УДК 519.176 doi: 10.15421/321814

В.А.Перепелица[*], Э.В.Терещенко[**], А.Е Рябенко[**]
[*]*Запорожский национальный университет,* [**]*Запорожский национальный технический университет*

КВАЗИПОЛНОТА КЛАССА ЗАДАЧ НА ГРАФАХ «ВЕС-МИНИМАКСНОЕ РЕБРО»

Доказана теорема о квазиполноте двукритериальных задач на графах, целевая функция которых состоит из условий «вес-минимаксное ребро», причем по первому критерию допустимые решения имеют постоянное число ребер. Предложена методика изучения свойств, структуры и оценки мощностей множества допустимых решений, паретовского множества и полного множества альтернатив задач выделенного класса. Предложены полиномиальные алгоритмы решения изучаемых задач.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, паретовское множество, полное множество альтернатив, квазиполная задача.

Задачі багатокритеріальної оптимізації в загальній постановці не мають очевидного рішення, що породжує безліч підходів у визначенні найбільш «вдалого» з деякої сукупності рішень, які відповідають поставленим умовам. Одним із шляхів формального визначення множини можливих альтернативних рішень є виділення паретовської множини, множини непокращуваних альтернатив. Свою продуктивність підтвердив шлях вивчення деяких класів багатокритеріальних задач, цільові функції яких мають певні властивості. Була введена концепція повних задач, для яких виконується рівність множини допустимих рішень, множини Парето і повного набору альтернатив.

У попередніх роботах авторами введено поняття квазіповноти. У статті виділено клас двокритеріальних задач. Допустиме рішення за першим критерієм в цих задачах має постійне число ребер, і цільова функція містить критерій ваги і критерій мінімаксного ребра. Представниками цього класу обрані задача на графі загальної структури та задача на дводольному графі, допустимі рішення яких мають постійну кількість ребер. Сформована методика вивчення властивостей і оцінки потужностей допустимої множини рішень, паретовскої множини і повної множини альтернатив для задач виділеного класу. Доведено теорему про квазіповноту задач виділеного класу. Отримано оцінки для двох представників цього класу: «про остовне дерево і минимаксне ребро», «про досконале паросполучення на дводольному графі і мінімаксне ребро». Запропоновано поліноміальні алгоритми вирішення досліджуваних задач. Дано оцінки обчислювальної складності цих алгоритмів.

Ключові слова: багатокритеріальна оптимізація, паретовська множина, повна множина альтернатив, квазіповна задача.

The tasks of multi-criteria optimization in the general formulation do not have a trivial solution, which gives rise to a multitude of approaches in determining the most "successful" solution from a certain set of solutions that satisfy the problem conditions. One of the ways of formal defining of the possible alternative solution set is to isolate the Pareto set, i.e. the set of unimprovable alternatives. The previously developed approach

was applied for studying some classes of multi-criteria problems, the objective functions of which have certain properties, and its productivity was confirmed. The concept of complete problems was introduced, for which the equality of the sets of feasible solutions, the Pareto and the full set of alternatives was fulfilled. In previous works, the authors introduced the concept of quasi-completeness. In the article the class of two-criterion problems, for which the admissible solution for the first criterion has a constant number of edges, and objective function contains the criterion of weight and the criterion of the minimax edge, is distinguished. The problem on the graph of the general structure and the problem on the bichromatic graph, for which the feasible solutions have a constant number of edges, were selected as representatives of this class. A method for studying the properties and estimating the powers of an admissible set of solutions, a Pareto set and a complete set of alternatives for the problems of the selected class, has been formulated. A theorem on the quasi-completeness for the selected class problems is proved. There were obtained estimates for two representatives of this class: "about a spanning tree and a minimax edge", "about a perfect matching on a bichromatic graph and a minimax edge".

Polynomial algorithms for solving the problems under study are proposed. Estimates of the computational complexity of these algorithms are given.

Keywords: multi-criteria optimization, Pareto set, full set of alternatives, quasi-complete problem.

Введение. Задачи многокритериальной оптимизации в общей постановке не имеют тривиального решения, что порождает множество подходов в определении наиболее «удачного» из некоторой совокупности решений, удовлетворяющих поставленным условиям. Одним из путей формального определения множества возможных альтернативных решений является выделение паретовского множества, множества неулучшаемых альтернатив [1]. В работах [4,7] продемонстрированы возможности использования полного множества альтернатив, выделяемого из паретовского множества. Свою продуктивность подтвердил путь изучения некоторых классов многокритериальных задач, целевые функции которых обладают определенными свойствами. Так было введено понятие полных задач, для которых выполнялось равенство множеств допустимых решений, паретовского и полного множества альтернатив. Были определены классы полных задач [2,4,6,7].

В статье [5] авторами введено понятие квазиполноты, сформулированы необходимые и достаточные условия наличия свойства полноты и квазиполноты для класса двукритериальных задач, целевая функция которых объединяет два однотипных условия «вес-вес». Проведен анализ структуры и оценки мощностей множества допустимых решений (МДР), паретовского множества (ПМ) и полного множества альтернатив (ПМА).

Материал представленной статьи отражает следующий этап по изучению свойств двукритериальных задач на графах с определенными свойствами целевой функции. Статья посвящена изучению класса двукритериальных задач на графах, целевая функция которых объединяет разнотипные условия «вес-критическое ребро». Представителями этого класса выбраны задача на графе общей структуры и задача на двудольном графе, допустимые решения которых имеют постоянное количество ребер. Предложена методика изучения свойств, структуры и оценки мощностей МДР, ПМ, ПМА, а также полиномиальные алгоритмы решения изучаемых задач.

Постановка задачи. Символом Z_γ, $\gamma=\overline{1,3}$ будем обозначать сформулированную на $n-$вершинном графе $G=(V,E)$ однокритериальную задачу нахождения экстремального значения суммы весов ребер: Z_1 - об остовных деревьях, Z_2 - о совершенных паросочетаниях на двудольном графе с равными долями. Для задачи Z_2 условимся, что множество вершин V графа $G=(V,E)$ распадается на два равномощных непересекающихся подмножества V^1,V^2, $V^1\cap V^2=\varnothing$, $V=V^1\bigcup V^2$. Внутри подмножеств V^1,V^2 вершины несмежны. В этом случае граф $G=(V,E)$ двудольный, и V^1,V^2- множества вершин соответственно первой и второй долей. Задачи Z_1 и Z_2 относятся к классу задач, допустимые решения которых имеют постоянное число ребер. Символом Z_3 будем обозначать сформулированную на n-вершинном графе $G=(V,E)$ однокритериальную задачу нахождения минимального значения максимального веса ребра, назовем эту задачу «о минимаксном ребре».

Множество всех допустимых решений задачи Z_γ с индивидуальным критерием $F_\gamma(x)$ обозначим через $X_\gamma=\{x_\gamma\}$, где $x_\gamma=(V_\gamma,E_\gamma)$- подграф графа G, $V_\gamma\subseteq V$, $E_\gamma\subseteq E$, γ - индивидуальный номер критерия. Символом Z_{γ_1,γ_2} будем обозначать двухкритериальную задачу на двухвзвешенном $n-$вершинном $m-$реберном графе с критериями $F_{\gamma_i}(x)\to extr$, $i=\overline{1,2}$ векторной целевой функции $F_{\gamma_1,\gamma_2}(x_{\gamma_1,\gamma_2})$. Индексы γ_i, $i=\overline{1,2}$ обозначают индивидуальные номера критериев, причем порядок критериев $F_{\gamma_i}(x)$, определяет очередность решения задач Z_{γ_i}.

Для двукритериальных задач примем обозначения: $X_{\gamma_1,\gamma_2}=\{x \mid x=x_{\gamma_1,\gamma_2}=(x_{\gamma_1},x_{\gamma_2}),x_{\gamma_1}\in X_{\gamma_1},x_{\gamma_2}\in X_{\gamma_2}\}$ - МДР задачи Z_{γ_1,γ_2}, где $x_{\gamma_1,\gamma_2}=(x_{\gamma_1},x_{\gamma_2})$- допустимое решение задачи Z_{γ_1,γ_2}, представляющее собой два подграфа $x_{\gamma_i}=(V,E_{\gamma_i})$, $i=\overline{1,2}$ данного графа $G=(V,E)$, $E_{\gamma_i}\subseteq E$; $\left|X_{\gamma_1,\gamma_2}\right|$–мощность множества X_{γ_1,γ_2}; $\tilde{X}_{\gamma_1,\gamma_2}$- паретовское множество двухкритериальной задачи Z_{γ_1,γ_2}, $\tilde{X}_{\gamma_1,\gamma_2}\subseteq X_{\gamma_1,\gamma_2}$; $X^0{}_{\gamma_1,\gamma_2}$- полное множество альтернатив, которое определяется как подмножество ПМ $X^0{}_{\gamma_1,\gamma_2}\subseteq\tilde{X}_{\gamma_1,\gamma_2}$ минимальной мощности $\left|X^0{}_{\gamma_1,\gamma_2}\right|$ и такое, что $F_{\gamma_1,\gamma_2}(X^0{}_{\gamma_1,\gamma_2})=F_{\gamma_1,\gamma_2}(\tilde{X}_{\gamma_1,\gamma_2})$ [4].

Многокритериальную задачу Z_{γ_1,γ_2} назовем квазиполной, если для МДР X_{γ_1,γ_2} существуют такие параметры векторной целевой функции (ВЦФ) $F(x)$, при которых максимальные мощности МДР, ПМ и ПМА подчинены соотношению $\left|X^0{}_{\gamma_1,\gamma_2}\right| = \left|\tilde{X}_{\gamma_1,\gamma_2}\right| < \left|X_{\gamma_1,\gamma_2}\right|$ [5].

Присвоим каждому ребру $e_t \in E$, $t = \overline{1,m}$ n-вершинного графа $G = (V, E)$, $|E| = m$ пару весов $\omega_i(e_t)$, $i = \overline{1,2}$, $t = \overline{1,m}$.

Выделим класс двухкритериальных задач, ВЦФ которых состоит из критерия веса и минимаксного ребра:

$$F(x) = (F_{\gamma_1}(x), F_{\gamma_2}(x)) = (F_{\gamma_1}(x), F_4(x)) \;, \tag{1}$$

$$F_{\gamma_1}(x) = \omega_1(x_{1,4}) = \omega_1(x_1) = \sum_{e \in E_{x_1}} \omega_1(e) \to \max \,, \tag{2}$$

$$F_3(x_{1,3}) = \max_{e \in E_{x_1}} \omega_2(e) \to \min \;. \tag{3}$$

Особенностью задач выделенного класса является то, что каждое из допустимых решений x_{γ_i}, $i = \overline{1,2}$ в отдельности состоит из одного типа подграфов графа G, таких как остовное дерево, совершенное паросочетание и ребро. Причем, типы подграфов x_{γ_1} и x_{γ_2} не совпадают.

Дальнейший материал посвящен изучению структуры МДР $X_{\gamma_1,3} = \{x_{\gamma_1,3}\}$, ПМ $\tilde{X}_{\gamma_1,3}$, ПМА $X^0{}_{\gamma_1,3}$, $\gamma_1 = 1{,}2$, мощностей этих множеств на основании множеств допустимых решений x_{γ_1} и X_3 соответствующих однокритериальных задач Z_{γ_1} и Z_3 с целевыми функциями $F_{\gamma_1}(x_{\gamma_1})$, $F_3(x_3)$. Полученные результаты позволят сделать вывод о наличии или отсутствии свойств полноты или квазиполноты для задач выделенного класса $Z_{\gamma_1,3}$, $\gamma_1 = 1{,}2$.

Метод решения. Построим алгоритм α решения задачи $Z_{\gamma_1,3}$, $\gamma_1 = 1{,}2$. На первом этапе алгоритма α формируется МДР $X_{\gamma_1} = \{x_{\gamma_1}{}^{\mu}\}$, $\left|X_{\gamma_1}\right| = M$, $\mu = \overline{1,M}$ задачи Z_{γ_1}, соответствующее индексу γ_1. Каждое допустимое решение $x_{\gamma_1}{}^{\mu} \in X_{\gamma_1}$ представляет собой подграф $x_{\gamma_1}{}^{\mu} = (V_{\gamma_1}{}^{\mu}, E_{\gamma_1}{}^{\mu})$ графа $G = (V, E)$, $V_{\gamma_1}{}^{\mu} \subseteq V$, $E_{\gamma_1}{}^{\mu} \subseteq E$. На втором этапе по значению второго веса $\omega_2(e)$, $e \in E_{x_{\gamma_1}{}^{\mu}}$ на каждом подграфе $x_{\gamma_1}{}^{\mu}$, $\mu = \overline{1,M}$ решается задача о нахождении ребра максимального веса $\omega_2(e^{\mu}_{extr}) = \underset{e \in E_{x_{\gamma_1}{}^{\mu}}}{extr}\, \omega_2(e)$. Применив этот прием для каждого номера $\mu \in [1, M]$, формируем МДР $X_{\gamma_1,3} = \{x_{\gamma_1,3}\}$ задачи $Z_{\gamma_1,3}$. Для каждого допустимого решения $x_{\gamma_1,3}$ значение целевой функции определено в виде пары $(F_{\gamma_1}(x^\mu), F_3(x^\mu))$, где $F_{\gamma_1}(x^\mu) = \omega_1(x_{\gamma_1}{}^\mu)$, $F_3(x^\mu) = \omega_2(e_{extr}{}^\mu)$. На третьем этапе из МДР выделяется ПМ $\tilde{X}_{\gamma_1,3}$ согласно критериям (2)-(3).

Рассмотрим структуру МДР $X_{\gamma_1,3}$, ПМ $\tilde{X}_{\gamma_1,3}$ и ПМА $X^0_{\gamma_1,3}$ задач $Z_{\gamma_1,3}, \gamma_1 = 1,2$. В графе $G = (V, E)$ ребра $e \in E$ перенумеруем числами $t = t(e) = \overline{1,m}$, $m = |E|$. Для каждого ребра $e_t \in E$ определим первый и второй вес следующим образом:

$$\omega_1(t) = 2^t,\ \omega_2(t) = r_0 - \omega_1(t),\ t = t(e) = \overline{1,m}, \quad m = |E|, \quad r_0 = 2^{m+1}. \qquad (4)$$

Взвешивание (4) обеспечивает равные суммы первых весов ребер только для совпадающих по множеству ребер подграфов. Поэтому выделенные на первом этапе решения задач $Z_{\gamma_1,3}, \gamma_1 = 1,2$ попарно различные подграфы $X_{\gamma_1} = \{x_{\gamma_1}{}^\mu\}$, $|X_{\gamma_1}| = M$, $\mu = \overline{1,M}$ не имеют совпадающих значений по критерию (2).

Первой из выделенного класса рассмотрим задачу $Z_{1,3}$ «об остовных деревьях и минимаксном ребре».

Изучим структуру МДР $X_{1,3}$, ПМ $\tilde{X}_{1,3}$ и ПМА $X^0_{1,3}$ с критериями (1)-(3) при $\gamma_1 = 1$. Мощность МДР $X_{1,3}$ задачи $Z_{1,3}$ определяется мощностью МДР X_1 задачи Z_1, которая решается на первом этапе алгоритма α. Множество $X_1 = \{x_1{}^\mu\}$ объединяет остовные деревья $x_1^\mu = (V, E_1^\mu)$, $E_1^\mu = n-1$, $\mu = \overline{1,M}$ n-вершинного графа $G = (V, E)$, $|E| = m$, $E_1^\mu \subset E$, $n - 1 \le m$. Максимальная мощность МДР достигается на полном графе и определяется формулой Кэли n^{n-2} [4].

Сформируем разбиение МДР $X_{1,3} = \{x_1{}^\mu\}$, $x_1^\mu = (V, E_1^\mu)$ на подмножества $X^i{}_{1,3}$, $i = 1,(m-n+2)$ по признаку «наименьший номер $t(e)$ ребра $e \in E_1^\mu$», $X_{1,3} = \bigcup\limits_{i=1,(m-n+2)} X^i{}_{1,3}$, $X^i{}_{1,3} \bigcap X^j{}_{1,3} = \varnothing$, $i \ne j$, $1 \le i \le m-n+2$, $1 \le j \le m-n+2$. Согласно взвешиванию (4), на элементах подмножества $X^i{}_{1,3}$ целевая функция $F(x_1{}^\mu)$ будет принимать различные значения по критерию $F_1(x_1{}^\mu)$. Ребра каждого остовного дерева подмножества $X^i{}_{1,3}$, $1 \le i \le (m-n+2)$ упорядочим «по возрастанию номеров $t(e)$ ребер $e \in E_1^\mu$» на позициях от 1 до $n-1$. Пусть решения $x_1^\varsigma = (V_1^\varsigma, E_1^\varsigma)$ и $x_1^\nu = (V_1^\nu, E_1^\nu)$ отличаются только ребрами e_{t_ς} и e_{t_ν} на $n-1$ позиции с наибольшими номерами t_ς и t_ν при $1 \le t_\nu < t_\varsigma \le M$, т.е. $E_1{}^\varsigma \setminus e_{t_\varsigma} = E_1{}^\nu \setminus e_{t_\nu}$. Согласно взвешиванию (4), $\omega_1(e_{t_\varsigma}) > \omega_1(e_{t_\nu})$, что означает $F_1(x_1{}^\varsigma) > F_1(x_1{}^\nu)$.

Согласно правилам формирования подмножества $X^i{}_{1,3}$, на его элементах целевая функция $F(x_1{}^\mu)$ будет принимать совпадающие значения по критерию $F_3(x_1^{\mu})$ (3). Ребро, занимающее первую позицию, имеет наименьший номер $t(e)$ и максимальный вес ω_2. Следовательно, по критерию (3) решения x_1^{ς} и x_1^{ν} совпадают $F_4(x_1^{\varsigma}) = \omega_2(e_{\max}{}^{\varsigma}) = F_4(x_1^{\nu}) = \omega_2(e_{\max}{}^{\nu})$. Решением, которое может войти в ПМ, является только одно из двух, а именно x_1^{ς}. Таким образом, справедливо неравенство $\left|\tilde{X}_{1,3}\right| < \left|X_{1,3}\right|$.

Для каждого подмножества $X^{i}{}_{1,3}$ определим единственное решение x_1^{i}, отвечающее критериям (2) и (3). Из множества решений $\{x_1^{i}\}, i = 1,(m-n+2)$ выделим ПМ. Является справедливым неравенство $\left|\tilde{X}_{1,3}\right| \le m-n+2$. Очевидно выполнение равенства мощностей ПМ и ПМА $\left|\tilde{X}_{1,3}\right| = \left|X^0_{1,3}\right|$. Следовательно, можно утверждать, что для задачи $Z_{1,3}$ в постановке (1)-(3) при $\gamma_1 = 1$ выполняется соотношение квазиполноты $\left|\tilde{X}_{1,3}\right| = \left|X^{0}{}_{1,3}\right| < \left|X_{1,3}\right|$. Заметим, что при частном случае взвешивания (4) обеспечивается единственность решения ПМ и ПМА $\left|\tilde{X}_{1,4}\right| = \left|X^{0}{}_{1,4}\right| = 1$. Действительно, в остовном дереве x_1^{μ} критерий $F_3(x_1^{\mu})$ определяется «наименьшим номером $t(e)$ ребра $e \in E_1^{\mu}$». Но это означает, что для выполнения условия максимального значения критерия $F_1(x_1^{\mu})$, ребро с наибольшим номером принадлежит множеству E_1^{μ} обязательно.

Делаем вывод, что является справедливой

Теорема 1. Задача $Z_{1,3}$ «об остовных деревьях и минимаксном ребре» на n-вершинном графе $G = (V, E)$, $|E| = m$ с векторной целевой функцией (1)-(3) для $\gamma_1 = 1$ является квазиполной, т.е. выполняется соотношение квазиполноты $\left|\tilde{X}_{1,3}\right| = \left|X^{0}{}_{1,3}\right| < \left|X_{1,3}\right|$. Причем мощность МДР не превышает количества остовных деревьев в полном n-вершинном графе $\left|X_{1,3}\right| \le n^{n-2}$, а для мощностей ПМ и ПМА неравенство выполняется $\left|\tilde{X}_{1,3}\right| = \left|X^{0}{}_{1,3}\right| \le m-n+2$.

Рассмотрим задачу $Z_{2,3}$ «о совершенном паросочетании в двудольном графе и минимаксном ребре» в постановке (1)-(3) при $\gamma_1 = 2$. Для анализа структуры МДР $X_{2,3}$, ПМ $\tilde{X}_{2,3}$ и ПМА $X^0_{2,3}$ повторим принятый выше ход рассуждений. Мощность МДР задачи $Z_{2,3}$ определяется мощностью множества допустимых решений задачи Z_2, т.е. количеством совершенных паросочетаний $x_2^{\mu} = (V, E_2^{\mu})$, $\left|E_2^{\mu}\right| = n/2$ на двудольном графе $G = (V, E), V = V_1 \cup V_2$, $|E| = m$, $|V_1| = |V_2| = n/2$, $E_2^{\mu} \subset E$. Количество совершенных паросочетаний на двудольном графе G определяется перманентом матрицы смежностей двудольного графа $perA_{n\times n}$. Максимальная мощность МДР достигается на полном графе G при $|E| = m = \left(n/2\right)^2$ и определяется формулой $\left(n/2\right)!$ [6].

Сформируем разбиение МДР $X_{2,3} = \{x_2^{\mu}\}$, $x_2^{\mu} = (V, E_2^{\mu})$ на подмножества $X^i{}_{2,3}$, $i = \overline{1, \frac{n}{2}}$ по признаку «наименьший номер $t(e)$ ребра $e \in E_2^{\mu}$», $X_{2,3} = \bigcup\limits_{i=1,(m-n+1)} X^i{}_{2,3}$, $X^i{}_{2,3} \bigcap X^j{}_{2,3} = \varnothing$, $i \neq j$, $1 \le i \le m - n/2 + 1$, $1 \le j \le m - n/2 + 1$. На элементах подмножества $X^i{}_{2,3}$ целевая функция $F(x_2^{\mu})$ будет принимать различные значения по критерию $F_2(x_2^{\mu})$. Упорядочим ребра каждого совершенного паросочетания множества $X_2 = \{x_2^{\mu}\}$ на позициях от 1 до $n/2$. Два совершенных паросочетания $x_2^{\varsigma} = (V, E_2^{\varsigma})$ и $x_2^{\nu} = (V, E_2^{\nu})$ могут отличаются минимум двумя парами ребер, стоящими на двух предпоследних позициях $n/2 - 1$ и $n/2$. Согласно взвешиванию (4), будет выполняться одно из неравенств $F_2(x_2^{\varsigma}) > F_2(x_2^{\nu})$ или $F_2(x_2^{\varsigma}) < F_2(x_2^{\nu})$. По правилам построения подмножества $X^i{}_{2,3}$ целевая функция $F(x_2^{\mu})$ будет принимать совпадающие значения по критерию $F_3(x_2^{\mu})$, т.е. выполняется соотношение $F_3(x_2^{\varsigma}) = \omega_2(e_{\max}{}^{\varsigma}) = F_3(x_2^{\nu}) = \omega_2(e_{\max}{}^{\nu})$. Решением, которое может войти в ПМ, является только одно из двух. Таким образом, справедливо неравенство $|\tilde{X}_{2,3}| < |X_{2,3}|$. Для каждого подмножества $X^i{}_{2,3}$ определим единственное решение x_2^i. Из множества решений $\{x_2^i\}, i = \overline{1, \frac{n}{2}}$ выделим ПМ. Выполняется неравенство $|\tilde{X}_{2,3}| \le n/2$. Равенство мощностей ПМ и ПМА $|\tilde{X}_{2,3}| = |X^0_{2,3}|$ справедливо. Следовательно, можно утверждать, что для задачи $Z_{2,3}$ в постановке (1)-(3) при $\gamma_1 = 3$ выполняется соотношение квазиполноты $|\tilde{X}_{2,3}| = |X^0{}_{2,3}| < |X_{2,3}|$.

Справедлива следующая

Теорема 2. Задача $Z_{2,3}$ «о совершенном паросочетании в двудольном графе и минимаксном ребре» на двудольном графе $G = (V, E), V = V_1 \cup V_2$, $|E| = m$, $|V_1| = |V_2| = n/2$ с векторной целевой функцией (1)-(3) при $\gamma_1 = 2$ является квазиполной, т.е. выполняется соотношение квазиполноты $|\tilde{X}_{2,3}| = |X^0{}_{2,3}| < |X_{2,3}|$. Причем мощность МДР не превышает количества совершенных паросочетаний на полном на двудольном графе $\left|X_{2,3}\right| \le (n/2)!$, а мощности ПМ и ПМА имеют верхнюю границу $\left|\tilde{X}_{2,3}\right| = \left|X^0{}_{2,3}\right| \le n/2$.

Обобщим полученные результаты.

Теорема 3. Двукритериальная задача $Z_{\gamma_1,3}$ с векторной целевой функцией (1)-(3), допустимое решение которой по критерию γ_1 имеет постоянное число ребер, является квазиполной, т.е. справедливо соотношение $\left|X^0{}_{\gamma_1,3}\right| = \left|\tilde{X}_{\gamma_1,3}\right| < \left|X_{\gamma_1,3}\right|$. Мощность МДР $X_{\gamma_1,3}$ определяется мощностью МДР задачи Z_{γ_1}. ПМ совпадает с ПМА. Мощность ПМ и ПМА определяется количеством классов разбиения МДР по признаку «наибольший второй вес ребра». Верхней границей мощностей ПМ и ПМА является количество ребер графа G.

Рассмотрим алгоритм решения задачи $Z_{1,3}$, который имеют полиномильную сложность. На первом этапе ребра упорядочиваются по значению второго веса $\omega_2(e)$, $e \in E$, $|E| = m$ за $O(m\log(m))$ операций. Далее повторяем $|E| = m$ раз процедуру построения максимального остовного дерева алгоритмом Краскала ($O(m\log(m))$) с использованием первых весов ребер $\omega_1(e)$ при условии обязательного наличия ребра, очередного в массиве, упорядоченном на первом этапе [3]. Из полученных решений формируем ПМ $\tilde{X}_{1,3}$ за $O(m)$ операций. Алгоритм решения задачи $Z_{1,3}$ имеет вычислительную сложность $O(m\log(m))(1+m) + O(m) < O(m^4)$.

Аналогично для решения задачи $Z_{2,3}$: $|E|$ раз повторяется процедура построения совершенных паросочетаний на двудольном графе алгоритмом с вычислительной сложностью $O(n^3)$ [3]. Алгоритм решения задачи $Z_{2,3}$ имеет вычислительную сложность $O(n\log(n)) + |E|O(n^3) < O(n^5)$.

Выводы. В статье сформулирована теорема о квазиполноте двухкритериальных задач, имеющих постоянное число ребер допустимого решения по первому критерию, целевая функция которых содержит критерий веса и критерий минимаксного ребра. Сформирована методика изучения свойств и оценки мощностей допустимого множества решений, паретовского множества и полного множества альтернатив для задач выделенного класса. Получены оценки для двух представителей этого класса: «об остовном дереве и минимаксного ребре», «о совершенном паросочетании на двудольном графе и минимаксном ребре». Предложены полиномиальные алгоритмы решения этих задач с оценкой вычислительной сложности.

Библиографические ссылки

1. **Pareto V**. Manuel d’economic politique . Giard. Paris, 1909.

2. **Емеличев, В.А.** Сложность дискретных многокритериальных задач [Текст] / В.А.Емеличев, В.А. Перепелица // Дискретная математика. – 1994. – Вып.1(6). – С.3–33.
3. **Кормен, Т. Х.**. Алгоритмы: построение и анализ [Текст] / Т. Х. Кормен, Ч. И. Лейзерсон, Р. Л. Ривест, К. Штайн . — М.: Вильямс, 2005. — 1296 с.
4. **Перепелица, В.А**. Многокритериальные модели и методы для задач оптимизации на графах [Текст] / В.А. Перепелица. — Saarbrücken : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2013. – 337с.
5. **Перепелица, В.А.** О полных и квазиполных двухкритериальных задачах на графах [Текст] / В.А. Перепелица, Э.В. Терещенко // Кибернетика и системный анализ. – 2018. – №3. – С.51–57.
6. **Перепелица, В.А.** Об одном классе многокритериальных задач на графах и гиперграфах [Текст] / В.А. Перепелица // Кибернетика. –1984. –№4. –С.62-67.
7. **Сергиенко В.А., Перепелица В.А.** К проблеме нахождения множеств альтернатив дискретных многокритериальных задач [Текст]/ В.А. Сергиенко, В.А. Перепелица // Кибернетика. –1987. –№5. –С.85-93.

Надійшла до редколегії 22.09. 2018.