \bar{u} в рідких плівках. У наведеній вище системі диференціальних рівнянь перейдемо до безрозмірних змінних за такими формулами:

$$Z = \frac{z}{l}, \quad R = \frac{r}{r_0}, \quad U_i = \frac{u_i}{\bar{u}}, \quad V_i = \frac{v_i}{\varepsilon \bar{u}}, \quad P_i = \frac{p_i}{\rho \bar{u}^2}, \quad \delta_i = \frac{h_i}{r_0}.$$

Введемо безрозмірні критерії: $Fr = \bar{u}^2 / (g\bar{h})$ – число Фруда, $Re_1 = \bar{u}\bar{h} / \nu_1$, $Re_2 = \bar{u}\bar{h} / \nu_2$ – числа Рейнольдса для кожної з плівок. Будемо припускати, що виконуються наступні умови: $\varepsilon \ll 1$, $\varepsilon Re_1 \ll 1$, $\varepsilon Re_2 \ll 1$. У безрозмірному вигляді спрощена система рівнянь для знаходження поздовжніх швидкостей рідких плівок запишеться так

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U_1}{\partial R} \right) = -\frac{\text{Re}_1}{Fr} R, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial U_2}{\partial R} \right) = -\frac{\text{Re}_2}{Fr} R, \quad (5)$$

Крайові умови:

$$U_1 = 0 \quad \text{при } R=1, \quad (6)$$

$$U_1 = U_2, \quad \frac{\partial U_1}{\partial Y} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\text{Re}_1}{\text{Re}_2} \frac{\partial U_2}{\partial Y} \quad \text{при } R=1+\delta_1=R_1, \quad (7)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial Y} = Ge\delta_2 \frac{\text{Re}_2}{Fr} \quad \text{при } R=1+\delta_1+\delta_2=R_2. \quad (8)$$

Розв'язок цієї крайової задачі має вигляд

$$U_1 = \frac{\text{Re}_1}{2Fr} \left(\frac{1-R^2}{2} + \left(R_1^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} (-R_1^2 + R_*^2) \right) \ln R \right),$$

$$U_2 = \frac{\text{Re}_2}{2Fr} \left(\frac{R_1^2 - R^2}{2} + R_*^2 \ln \frac{R}{R_1} \right) + \frac{\text{Re}_1}{2Fr} \left(\frac{1-R_1^2}{2} + \left(R_1^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} (-R_1^2 + R_*^2) \right) \ln R_1 \right),$$

де $R_*^2 = R_2^2 + 2Ge\delta_2 R_2$, $Ge = \tau_3 / (\rho_2 g h_2)$ - параметр впливу газового потоку, τ_3 - напруження тертя на міжфазній поверхні «рідина - газ».

Оптимальним режимом течії другої (робочої) плівки називають таку течію, для якої відношення максимальної швидкості U_2^{\max} до середньої швидкості U_2^{cp} буде мінімальним [1]. У цьому випадку розподіл швидкості в поперечному перерізі буде найбільш рівномірним. Оптимальне значення параметру впливу газового потоку Ge знаходиться з наступної умови:

$$\frac{d}{dGe} \left(\frac{U_2^{\max}}{U_2^{cp}} \right) = 0.$$

Для даної задачі оптимальне значення параметра Ge_{opt} визначається за формулою

$$Ge_{opt} = \frac{R_{*opt}^2 - R_2^2}{2R_2\delta_2},$$

де величина R_{*opt}^2 знаходиться з нелінійного рівняння

$$A \ln(R_*^2) + BR_*^2 + C = 0,$$

коєфіцієнти якого залежать від фізичних і геометричних параметрів.

Аналіз одержаних результатів. За описаною методикою проведено розрахунки течій двошарової плівки по зовнішній і внутрішній поверхнях кругового циліндра у випадках, коли газовий потік спрямований вгору ($Ge < 0$), вниз ($Ge > 0$), а також коли рух газу відсутній.

Результати розрахунків при значеннях фізичних параметрів $\text{Re}_1 = \text{Re}_2 = 1$; $\text{Fr} = 1$; $\rho_2/\rho_1 = 0.5, 1$; $Ge = -0.75 \div 0.25$ і різних відносних товщинах плівок δ_1 , $\delta_2 = 0.01 \div 0.5$ наведені на рис.2-3. На рис.2 показані профілі поздовжньої

швидкості в рідких плівках на зовнішній стороні кругового циліндра при різних значеннях Ge ($\delta_1=\delta_2=0.2$, $\rho_2/\rho_1=0.5$), на рис.3 – залежності оптимального значення параметру газового потоку Ge_{opt} від геометричних параметрів ($\rho_2/\rho_1=1$). Від’ємні значення цих параметрів на осі абсцис відповідають внутрішній стороні циліндра, додатні – зовнішній. На рис.3а наведені результати для випадку, коли «робоча» і допоміжна плівки мають однакову товщину ($\delta_1=\delta_2=\delta$), на рис 3б,в – коли товщина однієї з плівок не змінюється.

Як видно з рисунків, рух газу може призводити до значних змін картини течії. Оптимальний вибір параметру впливу газового потоку Ge дає можливість одержати найбільш рівномірний розподіл швидкості в рідкій плівці. Збільшення відносних товщин плівок δ_1 і δ_2 (при зменшенні радіуса циліндра r_0) призводить до збільшення відхилень від випадку плоскої поверхні, яка відповідає граничному випадку $\delta_1=\delta_2=0$ (рис.3а).

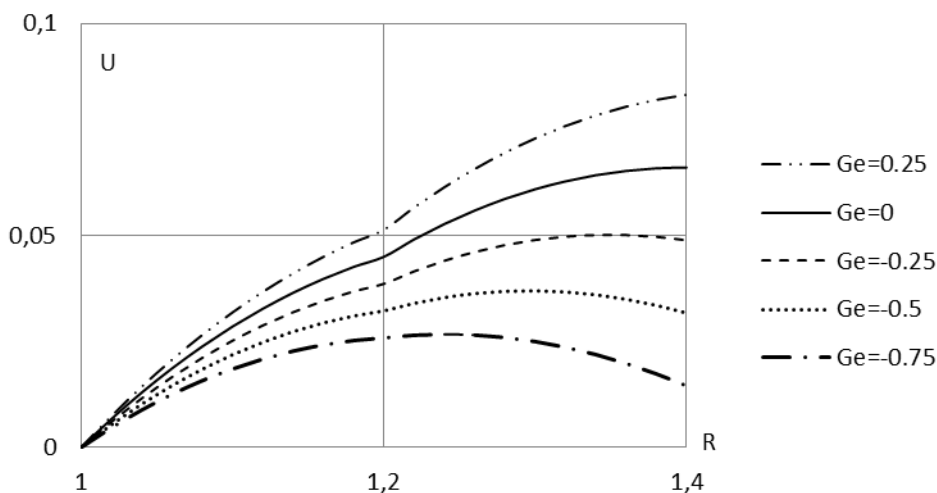
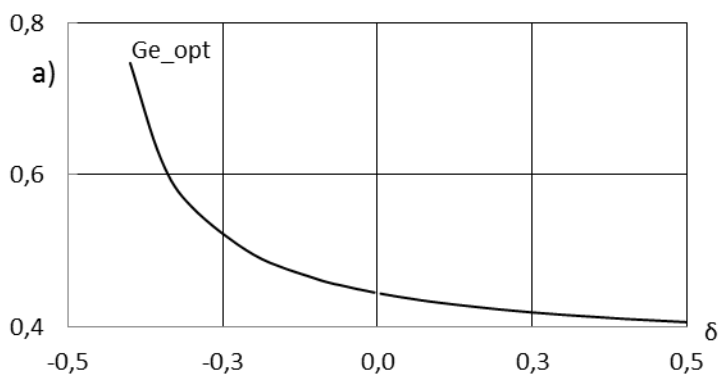


Рис. 2 Профілі швидкостей в рідких плівках



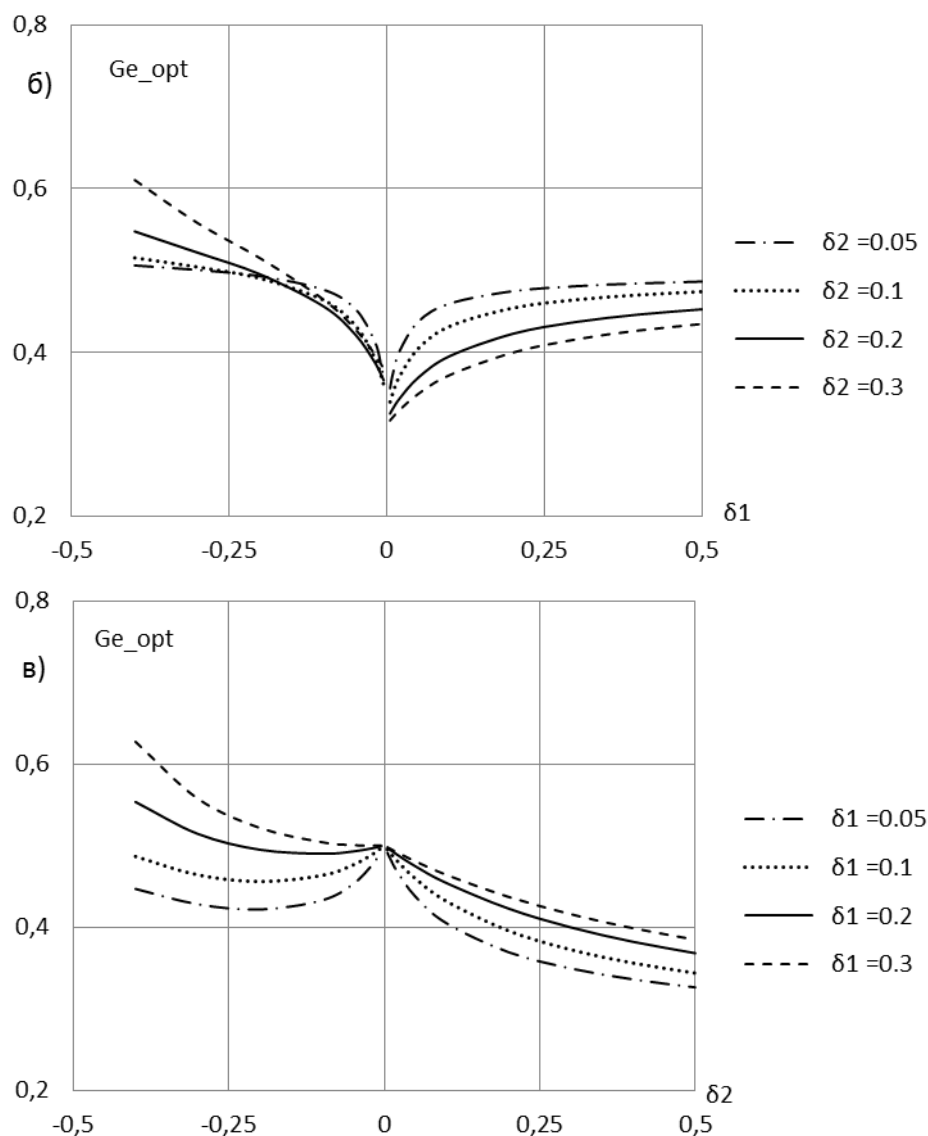


Рис. 3 Залежність параметру впливу газového потоку Ge_{opt} від геометричних параметрів

Висновки. За допомогою методу малого параметра отримано наближений розв'язок задачі про течію двошарової рідкої плівки по циліндричній поверхні з урахуванням впливу газového потоку. Отримано функціональні залежності для розрахунку оптимальної дії газového потоку на «робочу» плівку, коли її профіль швидкості стає найбільш рівномірним.

Бібліографічні посилання

1. Захаров, М.К. Анализ структуры потоков при совместном течении двух пленок взаимно нерастворимых жидкостей по вертикальной поверхности с учетом воздействия газového потока [Текст] / М.К. Захаров, А.Ю. Комков, Д.М. Павленко // Вестник МИТХТ. – 2008. – Т. 3, № 4. – С.70–74.
2. Захаров, М.К. Анализ структуры потоков при совместном течении двух пленок неньютоновских жидкостей по вертикальной поверхности с учетом воздействия газového потока [Текст] / М.К. Захаров, А.Ю. Комков // Теоретические основы химической технологии. – 2009. – Т. 43, № 1. – С. 37–46.
3. Захаров, М.К., Расчет толщины пленок двух взаимно нерастворимых жидкостей при

встречном газовом потоке [Текст] / М.К. Захаров, К.О. Гончарук // Вестник МИТХТ. – 2013. – Т. 8, № 4. – С. 33-37.

4. **Конон, П.Н.** Установившееся движение двух тонких плоских слоев вязких жидкостей на внешней поверхности вращающегося цилиндра / П.Н. Конон, А.И. Ермоленко // Теоретическая и прикладная механика. – Минск: БНТУ, – 2017. – Вып. 32. – С. 46 – 51.
5. **Санто, О.В.** Математичне моделювання течій двошарової рідкої плівки по поверхні твердого тіла [Текст] / О.В.Санто, І.С. Тонкошкур // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Д.: Ліра, 2014. – С. 200-206.
6. **Тонкошкур, І.С.** Математическое моделирование взаимодействия двухслойной жидкой пленки с газовым потоком [Текст] / И.С. Тонкошкур // Питання прикладної математики і математичного моделювання: Збірник наукових праць. – Д: Ліра, 2017. – Вип. 17. – С. 220-225.

Надійшла до редколегії 16.10.2018.