УДК 519.8

О.В. Богомаз
Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

Исследуется существование решений задачи оптимального управления в коэффициентах эллиптических вариационных неравенств с условиями Неймана на границе области.

Досліджується існування розв'язків задачі оптимального керування в коефіцієнтах еліптичних варіаційних нерівностей з умовами Неймана на межі області.

The work is devoted to the researching the factual solutions to the optimal control problem in coefficients of elliptic variotional inequalities with Neyman's boundary conditions.

Ключевые слова: вариационные неравенства, соленоидальные управления, условия Неймана.

Введение. В данной работе рассматриваются проблемы существования решений для задач оптимального управления в коэффициентах эллиптических вариационных неравенств с условиями Неймана на границе области. Как показал Ф.Мюра в 1970 г. [1; 2] задача оптимального управления в коэффициентах соответствующих нелинейных уравнений не имеет решения в общем случае, что доказывает актуальность рассмотрения таких проблем.

Подобные задачи рассматривались в [4], но для краевой задачи с условиями Дирихле. Существенным отличием данной задачи от рассмотренной в [4] является специфика функциональных пространств, которым принадлежат допустимые решения таких задач. Базовым пространством будет декартово произведение $L^\infty(\Omega, R^{N\times N})\times H^1(\Omega)$, где Ω является открытым подмножеством R^N с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Как известно, пространство $\left(H^1(\Omega)\right)^*$ не вложено в пространство $H^{-1}(\Omega)$, поскольку оно представляет собой прямую сумму $H^{-1}(\Omega)\oplus\left(H^{1/2}(\partial\Omega)\right)^*$. Здесь через $H^{1/2}(\partial\Omega)$ обозначено пространство следов функций из $H^1(\Omega)$ на $\partial\Omega$. Таким образом, целью данной работы является доказательство разрешимости задачи оптимального управления в коэффициентах для эллиптических вариационных неравенств с условиями Неймана на границе на множестве обобщенно соленоидальных управлений.

Постановка задачи. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$L(U,y)=\|y-z_\partial\|_{L^2(\Omega)}\to\inf\ , \tag{1}$$

$$U\in L^\infty(\Omega,R^{N\times N}),\ U\in M_\alpha^\beta(\Omega),\ y\in K\ , \tag{2}$$

$$\langle -div(U(x)\nabla y)+y, v-y\rangle_V \ge \langle f, v-y\rangle_V\ ,\ \ \forall v\in K\ , \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial y}{\partial \upsilon_B}\right|_{\partial\Omega}=g\ , \tag{4}$$

где $V=H^1(\Omega)$, K – замкнутое выпуклое подмножество пространства V, $z_\partial\in L^2(\Omega)$, $g\in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ – заданные распределения, $f\in L^2(\Omega)$ – фиксированная функция, $\dfrac{\partial y}{\partial\upsilon_B}=\sum\limits_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\dfrac{\partial y}{\partial x_j}\cos(\upsilon,x_i)$, υ – вектор внешней нормали к границе области $\partial\Omega$.

Пусть α и β – постоянные, такие что: $0<\alpha\le\beta<+\infty$. Множество $M_\alpha^\beta(\Omega)$ является совокупностью всех симметричных матриц $U(x)=\{a_{ij}(x)\}_{1\le i,j\le N}$ в пространстве $L^\infty(\Omega,R^{N\times N})$ таких, что выполняются следующие условия:

$$|a_{ij}(x)|\le\beta\quad \text{п.в. в }\ \Omega,\forall i,j\in\{1,...,N\}, \tag{5}$$

$$\left(U(x)(\zeta-\eta),\zeta-\eta\right)_{R^N}\ge 0,\ \text{ п.в. в }\ \Omega,\forall\zeta,\eta\in R^N, \tag{6}$$

$$\left(U(x)\zeta,\zeta\right)_{R^N} = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\zeta_j\zeta_i \ge \alpha\|\zeta\|_2^2, \text{ п.в. в } \Omega, \|\zeta\|_2^2 = \left(\sum_{k=1}^{n}|\zeta_k|^2\right). \quad (7)$$

Введем в рассмотрение связанный с задачей (3) – (4) оператор

$$B:\ M_\alpha^\beta(\Omega)\times H^1(\Omega) \longrightarrow \left(H^1(\Omega)\right)^* = H^{-1}(\Omega)\oplus H^{-1/2}(\partial\Omega),$$

где

$$B(U,y) = B_1(U,y)\oplus B_2(U,y), \quad (8)$$

$$B_1(U,y) = -div\left(U(x)\nabla y\right) + y, \quad (9)$$

$$B_2(U,y) = \left(U(x)\nabla\gamma_0 y, \gamma_0 \upsilon\right)_{R^N}, \quad (10)$$

и соответствующую ему форму

$$\left\langle B(U,y),v\right\rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \left(U(x)\nabla y,\nabla v\right)_{R^N} dx + \int_\Omega yv dx, \ \forall y,v\in H^1(\Omega). \quad (11)$$

Здесь через $\gamma_0 y$ обозначен след функции $y\in H^1(\Omega)$ на $\partial\Omega$.

Тогда исходную задачу оптимального управления (1)-(4) можно представить в следующем виде:

$$L(U,y) = \int_\Omega \left|y(x) - z_\partial(x)\right|^2 dx \longrightarrow \inf, \quad (12)$$

$$\left\langle B_1(U,y), v-y\right\rangle_V \ge \left\langle f, v-y\right\rangle_V \text{ на } \Omega, \quad (13)$$

$$B_2(U,y) = g, \quad (14)$$

$$U\in M_\alpha^\beta(\Omega),\ \ y\in H^1(\Omega). \quad (15)$$

Предварительные результаты и вспомогательные факты. Приведем некоторые известные результаты, которые будут использоваться далее.

Лемма 1 [5] Для заданного управления $U\in M_\alpha^\beta(\Omega)$ оператор $B_U : V\to V^*$, определенный как

$$\left\langle B_U(y),v\right\rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \left[\left(U(x)\nabla y,\nabla v\right)_{R^N} + yv\right]dx, \quad (16)$$

является строго монотонным, коэрцитивным и деминепрерывным.

Теорема 1 [3] *Пусть V – гильбертово пространство, $K\subset V$ – замкнутое выпуклое подмножество. Предположим, что $A: K\to V^*$ – нелинейный оператор и f является заданным элементом V^*, где V^* – пространство, сопряженное с V. Тогда вариационное неравенство*

$$\left\langle A(y), v-y\right\rangle_V \ge \left\langle f, v-y\right\rangle_V, \ \ \forall v\in K, \quad (17)$$

имеет хотя бы одно решение $y\in K$ при выполнении следующих условий:

1. *оператор A является псевдомонотонным, т. е. выполняются условия:*

а) оператор A является ограниченным;

б) из того, что $y_k\to y$ слабо в V, $y_k, y\in K$ и $\limsup_{k\to\infty}\left\langle A(y_k), y_k - y\right\rangle_V \le 0$, следует выполнение неравенства

$$\liminf_{k\to\infty}\left\langle A(y_k), y_k - v\right\rangle_V \ge \left\langle A(y), y-v\right\rangle_V, \ \ \forall v\in V;$$

2. *оператор A является коэрцитивным, т. е. существует элемент $v_0\in K$ такой, что выполняется условие*

$$\frac{\left\langle A(v), v-v_0\right\rangle_V}{\|v\|_V} \to\infty \text{ при } \|v\|_V\to\infty,\ \ v\in K.$$

Теорема 2 [3] *Если оператор $A: K\to V^*$ в теореме 1 является строго монотонным на K, тогда вариационное неравенство (17) допускает не более одного решения.*

Следуя Лионсу [3], сделаем следующие предположения.

Предположение 1 Существует рефлексивное банахово пространство X, такое что $X\subset V^*$ непрерывно и X плотно в V^*.

Предположение 2 Найдется дуальное отображение $J: X\to X^*$ такое что $\forall y\in K, \forall\varepsilon>0$ существует $y_\varepsilon\in K$ такое, что $A(y_\varepsilon)\in K$ и $y_\varepsilon + \varepsilon J\left(A(y_\varepsilon)\right) = y$.

Теорема 3 [3] *Пусть выполняются предположения 1 и 2. Пусть оператор* $A: V \to V^*$ *монотонен, полунепрерывен, ограничен и удовлетворяет условию 1 теоремы 1. Тогда включение* $f \in X$ *влечет за собой выполнение условия* $A(y) \in X$ *для любого решения* y *вариационного неравенства (17).*

Лемма 2 [4] Пусть $\{f_k\}_{k\in N} \in L^2(\Omega)$, $\{g_k\}_{k\in N} \in L^2(\Omega)$ – последовательность вектор-функций таких, что $f_k \to f_0$ слабо в $L^2(\Omega)$ и $g_k \to g_0$ слабо в $L^2(\Omega)$. Предположим, что определенные последовательности удовлетворяют условиям:

1. $\{div\ f_k\}_{k\ge 1}$ – ограниченная последовательность в $L^2(\Omega)$;
2. $rot\ g_k = 0,\ \forall k \in N$.

Тогда, выполняется равенство

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \Phi\left(f_k, g_k\right)_{R^N} dx = \int_\Omega \Phi\left(f_0, g_0\right)_{R^N} dx,\ \forall \Phi \in C_0^\infty(\Omega). \tag{18}$$

Введем в рассмотрение следующий класс вектор-функций:

$$X(\Omega) = \left\{ U \in L^2(\Omega) \middle| \, divU \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Как известно, для произвольной пары функций $(U,v) \in X(\Omega) \times H^1(\Omega)$ справедливо соотношение (формула Стокса)

$$\int_\Omega \left[(U, \nabla v)_{R^n} + v divU \right] dx = \left\langle \gamma_U, \gamma_0 v \right\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}. \tag{19}$$

Разрешимость задачи оптимального управления. Пусть ξ_1, ξ_2 – заданные функции из $L^\infty(\Omega)$, удовлетворяющие условиям:

(i) $0 < \beta \le \xi_1(x) \le \xi_2(x)$ п.в. в Ω;

(ii) $\alpha = \|\xi_2\|_{L^\infty(\Omega)}$.

Пусть $\{Q_1, ..., Q_N\}$ - множество непустых компактных подмножеств в $H^{-1}(\Omega)$. Определим множество допустимых управлений как

$$U_{ad} = U_b \cap U_{sol} \subset L^\infty\left(\Omega, R^{N\times N}\right),$$

где

$$U_b = \left\{ U = \left[a_{ij}\right] \in M_\alpha^\beta(\Omega) \middle| \, \xi_1(x) \le a_{ij}(x) \le \xi_2(x) \text{ п.в. в } \Omega, \forall i,j = \overline{1,N} \right\}, \tag{20}$$

$$U_{sol} = \left\{ U = \left[\vec{a_1}, ..., \vec{a_N}\right] \in M_\alpha^\beta(\Omega) \middle| \, div\vec{a_i} \in Q_i,\ \forall i = \overline{1,N} \right\}. \tag{21}$$

Всюду далее предположим, что $U_{ad} \ne \varnothing$.

Определение 1 Будем говорить, что матрица $U = \left[a_{ij}\right]$ является допустимым управлением в задаче (12) – (15), если $U \in U_{ad}$.

Отметим, что U_{ad} не вложено ни в $W^{1,\infty}(\Omega)$, ни в $H^1(\Omega)$, но равномерно ограничено в $L^\infty(\Omega)$.

Обозначим через Ξ совокупность пар $(U,y) \in L_\infty^{N\times N}(\Omega) \times H^1(\Omega)$ таких, что $U \in M_\alpha^\beta(\Omega)$, $y = y(U)$ – функция из $H^1(\Omega)$, причем y и U связаны соотношениями (13) и (14). Далее Ξ будем называть множеством допустимых решений задачи оптимального управления (12) – (15).

Определение 2 Пару $\left(U^0, y^0\right)$ будем называть оптимальной для задачи (12) – (15), если $\left(U^0, y^0\right) \in \Xi$ и $L\left(U^0, y^0\right) = \inf_{(U,y)\in\Xi} L(U,y)$.

Определение 3 Задача оптимального управления (12) – (15) называется регулярной, если множество допустимых пар Ξ непусто.

Покажем, что задача (12)-(15) регулярна.

Пусть $U = \left[a_{ij}(x)\right]_{1\le i,j\le n} \in M_\alpha^\beta(\Omega)$ - произвольная матрица. Свяжем с ней следующее множество:

$$W_U(\Omega) = \left\{ y \in H^1(\Omega) \middle| \, div\left[U(x)\nabla y\right] \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Введем в рассмотрение оператор

$$B_U : W_U(\Omega) \to \left(H^1(\Omega)\right)^* ,$$

где $B_U(\cdot) = B(U,\cdot)$.

Применяя формулу Стокса (19) на $X(\Omega)\times H^1(\Omega)$, приходим к следующим преобразованиям:

$$\begin{aligned}
&\left\langle B_U(y),v\right\rangle_{H^1(\Omega)} = \left\langle B_{1,U}(y),v\right\rangle_{H^1(\Omega)} + \left\langle B_{2,U}(y),\gamma_0 v\right\rangle_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \\
&= \int_\Omega \left[-v div\left[U(x)\nabla y\right] + yv\right]dx + \left\langle \left(U(x)\nabla\gamma_0 y, v\right)_{R^N}, \gamma_0 v\right\rangle_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \\
&= \int_\Omega \left(U(x)\nabla y,\nabla v\right)_{R^N} dx - \left\langle \gamma_U,\gamma_0 v\right\rangle_{H^{1/2}(\partial\Omega)} + \int_\Omega yv dx + \left\langle \gamma_U,\gamma_0 v\right\rangle_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \\
&= \int_\Omega \left[\left(U(x)\nabla y,\nabla v\right)_{R^N} + yv\right]dx
\end{aligned}$$

для произвольных $y\in W_U(\Omega)$ и $v\in H^1(\Omega)$.

В результате, для заданного управления $U\in M_\alpha^\beta(\Omega)$ и произвольных $y,v\in W_U(\Omega)$ справедливо представление

$$\left\langle B_U(y),v\right\rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \left[\left(U(x)\nabla y,\nabla v\right)_{R^n} + yv\right]dx . \tag{22}$$

Лемма 3 [4] Для заданного управления $U\in M_\alpha^\beta(\Omega)$ оператор $B_U : V\to V^*$, имеющий представление (22), строго монотонен, коэрцитивен и деминепрерывен.

Утверждение 1 Для произвольных $f\in L^2(\Omega)$, $g\in\left(H^{1/2}(\partial\Omega)\right)^*$ задача оптимального управления (12) - (15) является регулярной.

Доказательство. Покажем, что Ξ является непустым множеством пространства $L^\infty\left(\Omega;R^{N\times N}\right)\times H^1(\Omega)$, то есть существует хотя бы одна пара $(U,y)\in\Xi$. Поскольку первое предположение теоремы 1 выполнено, то покажем справедливость второго.

Пусть $v_0\in K$ - фиксированный произвольный элемент и матрица $U\in M_\alpha^\beta(\Omega)$. Для всех $y\in K$ имеем:

$$\left\langle B_1(U,y),y-v_0\right\rangle_V \ge \left\langle B_1(U,y),y\right\rangle_V - \left|\left\langle B_1(U,y),v_0\right\rangle_V\right| = I_1 - |I_2| . \tag{23}$$

Используем следующие оценки:

$$I_1 = \int_\Omega \left(U(x)\nabla y,\nabla y\right)_{R^n}dx + \int_\Omega y^2 dx \ge \xi_1(x)\|\nabla y\|^2_{L^2(\Omega)} + \beta\|y\|^2_{L^2(\Omega)} \ge \beta\|y\|^2_{H^1(\Omega)} .$$

$$\begin{aligned}
|I_2| &= \left|\int_\Omega \left(U(x)\nabla y,\nabla v_0\right)_{R^n} dx + \int_\Omega yv_0 dx\right| \le \{из\ (5)\} \le \left|\int_\Omega yv_0 dx\right| + \\
&+\beta\left|\int_\Omega \left(\nabla y,\nabla v_0\right)_{R^N} dx\right| \le \beta\|\nabla v_0\|_{L^2(\Omega)}\left(\int_\Omega \nabla y^2 dx\right)^{1/2} + \|y\|_{L^2(\Omega)}\|v_0\|_{L^2(\Omega)} \le \\
&\le \beta\|y\|_{L^2(\Omega)}\left(\|\nabla v_0\|_{L^2(\Omega)} + \|v_0\|_{L^2(\Omega)}\right) + \|y\|_{L^2(\Omega)}\left(\|v_0\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v_0\|_{L^2(\Omega)}\right) \le \\
&\le \beta\|v_0\|_V\|y\|_V + \|v_0\|_V\|y\|_V \le \max\{\beta,1\}\|v_0\|_V\|y\|_V
\end{aligned} \tag{24}$$

Из (23) и (24) следует выполнение условия:

$$\begin{aligned}
\frac{\left\langle B(U,y),y-v_0\right\rangle_V}{\|y\|_V} &\ge \beta\|y\|^2_V - \max\{\beta,1\}\|v_0\|_V\|y\|_V = \\
&= \|y\|_V\left(\min\{\alpha,1\} - \frac{\max\{\beta,1\}\|v_0\|_V}{\|y\|_V}\right) \to \infty,
\end{aligned}$$

при $\|y\|_V\to\infty$. Таким образом, для каждого допустимого управления существует решение задачи (13) – (15).

Теперь необходимо проверить будет ли это решение элементом множества $W_U(\Omega)$. Учитывая, что $f\in L^2(\Omega)$ и, применяя теорему 3, имеем: $B_1(U,y)\in L^2(\Omega)$. Отсюда следует, что решение задачи (13) –

(15) будет всегда элементом множества $W_U(\Omega)$. Следовательно, $(U,y)\in\Xi\subset U_{ad}\times W_U(\Omega)$, что и необходимо было показать.

Утверждение 2 [4] Множество U_{sol} – секвенциально компактно относительно *-слабой топологии пространства $L^\infty\left(\Omega,R^{N\times N}\right)$.

В пространстве $L^\infty\left(\Omega,R^{N\times N}\right)\times H^1(\Omega)$ обозначим через топологию τ произведение *-слабой топологии $L_\infty^{N\times N}(\Omega)$ и топологии слабой сходимости в $H^1(\Omega)$.

Согласно утверждения 1 множество допустимых пар в задаче (12) – (15) удовлетворяет условию $\Xi\subset L^\infty\left(\Omega;R^{N\times N}\right)\times W_U(\Omega)$, тогда для каждого управления $U\in M_\alpha^\beta(\Omega)$ дуальное спаривание $\left\langle B_U(y),v\right\rangle_{H^1(\Omega)}$ может быть представлено в виде (22). Применяя теорему 4.1 из [4], получим следующий результат.

Теорема 4 *Пусть* $K\subset \mathrm{V}$ *выпуклое замкнутое подмножество пространства* $H^1(\Omega)$*, тогда для произвольных* $f\in L^2(\Omega)$, $g\in\left(H^{1/2}(\partial\Omega)\right)^*$ *множество* Ξ *задачи (12) – (15) является секвенциально* τ*-замкнутым в пространстве* $L^\infty\left(\Omega,R^{N\times N}\right)\times H^1(\Omega)$.

Теорема 5 *Задача оптимального управления (12) – (15) допускает, по крайней мере, одно решение* $\left(U^{opt},y^{opt}\right)\in\Xi\subset L^\infty\left(\Omega,R^{N\times N}\right)\times H^1(\Omega)$ *для любых* $f\in L^2(\Omega)$ *и* $g\in\left(H^{1/2}(\partial\Omega)\right)^*$.

Доказательство. Учитывая, что $\Xi\neq\varnothing$, имеем: существует минимизирующая последовательность $\left\{(U_k,y_k)\in\Xi\right\}_{k\in N}$, т. е.

$$\lim_{k\to\infty}L(U_k,y_k)=\inf_{(U,y)\in\Xi}L(U,y)<+\infty .$$

Учитывая, что последовательность допустимых управлений $\left\{U_k\in U_{ad}\right\}_{k\in N}$ ограничена в пространстве $L^\infty\left(\Omega,R^{N\times N}\right)$ и следуя теореме 4.1 из [4] можно показать, что минимизирующая последовательность $\left\{(U_k,y_k)\right\}$ ограничена в $L^\infty\left(\Omega,R^{N\times N}\right)\times H^1(\Omega)$. Применяя теорему Банаха-Алаоглу и переходя к подпоследовательности в случае необходимос-ти, имеем: $U_k\to U^*$ *-слабо в $L^\infty\left(\Omega,R^{N\times N}\right)$ и $y_k\to y^*$ слабо в $H^1(\Omega)$. Согласно теоремы 4, пара $\left(U^*,y^*\right)$ является допустимой в задаче (12) – (15). Вследствие свойства полунепрерывности снизу функционала L относительно топологии τ в пространстве $L^\infty\left(\Omega,R^{N\times N}\right)\times H^1(\Omega)$ имеем:

$$L\left(U^*,y^*\right)\le\lim_{k\to\infty}\inf L(U_k,y_k)=\inf_{(U,y)\in\Xi}L(U,y).$$

Откуда немедленно следует оптимальность пары $\left(U^*,y^*\right)$ в задаче (12) – (15). Теорема доказана.

Выводы. Используя методы вариационного исчисления и лемму о компенсированной компактности Тартара, получены условия, гарантирующие разрешимость задачи оптимального управления в коэффициентах эллиптических вариационных неравенств с условиями Неймана на границе области в классе обобщенных соленоидальных управлений.

Библиографические ссылки

1. **Murat F.** Un contre-exemple pour le prolème de contrôle dans les coefficients// C.R.A.S. Paris, Ser. A 273 (1971), 708-711.
2. **Murat F.** Téorèmes de non-existence pour des prolème de contrôle dans les coefficients// C.R.A.S. Paris, Ser. A 274 (1972), 395-398.
3. **Lions J.-L**. Some methods of Solving Non-Linear Boundary Value Problems. Dunod-Gauthier-Villars, Paris, 1969.
4. **Kogut O. P.** On optimal control problem in coefficients for nonlinear elliptic variational inequalities /O.P.Kogut// Вісник Дніпропетр. ун-ту, Серія: «Моделювання» – 2011. – Т.19, № 8. – С. 86-99.
5. **Когут О.П.** Оптимізація в нелінійних еліптичних крайових задачах Монографія / О.П. Когут, П.І. Когут, О.А. Рядно. – Дніпропетровськ, 2010. – 236 с.

Надійшла до редколегії 6.06.2012