УДК 532.516 doi: 10.15421/321816

І.С. Тонкошкур
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЛІВКОВИХ ТЕЧІЙ РІДИНИ ПО ПОВЕРХНІ ТІЛА ОБЕРТАННЯ

Розглянута задача про просторову безхвильову плівкову течію нелінійної в'язкопластичної рідини по поверхні твердого тіла під дією сили тяжіння. За допомогою метода малого параметра одержано наближений розв'язок рівнянь динаміки рідкої плівки по поверхні тіла обертання.
Ключові слова: рідка плівка, метод малого параметра, тіло обертання, в'язкопластична рідина.

Рассмотрена задача о пространственном безволновом пленочном течении нелинейной вязкопластической жидкости по поверхности твердого тела под действием силы тяжести. С помощью метода малого параметра получено приближенное решение уравнений динамики жидкой пленки по поверхности тела вращения.
Ключевые слова: жидкая пленка, метод малого параметра, тело вращения, вязкопластичная жидкость.

The problem of the spatial nonwave stationary flow of the viscoplastic fluid on the surface of the body of rotation under the action of gravity is considered. It is assumed that the axis of the body is located at a certain angle to the vertical, and the film of liquid flows down from its top. A curvilinear orthogonal coordinate system (ξ, η, ζ) associated with the body surface is introduced: ξ is the coordinate along the generatrix of the body, η is the polar angle in the plane perpendicular to the axis of the body of revolution, ζ is the distance along the normal to the surface. To describe the flow of a liquid film, a viscous incompressible fluid model is used, which is based on partial differential equations - the equations of motion and continuity. The following boundary conditions are used: sticking conditions on the solid surface; on the surface separating liquid and gas, the conditions for continuity of stresses and normal component of the velocity vector. For the closure of a system of differential equations, the Schulman rheological model is used, which is a generalization of the Ostwald-de-Ville power model and the Shvedov-Bingham viscoplastic model. To simplify the system of differential equations, the small parameter method is used. The small parameter is the relative film thickness. It is assumed that the generalized Reynolds number has an order equal to one. The solution of the equations of continuity and motion (taking into account the principal terms of the expansion) was obtained in an analytical form. The obtained formulas for the components of the velocity and pressure vector generalize the known relations for flat surfaces. To determine the unknown film thickness, an initial-boundary value problem was formulated for a first-order partial differential equation. The solution to this problem is found with the help of the finite difference method. The results of calculations according to the proposed method for the circular cone located at a certain angle to the vertical are presented. Calculations show that the parameters of nonlinearity and plasticity of this rheological model of a liquid can significantly affect the speed profiles and the distribution of the thickness of the viscous layer on the surface of the body.
Keywords: liquid film, small parameter method, body of rotation, visco-plastic fluid.

Вступ. Плівкові течії рідини широко застосовуються в енергетиці, металургії, в хімічній, будівельній, харчовій та інших галузях промисловості. В технічних пристроях реалізуються, як правило, тривимірні течії рідкої плівки по криволінійним поверхням. Крім того, в технологічних процесах часто використовують реологічно складні (неньютонівські) рідини, які мають особливі властивості. У зв'язку з цим становить інтерес розробка методів розрахунку просторових течій неньютонівських рідин.

Просторові течії в’язкої рідини по твердій поверхні досліджувались в роботах [1-4]. В [1] сформульована система рівнянь динаміки ньютонівської рідини на криволінійній твердій поверхні, дається розв’язок осесиметричних задач для кругового конуса і циліндра. В роботах [3,4] досліджувались течії ньютонівської та нелінійно-в’язкої рідин поблизу твердого тіла (циліндр, диск), що обертається навколо своєї осі. В [2] запропонована методика наближеного розрахунку несиметричних просторових течій по поверхні тіла обертання для моделі в’язкопластичної рідини Шведова-Бінгама. В даній роботі ця методика поширюється на реологічну модель Шульмана [5], яка є узагальненям нелінійно-в’язкої моделі і моделі Шведова-Бінгама.

Постановка задачі. Розглядається задача про просторову безхвильову стаціонарну течію в’язкопластичної рідини по поверхні тіла обертання під дією сили тяжіння. Припускається, що вісь тіла розташована під деяким кутом до вертикалі, а плівка рідини стікає від його вершини вниз. Введемо криволінійну ортогональну систему координат (ξ, η, ζ), зв'язану з поверхнею тіла: координата ξ відраховується від вершини тіла уздовж твірної, η – полярний кут в площині, перпендикулярній осі тіла обертання, ζ – відстань по нормалі до поверхні. Рівняння поверхні тіла задається у вигляді, $r = r_w(\xi)$ де r_w – відстань від точки поверхні до осі тіла.

Для опису течії рідкої плівки застосовується модель в'язкої нестисливої рідини, яка заснована на рівняннях імпульсу і нерозривності. У векторній формі ці рівняння мають вигляд

$$\rho \frac{d\overline{V}}{dt} = -grad\ p + Div\,\overline{\overline{\tau}} + \rho\overline{g}\,, \tag{1}$$

$$div\,\overline{V} = 0\,, \tag{2}$$

де $\overline{V}$ – вектор швидкості руху рідини, p – тиск, ρ – густина рідини, $\overline{\overline{\tau}}$ – тензор в'язких напружень, $\overline{g}$ – інтенсивність сили тяжіння.

В якості крайових умов використовуються умова прилипання на поверхні твердого тіла, а також умови неперервності напружень і нормальної складової вектора швидкості – на поверхні, що розділяє рідину і газ.

$$\overline{V} = 0 \qquad \text{при } \zeta = 0, \tag{3}$$

$$\overline{\overline{\tau}}\,\overline{N} - (p - p_0)\overline{N} = 2\sigma\chi\overline{N} + \nabla_\Gamma\sigma, \tag{4}$$

$$\overline{V}\,\overline{N} = 0 \qquad \text{при } \zeta = F. \tag{5}$$

Тут $F = F(\xi,\zeta)$ – рівняння вільної поверхні, p_0 – атмосферний тиск в газі, $\overline{N} = \overline{N}(\xi,\eta)$ – одинична нормаль до Γ, χ – середня кривизна поверхні Γ, σ – коефіцієнт поверхневого натягу, $\nabla_\Gamma \sigma$ – поверхневий градієнт коефіцієнта σ.

Для замикання системи рівнянь (1)-(2) використовується реологічний закон Шульмана [5]:

$$\tau_{ij} = 2\left[\frac{\tau_0^{1/n}}{A} + \mu_p\right]^n A^{n-1}\dot{e}_{ij} \qquad \text{при } |\tau| > \tau_0 ,$$

$$\dot{e}_{ij} = 0 \qquad \text{при } |\tau| \le \tau_0 ,$$

де τ_{ij} – компоненти тензора в'язких напружень $\overset{=}{\tau}$, τ_0 – граничне напруження зсуву, μ_p – коефіцієнт пластичної в'язкості, $A = \sqrt{2I_2}$, I_2 – другий інваріант тензора швидкостей деформацій $\dot{e}_{ij}$, n – параметр нелінійності.

Метод розв'язання. Для спрощення системи диференціальних рівнянь (1)-(2) з крайовими умовами (3)-(5) застосовується метод малого параметра, в якості якого обрана відносна товщина плівки $\varepsilon = h_0 / l_0$ (h_0, l_0 – характерні поперечний і поздовжній розміри). Припускається, що узагальнене число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \rho\, h_0^{\,n}\, U_0^{2-n} / \mu^n$ має порядок одиниці (тобто εRe << 1).

Введемо безрозмірні змінні за формулами:

$$\xi = \xi'\eta_0, \quad \eta = \eta', \quad \zeta = \varepsilon l_0 \zeta',$$

$$u = U_0 u', \quad w = U_0 w', \quad v = \varepsilon U_0 v',$$

$$p = \rho U_0^2 p', \quad \sigma = \sigma_0 \sigma', \quad F = \varepsilon l_0 F'.$$

Тут u, w, v – складові вектора швидкості, відповідні координатам (ξ,η,ζ), U_0, σ_0 – характерні значення швидкості руху і коефіцієнта поверхневого натягу. Введемо також допоміжну функцію $P(\xi,\eta,\zeta)$, зв'язану з тиском p співвідношенням:

$$p = p_0 - 2\sigma\chi + \rho U_0^2 P$$

Подамо невідомі функції (складові вектора швидкості і тиск) у вигляді розкладів в ряд по ε

$$A = A^0 + \varepsilon A^1 .$$

Враховуючи головні члени розкладань, отримаємо спрощену систему рівнянь (надалі для скорочення запису знак «'» опущений)

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{r_w}\frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{r_w'}{r_w} u = 0, \;\; \frac{\partial P}{\partial \zeta} = \frac{(\overline{en})}{Fr},$$

$$\frac{\partial \tau_{31}}{\partial \zeta} = -\frac{\mathrm{Re}}{Fr}(\overline{e}\overline{e}_1), \quad \frac{\partial \tau_{32}}{\partial \zeta} = -\frac{\mathrm{Re}}{Fr}(\overline{e}\overline{e}_2).$$

Крайові умови:

$$u = w = v = 0 \qquad \text{при } \zeta=0,$$

$$\tau_{31} = \tau_{32} = P = 0,\ v - u\frac{\partial F}{\partial \xi} - \frac{w}{r_w}\frac{\partial F}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при } \zeta=F.$$

Тут u, w, v – складові вектора швидкості; $Fr = U_0^2/(gh_0)$ – число Фруда; $\overline{e}$ – одиничний вектор, що задає напрям дії сили тяжіння; $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{n}$ – базисні вектори криволінійної системи координат (ξ, η, ζ); g – прискорення вільного падіння. Поверхня $\zeta = F_1(\xi, \eta)$, що розділяє в'язку і пластичну області течії рідини, визначається параметром пластичності $S = \tau_0 h_0^{\ n}/(\mu^n U_0^n)$.

Розв'язок задачі (в нульовому наближенні) для складових вектора швидкості має вигляд:
у в'язкій області течії (при $\zeta < F_1$)

$$u = \varphi_1 \cdot B \cdot \left\{ \beta \left[(F-\zeta)^{\alpha+1} - F^{\alpha+1} \right] + \overline{S}^{\alpha}\zeta \right\},$$

$$w = \varphi_2 \cdot B \cdot \left\{ \beta \left[(F-\zeta)^{\alpha+1} - F^{\alpha+1} \right] + \overline{S}^{\alpha}\zeta \right\},$$

$$v = \left(\varphi_1 \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\varphi_2}{r_w}\frac{\partial F}{\partial \eta} \right) \cdot B \cdot F^{\alpha+1} \left[\frac{\zeta}{F} + \beta \left[\left(1 - \frac{\zeta}{F} \right)^{\alpha+1} - 1 \right] \right] +$$

$$+ \beta\varphi_3 F^{\alpha+2} \left[\frac{\zeta}{F} + \left[\left(1 - \frac{\zeta}{F} \right)^{\alpha+1} - 1 \right] \gamma \right] + \varphi_6 \overline{S}^{\alpha} \frac{\zeta^2}{2},$$

у пластичній області (при $\zeta \geq F_1$)

$$u = \varphi_1 \cdot B \cdot \left\{ \beta \left(\overline{S}^{\alpha+1} - F^{\alpha+1} \right) + \overline{S}^{\alpha}(F - \overline{S}) \right\},$$

$$w = \varphi_2 \cdot B \cdot \left\{ \beta \left(\overline{S}^{\alpha+1} - F^{\alpha+1} \right) + \overline{S}^{\alpha}(F - \overline{S}) \right\},$$

$$v = \left(\varphi_1 \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\varphi_2}{r_w}\frac{\partial F}{\partial \eta} \right) \cdot B \cdot \left[F^{\alpha}(F - \overline{S}) + \left(\overline{S}^{\alpha+1} - F^{\alpha+1} \right) \beta \right] +$$

$$+ \beta\varphi_3 \left[F^{\alpha+1}(F - \overline{S}) + \left(\overline{S}^{\alpha+2} - F^{\alpha+2} \right) \gamma \right] + \varphi_6 \overline{S}^{\alpha} \frac{(F - \overline{S})^2}{2},$$

для функції тиску

$$P = \varphi_4(\zeta - F),$$

де $F_1 = F - \overline{S}$ – товщина в'язкого шару, $\overline{S} = S/(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^{\alpha}$, φ_i, B – відомі функції, які залежать від геометричних і фізичних параметрів:

$$\varphi_1 = -\frac{\mathrm{Re}}{Fr}(\bar{e},\bar{e}_1),\ \varphi_2 = -\frac{\mathrm{Re}}{Fr}(\bar{e},\bar{e}_2),\ \varphi_3 = \frac{\partial(\varphi_1 B)}{\partial \xi} + \frac{1}{r_w}\frac{\partial(\varphi_2 B)}{\partial \eta} + \frac{r_w'}{r_w}\varphi_1 B,\ \varphi_4 = \frac{(\bar{e},\bar{n})}{Fr},$$

$$\varphi_5 = D\left(\varphi_1^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} + \varphi_1\varphi_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi}\right) + \frac{D}{r_w}\left(\varphi_1\varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta} + \varphi_2^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta}\right),\quad \varphi_6 = -\varphi_3 + \alpha B \varphi_5,$$

$$B = D^{-(\alpha-1)/2},\quad D = \left(\varphi_1^2 + \varphi_2^2\right)^{-1},\quad \alpha = \frac{1}{n},\quad \beta = \frac{n}{n+1},\quad \gamma = \frac{n}{2n+1},$$

Невідома товщина плівки F визначається в результаті розв'язання крайової задачі

$$\varphi_1 \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\varphi_2}{r_w}\frac{\partial F}{\partial \eta} + f(\xi,\eta,F) = 0, \tag{6}$$

$$F(1,\eta) = 1,\quad F(\xi,0) = F_0(\xi), \tag{7}$$

де

$$f(\xi,\eta,F) = \frac{\beta\varphi_3\left[F^{\alpha+1}\left(F-\bar{S}\right) + \left(\bar{S}^{\alpha+2} - F^{\alpha+2}\right)\beta\right] + 0.5\varphi_6 \bar{S}^{\alpha}\left(F-\bar{S}\right)^2}{B\left(F^{\alpha} - \bar{S}^{\alpha}\right)\left(F-\bar{S}\right)}.$$

Система рівнянь (6)-(7) розв’язується чисельно з використанням різницевої схеми біжучого обчислення. Функція $F_0(\xi)$ знаходиться в результаті розв’язання задачі на лінії розтікання η=0.Результати розрахунків за описаною методикою для конуса з кутом $\theta = 30^\circ$ при куті скосу потоку $\delta = 10^\circ$ і значеннях фізичних параметрів *Re*=1, *Fr*=1 представлені на рисунках 1-2. На рис. 1 показані профілі поздовжньої складової вектора швидкості *u* в шарі плівки для точки поверхні з координатами (ξ=1,5; η=0°) при значеннях параметрів *n*=1, *S*=0; 0,1; 0,2; 0,3 (рис. 1.а) і при *S*=0, *n*=0,5; 1; 2; 10 (рис. 1.б). На рис. 2 наведені розподіли товщини плівки *F* і товщини в’язкого шару F_1 вздовж лінії розтікання (η=0°). Розрахунки показують, що параметри нелінійності *n* і пластичності *S* істотно впливають на профілі швидкості і розподіли товщини в'язкого шару по поверхні тіла.

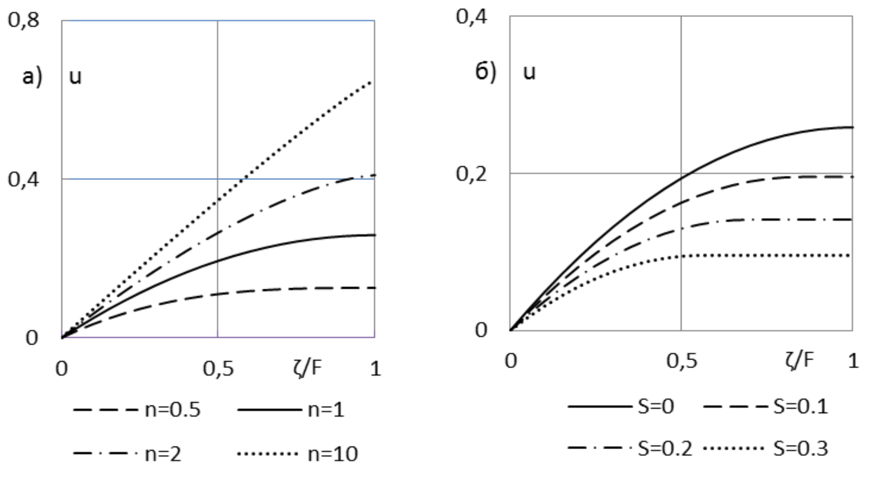

Рис. 1 Профілі поздовжньої складової вектора швидкості *u*

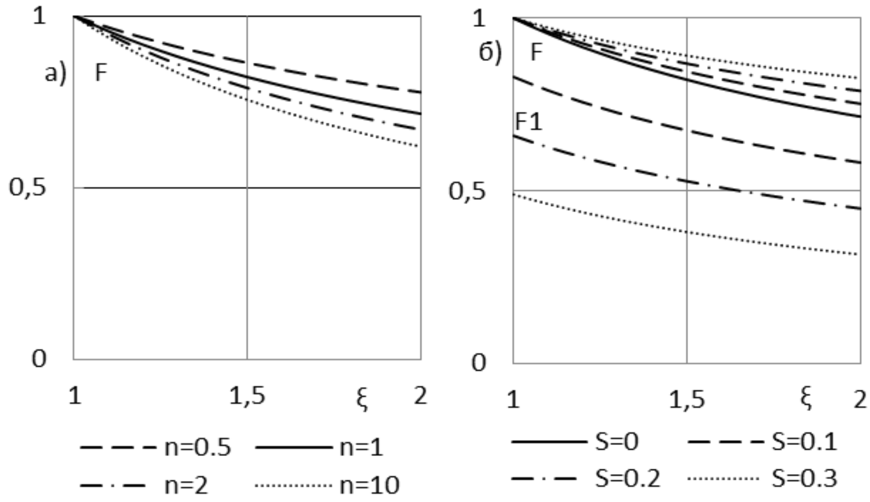

Рис. 2. Розподіли товщини плівки F і товщини в'язкого шару F_1 вздовж твірної конуса (*η=0°*)

Висновки. За допомогою методу малого параметра розроблена методика розв'язання задачі про течію нелінійної в'язкопластичної рідини по поверхні тіла обертання під дією сили тяжіння. Сформульовано крайову задачу для визначення товщини плівки. Отримано аналітичні вирази для профілів швидкості в залежності від фізичних параметрів задачі.

Бібліографічні посилання

1. **Волченко Ю.А.** Динамика жидкой пленки на искривленной твердой стенке с учетом фазового превращения на свободной поверхности [Текст] / Ю.А. Волченко, И.И. Иевлев // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. –1994. – №4. – С. 42-50.
2. **Дудник, А.С**. Моделирование течения вязкопластической жидкости по поверхности тела вращения [Текст]/ А.С. Дудник, И.С. Тонкошкур // Питання прикладної математики і математичного моделювання. – Дніпропетровськ: Ліра, 2014. – С. 98-104.
3. **Конон, П.Н.** Установившееся движение двух тонких плоских слоев вязких жидкостей на внешней поверхности вращающегося цилиндра / П.Н. Конон, А.И. Ермоленко // Теоретическая и прикладная механика. – Минск: БНТУ, – 2017. – Вып. 32. – С. 46 – 51.
4. **Рябчук, Г.В.** Течение нелинейно-вязкой жидкости по поверхности вращающегося плоского диска [Текст] / Г.В. Рябчук, А.Г. Щукина // Изв. РАН. Механика жидкости и газа – 2003. – № 6. – С. 155-161.
5. **Шульман, З.П.** Реодинамика и тепломассообмен в пленочных течениях [Текст] / З.П. Шульман, В.Н. Байков.– Минск: Наука и техника, 1979.– 296 с.

Надійшла до редколегії 11.10.2018.