УДК 519.622.2 doi: 0.15421/321802

**Н.В. Варех, О.Я. Вольфсон, О.А. Падалка**
*Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара*

# ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕДІНКИ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ З ВІДХИЛЕННЯМ АРГУМЕНТУ

**В даній статті розглядаються системи диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу з нелінійністю загального вигляду в кожному рівнянні. Досліджуються асимптотичні властивості розв'язків систем з парною та непарною кількістю рівнянь на нескінченному інтервалі часу.**
**Ключові слова: диференціальне рівняння, відхилення аргументу, нескінченний інтервал часу, асимптотичні властивості.**

**В данной статье рассматриваются системы дифференциальных уравнений с отклонением аргумента с нелинейностью общего вида в каждом уравнении. Исследуются асимптотические свойства решений систем с четным и нечетным количеством уравнений на бесконечном интервале времени.**
**Ключевые слова: дифференциальное уравнение, отклонения аргумента, бесконечный интервал времени, асимптотические свойства.**

**A lot of natural processes can not only depend on the present state but also on past state. These processes were described with differential equations with delayed argument. These equations are the special case of differential equations with the deviating argument (functional differential systems). In this work, a functional differential system with another type of nonlinearity comparatively with work [1] is observed. Odd or even number of equations, type of non-linearity of functions $f_i(u)$ and type of arguments deviation have a great influence on asymptotic behavior of system's solution. Particular case of this system is a scalar equation: $y^{(n)}(t)+\delta p(t)y^{\alpha}(\tau(t))=0(\delta<0)$. This equation was an object of many investigations. As a result of these investigations, it was proven that asymptotic behavior of solutions of this equation depends on the sign of $\delta$ and on type of nonlinearity: $0<\alpha<1$ means sublinear type, $\alpha=1$ means linear type, $\alpha>1$ means super-linear type). In the case for $\delta=1$ and each state of $\alpha$ it was proven that under the same conditions for even $n$ solutions are oscillated and for odd $n$ solutions are oscillated or monotonously tend to the zero with derivatives up to $n-1$ order. In case of $\delta=-1$ same condition guaranties for even $n$ that solutions are oscillated or monotonously tend to the zero or infinity with derivatives up to $n-1$ order and for odd $n$ solutions are oscillated or monotonously tend to the infinity. The next step is generalization for systems with odd or even count of equations. In work [1] results were obtained for systems in sublinear case. In this work, the results for systems with odd or even count of equations in case when $\delta=-1$ and with more general types of nonlinearity are generalized. An example that demonstrates optimality of obtained results was built.**
**Keywords: differential equation, deviating argument, infinite time interval, asymptotic behavior.**

**Вступ.** Дану роботу слід розглядати продовженням досліджень, проведених в роботі [1].

В роботі [1] проводилось дослідження асимптотичних властивостей розв'язків на нескінченному інтервалі одного класу систем з відхиленням аргументу:

$$\begin{cases} y_i'(t) = a_i(t) f_i\left(y_{i+1}\left(\tau_{i+1}(t)\right)\right); \\ y_n'(t) = a_n(t) f_n\left(y_1\left(\tau_1(t)\right)\right); \end{cases} i = \overline{1, n-1} (1),$$

де $0 \le a_i(t) \in C[t_0;\infty], f_i(u), i = \overline{1,n}$ – неперервні, неспадні функції.

**Постановка задачі.** Розглянемо систему (1), яка досліджується при іншому типі нелінійностей функцій

$$f_i(u): f_n f_1 f_2 ... f_{n-1}(u) = u(u \ne 0)$$

Суттєво різними є випадки системи з парною і непарною кількістю рівнянь.

Розглянемо системи з п'ятьма рівняннями і чотирма.

**Метод розв'язання та аналіз одержаних результатів.** Наведемо дві теореми, які встановлюють асимптотичні властивості розв'язків системи (1) при парній кількості та непарній кількості рівнянь.

**Теорема 1.**

Нехай при $n = 4$ виконуються умови:

1. $g(t) = \min\{\tau_1, t\}, \tau_i(t) \le t, i = 2,3,4;$

2. $\int\limits_{t_0}^{\infty} a_1(t)dt = \int\limits_{t_0}^{\infty} a_2(t)dt = \int\limits_{t_0}^{\infty} a_3(t)dt = \infty$;

3. $\int\limits_{t_0}^{\infty} a_4(p) f_4\left(\int\limits_{t_0}^{\tau_1(p)} a_1(z) f_1\left(\int\limits_{t_0}^{\tau_2(z)} a_2(s) f_2\left(\int\limits_{t_0}^{\tau_3(s)} a_3(x)dx\right)ds\right)dz\right)dp = \infty$;

4. $\int\limits_{t_0}^{\infty} a_1(x) f_1\left(\int\limits_{x}^{cx} a_2(z) f_2\left(\int\limits_{z}^{cz} a_3(p) f_3\left(\int\limits_{p}^{cp} a_4(s)dp\right)dz\right)dx\right) = \infty$;

5. $\int\limits_{t_0}^{\infty} a_4(p)\left[f_4\left(\int\limits_{t_0}^{g(p)} a_1(z) f_1\left(\int\limits_{t_0}^{\tau_2(z)} a_2(x) f_2\left(\int\limits_{t_0}^{cx} a_3(s)ds\right)dx\right)dz\right)\right]^{1-\varepsilon} dp = \infty (0 < \varepsilon < 1)$.

Тоді кожний розв'язок системи (1) або сильно осцилює, або кожна компонента прямує або до нуля, або до нескінченності при $t \to \infty$.

**Доведення.**

Якщо розв'язок системи (1) $y(t) = \{y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t)\}$ сильно осцилює, то теорему доведено. Припустимо супротивне. Нехай система (1) має розв'язок, який не є сильно осцилюючим, тобто хоча б одна компонента не осцилює. Тоді, усі $y_i(t), i=\overline{1,n}$ не є осцилюючими, а отже, починаючи з деякого $t$ зберігають свій знак.

Для визначеності $y_1(t)>0$, тоді $f_4\left(y_1\left(\tau_1(t)\right)\right)>0$ для $\forall t_1 : t \geq t_1$.

З четвертого рівняння системи маємо, що $y_4'(t)>0$ – монотонно зростає, тоді маємо два варіанта: $y_4(t)>0$ або $y_4(t)<0$.

**Випадок 1.** $y_4(t)>0.$

Тоді $\exists t_2 : t_2 \geq t_1; t \geq t_2 f_3\left(y_4(t)\right) \geq f_3\left(y_4(t_1)\right) = C_1$

З третього рівняння системи (1) маємо:

$$y_3'(t) = a_3(t) f_3\left(y_4(t)\right) \geq a_3(t) f_3\left(y_4(t_1)\right) = C_1 a_3(t).$$

Проінтегруємо:

$$y_3(t) - y_3(t_2) \geq C_1 \int_{t_2}^{t} a_3(t)\,dt.$$

Враховуючи умову 2 цієї теореми, маємо $\lim\limits_{t\to\infty} y_3(t)$.

Аналогічно в результаті послідовних інтегрувань доведемо, що $\lim\limits_{t\to\infty} y_2(t)=\infty, \lim\limits_{t\to\infty} y_1(t)=\infty$.

З перших двох рівнянь маємо:

$$y_1\left(\tau_1(t)\right) > C \int_{t_2}^{\tau_1(t)} a_1(z) f_1\left(\int_{t_2}^{t} a_2(s) f_2\left(\int_{t_2}^{t} a_2(x)dx\right)ds\right)dz.$$

Враховуючи це, з четвертого рівняння системи (1) в результаті послідовних інтегрувань, маємо:

$$y_4(t) - y_4(t_2) > C \int_{t_2}^{\infty} a_4(p) f_4\left(\int_{t_2}^{\tau_1(t)} a_1(z) f_1\left(\int_{t_2}^{t} a_2(s) f_2\left(\int_{t_2}^{t} a_2(x)dx\right)ds\right)dz\right)dp.$$

Враховуючи умови теореми: $\lim\limits_{t\to\infty} y_4(t)=\infty$.

**Випадок 2.** $y_4(t)<0.$

Тоді з третього рівняння системи (1) маємо, що $y_3'(t)<0$, тобто $y_3(t)$ монотонно спадаюча.

Тоді маємо два випадки: або $y_3(t)<0$, або $y_3(t)>0$.

**2.1** Нехай $y_3(t)<0.$

Тоді:

$$f_2\left(y_3(t)\right) < f_2\left(y_3(t_4)\right) = -C_1, C_1>0, t \geq t_4.$$

Враховуючи друге та перше рівняння системи (1) після послідовних інтегрувань отримаємо:

$$y_1(t)-y_1(t_5)\le -C\int_{t_5}^{t}a_1(t)dt.$$

При $t\to\infty, y_4(t)<0$, що суперечить припущенню.

**2.2** $y_3(t)>0.$

З другого рівняння системи (1) маємо: $y_2'(t)>0$, $y_2(t)$- монотонно зростає. Тоді або $y_2(t)<0$ або $y_2(t)>0$.

**2.2.а** Нехай $y_2(t)<0.$

Тоді $y_1(t)$ – монотонно спадна додатна функція. Доведемо, що в цьому випадку кожна компонента розв'язку $y(t)=\{y_1(t),y_2(t),y_3(t),y_4(t)\}$ прямує до нуля при $t\to\infty.$

З системи (1) випливає:

$y_1(t),y_3(t)$ – монотонно спадні додатні;

$y_2(t),y_4(t)$ – монотонно зростаючі від'ємні.

Покажемо, що $\lim\limits_{t\to\infty}y_2(t)=0$ Припустимо супротивне: $\lim\limits_{t\to\infty}y_2(t)=-C(C\ne 0)$.

Використаємо означення границі функції:

$$\left|y_2(t)+C\right|<\varepsilon, t\ge t_3.$$

Нехай $\varepsilon=\dfrac{c}{2}$, тоді: $\dfrac{-c}{2}<y_2(t)+C<\dfrac{c}{2}$,

$$\frac{-3}{2}C<y_2(t)<-\frac{1}{2}C.$$

З першого рівняння системи (1) після інтегрування випливає:

$$y_1(t)-y_1(t_3)\ge -\frac{C}{2}\int_{t_3}^{t}a_1(t)dt.$$

При $t\to\infty, y_1\to-\infty, y_1(t)<0$, що суперечить припущенню, а отже $\lim\limits_{t\to\infty}y_2(t)=0.$

Аналогічно можна показати, що $\lim\limits_{t\to\infty}y_3(t)=\lim\limits_{t\to\infty}y_4(t)=0.$

Покажемо, що $\lim\limits_{t\to\infty}y_1(t)=0,$ де $y_1(t)$ монотонно спадна додатна функція. Від супротивного: $\lim\limits_{t\to\infty}y_1(t)=m(m>0)$.

Знову використаємо означення границі:

$$\left|y_1(t)-m\right|<\varepsilon.$$

Покладемо $\varepsilon=\dfrac{m}{2}$. Тоді:

$$\frac{m}{2} < y_1\left(\tau_1\left(t\right)\right) < \frac{3}{2}m,$$

$$f_1\left(\frac{m}{2}\right) < f_4\left(y_1\left(\tau_1\left(t\right)\right)\right) < f_1\left(\frac{3}{2}m\right),$$

$$f_1\left(\frac{m}{2}\right) = k.$$

Підставимо це у четверте рівняння системи (1):

$$y_4'\left(t\right) \geq a_4\left(t\right)k.$$

З першого, другого та третього рівнянь після послідовних інтегрувань отримаємо

$$y_1\left(t\right) - y_1\left(t_8\right) > \int_{t_8}^{t} a_1\left(x\right) f_1\left(-c\int_{t}^{2t} a_2\left(z\right) f_2\left(\int_{z}^{2z} a_3\left(t\right) f_3\left(\int_{p}^{2p} a_4\left(s\right)ds\right)dp\right)dz\right)dx.$$

Оскільки $y_1\left(t\right)$– монотонна спадна додатна функція, то виникає суперечність. Отже, $\lim\limits_{t\to\infty} y_1\left(t\right) = 0$.

**2.2.б** $y_2\left(t\right) > 0$.

З першого рівняння системи (1) випливає, що $y_1(t)$– монотонно зростаюча додатна функція. Враховуючи це, після послідовних інтегрувань третього, другого та першого рівнянь отримаємо

$$y_1\left(t\right) \geq y_4\left(2t\right)\int_{t_1}^{t} a_1\left(z\right) f_1\left(\int_{t_1}^{t} a_2\left(x\right) f_3\left(\int_{x}^{2x} a_3\left(s\right)ds\right)dx\right)dz.$$

Оскільки $y_1(t)$– монотонно зростає, то:

$$y_1\left(t\right) \geq y_1\left(\frac{t}{2}\right) \geq -y_4\left(t\right)\int_{t_1}^{\frac{t}{2}} a_1\left(z\right) f_1\left(\int_{t_1}^{t} a_2\left(x\right) f_3\left(\int_{x}^{2x} a_3\left(s\right)ds\right)dx\right)dz.$$

Звідси, враховуючи монотонне зростання $y_1\left(t\right)$, а також те, що $g\left(t\right) \leq \tau\left(t\right)$; $g\left(t\right) \leq t; g\left(t\right) = \min\left\{t; \tau\left(t\right)\right\}$, $-y_4\left(g\left(t\right)\right) \geq -y_4\left(t\right)$ отримаємо:

$$y_1\left(\tau\left(t\right)\right) \geq -Tf_1 f_2 f_3\left(y_4\left(t\right)\right)\int_{t_1}^{g(t)/c} a_1\left(z\right) f_1\left(\int_{t_1}^{t} a_2\left(x\right) f_3\left(\int_{x}^{2x} a_3\left(s\right)ds\right)dx\right)dz.$$

Оскільки $y_1\left(t\right) > 0$ $y_1\left(t\right)$ – зростає, то

$$f_4\left(y_1\left(\tau_1\left(t\right)\right)\right) > K,$$

$$\frac{f_4\left(y_1\left(\tau\left(t\right)\right)\right)}{K} \geq 1.$$

За властивістю дробового степеню, можемо записати

$$\frac{f_4\left(y_1\left(\tau\left(t\right)\right)\right)}{K} \geq \left[\frac{f_4\left(y_1\left(\tau\left(t\right)\right)\right)}{K}\right]^{1-\varepsilon}.$$

Тоді з останнього рівняння системи (1) маємо:

$$y_4'\left(t\right) \geq a_5\left(t\right)\left(-T\right)C\left[y_4\left(t\right)\right]^{1-\varepsilon}\left[f_4\left(\int\limits_{t_1}^{g(t)/c} a_1\left(z\right)f_1\left(\int\limits_{t_1}^{t} a_2\left(x\right)f_3\left(\int\limits_{x}^{2x} a_3\left(s\right)ds\right)dx\right)dz\right)\right]^{1-\varepsilon},$$

$$C = \frac{K}{\left[K\right]^{1-\varepsilon}}.$$

Поділимо обидві частини нерівності на $\left(-T\right)C\left[y_4\left(t\right)\right]^{1-\varepsilon} > 0$ та проінтегруємо:

$$\int\limits_{t_1}^{t}\frac{y_4'\left(t\right)}{\left(-T\right)C\left[y_4\left(t\right)\right]^{1-\varepsilon}}dt \geq \int\limits_{t_1}^{t}a_4\left(t\right)\left[f_4\left(\int\limits_{t_1}^{g(t)/c} a_1\left(z\right)f_1\left(\int\limits_{t_1}^{t} a_2\left(x\right)f_3\left(\int\limits_{x}^{2x} a_3\left(s\right)ds\right)dx\right)dz\right)\right]^{1-\varepsilon}dt.$$

Маємо, що при $t \to \infty$ зліва – скінченне число, а це суперечить умові теореми. Значить, цей випадок неможливий. Що і треба було довести ■.

**Теорема 2.** Нехай при $n = 5$ виконуються умови:

1. $g\left(t\right) = \min\left\{\tau_1, t\right\}, \tau_i\left(t\right) \leq t, i = 2,3,4,5;$

2. $\int\limits_{t_0}^{\infty}a_1\left(t\right)dt = \int\limits_{t_0}^{\infty}a_2\left(t\right)dt = \int\limits_{t_0}^{\infty}a_3\left(t\right)dt = \int\limits_{t_0}^{\infty}a_4\left(t\right)dt = \infty,$

3. $\int\limits_{t_5}^{\infty}a_5\left(l\right)f_5\left(\int\limits_{t_5}^{\tau_1(t)}a_1\left(p\right)f_1\left(\int\limits_{t_5}^{\tau_2(z)}a_2\left(z\right)f_2\left(\int\limits_{t_5}^{\tau_3(t)}a_3\left(s\right)f_3\left(\int\limits_{t_4}^{\tau_4(t)}a_3\left(x\right)dx\right)ds\right)dz\right)dp\right)dl = \infty,$

4.
$$\int\limits_{t_1}^{\infty}a_5\left(p\right)\left[f_5\left(\int\limits_{t_1}^{g(t)/c^3}a_1\left(p\right)f_1\left(\int\limits_{p}^{cp}a_2\left(x\right)f_2\left(\int\limits_{x}^{cx}a_3\left(l\right)f_3\left(\int\limits_{l}^{cl}a_4\left(s\right)ds\right)dl\right)dx\right)dp\right)\right]^{1-\varepsilon}dt = \infty,$$
$\left(0 < \varepsilon < 1\right),$

5.
$$\int\limits_{t_1}^{\infty}a_5\left(t\right)\left[f_5\left(\int\limits_{t_1}^{g(t)}a_1\left(x\right)f_1\left(\int\limits_{t_1}^{\tau_2(x)}a_2\left(u\right)f_2\left(\int\limits_{t_1}^{\tau_3(u)}a_3\left(z\right)f_3\left(\int\limits_{z}^{cz}a_4\left(l\right)dl\right)dz\right)du\right)dx\right)\right]^{1-\varepsilon}dt = \infty,$$
$\left(0 < \varepsilon < 1\right).$

Тоді кожний розв'язок системи (1) або сильно осцилює, або всі його компоненти монотонно прямують до $\infty$ при $t \to \infty$

**Доведення.** У випадку, коли розв'язок системи (1) $y\left(t\right) = \left\{y_1\left(t\right), y_2\left(t\right), y_3\left(t\right), y_4\left(t\right)\right\}$ сильно осилює, теорему доведено.

Нехай розв'язок системи (1) не є сильно осцилювальним. Тоді з системи (1) та умов (2) не осцилюють усі інші компоненти цього розв'язку. В цьому випадку $y_1(t)>0$ або $y_1(t)<0$ при $t\geq t_1$.

Для визначеності нехай $y_1(t)>0$ при $t\geq t_1$. Тоді з умови $\lim\limits_{t\to\infty} y_1(t)=\infty$ та останнього рівняння системи (1) випливає, що $y_5'(t)>0$, а тому $y_5'(t)$ – монотонно зростаюча функція.

Тоді маємо два випадки: або $y_5(t)>0$ або $y_5(t)<0$ при $t\geq t_3\geq t_2$

I. Розглянемо випадок, коли $y_5(t)>0$. Тоді так само, як в теоремі 1 доведемо, що всі $\lim\limits_{t\to\infty} y_i(t)=\infty$

II. Розглянемо випадок, коли $y_5(t)<0$. З четвертого рівняння випливає, що $y_4'(t)>0$. Отже, $y_4(t)$ – монотонно спадна функція. Тому $y_4(t)<0$ або $y_4(t)>0$ при $t\geq t_4\geq t_3$

1. Нехай $y_4(t)<0$.

Тоді за допомогою тих же міркувань, що в теоремі 1 дійдемо висновку, що $\lim\limits_{t\to\infty} y_1(t)=-\infty$ а це суперечить припущенню $y_1(t)>0$ Тобто цей випадок неможливий.

2. Нехай $y_4(t)>0$.

З третього рівняння системи випливає, що $y_3'(t)>0$. Тобто $y_3(t)$ – монотонно зростаюча функція.

Можливі два випадки: або $y_3(t)<0$, або $y_3(t)>0$ при $t\geq t_8\geq t_7$

1) Розглянемо випадок $y_3(t)<0$

З другого рівняння випливає, що $y_2(t)$ – монотонно спадна функція. Можливі два випадки: або $y_2(t)<0$, або $y_2(t)>0$.

a) Нехай $y_2(t)<0$

Тоді за допомогою міркувань, наведених в теоремі 1 з умови (3) випливає, що $y_1(t)<0$, що суперечить припущенню, отже цей випадок неможливий.

b) Нехай $y_2(t)>0$

Проінтегруємо четверте рівняння. Оскільки $y_4(t)>0$, то при $t\to\infty$ отримуємо

$$y_4(t_1)\geq -\int_{t_1}^{\infty} a_4(x) f_4\big(y_5(\tau_5(x))\big)dx.$$

Оскільки ця нерівність виконується при будь-яких $t\geq t_1$ і оскільки $y_5(t)$ – монотонно зростає, то через те, що $y_4(\tau_4(t))\geq y_4(t)$, виконується наступне

$$y_4(\tau_4(t))\geq f_5(y_5(ct))\int_{t}^{ct} a_4(x)dx(c>1).$$

Оскільки функція $f_3(u)$ – неспадна, то

$$f_3\left(y_4\left(\tau_4(t)\right)\right) \geq f_3\left(-f_4\left(y_5(ct)\int_t^{ct} a_4(x)\,dx\right)\right).$$

Продовжуючи аналогічним чином, отримаємо оцінку для $y_1(t)$

$$y_1(t) \geq (-K_3) f_2\left(f_3\left(f_4\left(y_5\left(c^3 t\right)\right)\right)\right)\times$$

$$\times\int_{t_1}^{t} a_1(p) f_1\left(\int_p^{cp} a_2(x) f_2\left(\int_x^{cx} a_3(l) f_3\left(\int_l^{cl} a_4(s)\,ds\right)dl\right)dx\right)dp.$$

$y_1(t)$ – монотонно зростає, тому

$$y_1(t) \geq y_1\left(c^{-3}t\right) \geq (-K_3) f_1\left(f_2\left(f_3\left(f_4\left(y_5(t)\right)\right)\right)\right)\times$$

$$\times\int_{t_1}^{t/c^3} a_1(p) f_1\left(\int_p^{cp} a_2(x) f_2\left(\int_x^{cx} a_3(l) f_3\left(\int_l^{cl} a_4(s)\,ds\right)dl\right)dx\right)dp.$$

Оскільки

$$g(t) \leq t; g(t) = \min\{t;\tau(t)\},$$

то

$$f_5\left(y_1\left(\tau_1(t)\right)\right) \geq (-K_4) f_5\left(f_1\left(f_2\left(f_3\left(f_4\left(y_5(t)\right)\right)\right)\right)\right)\times$$

$$\times\int_{t_1}^{t/c^3} a_1(p) f_1\left(\int_p^{cp} a_2(x) f_2\left(\int_x^{cx} a_3(l) f_3\left(\int_l^{cl} a_4(s)\,ds\right)dl\right)dx\right)dp\Bigg).$$

Оскільки $y_1(t) > 0$, $y_1(t)$ – зростає, то

$$f_5\left(y_1\left(\tau_1(t)\right)\right) > K,$$

$$\frac{f_5\left(y_1\left(\tau(t)\right)\right)}{K} \geq 1.$$

За властивістю дробового степеню, можемо записати

$$\frac{f_5\left(y_1\left(\tau(t)\right)\right)}{K} \geq \left[\frac{f_5\left(y_1\left(\tau(t)\right)\right)}{K}\right]^{1-\varepsilon}.$$

Тоді з останнього рівняння системи випливає, що

$$y_5'(t) \geq a_5(t)(-K_4) C\left[y_5(t)\right]^{1-\varepsilon}\times$$

$$\times\left[f_5\left(\int_{t_1}^{t/c^3} a_1(p) f_1\left(\int_p^{cp} a_2(x) f_2\left(\int_x^{cx} a_3(l) f_3\left(\int_l^{cl} a_4(s)\,ds\right)dl\right)dx\right)dp\right)\right]^{1-\varepsilon}.$$

Поділимо обидві частини останньої нерівності на $(-K_4) C\left[y_5(t)\right]^{1-\varepsilon} > 0$ і проінтегруємо. Отримаємо:

$$-K_5\frac{\left[y_5(t)\right]^{\varepsilon}}{\varepsilon}+K_5\frac{\left[y_5(t_1)\right]^{\varepsilon}}{\varepsilon}\geq$$

$$\geq\int_{t_1}^{t}a_5(t)\left[f_5\left(\int_{t_1}^{t/c^3}a_1(p)f_1\left(\int_{p}^{cp}a_2(x)f_2\left(\int_{x}^{cx}a_3(l)f_3\left(\int_{l}^{cl}a_4(s)ds\right)dl\right)dx\right)dp\right)\right]^{1-\varepsilon}dt.$$

Оскільки $y_5(t)$ – монотонно зростаюча від'ємна функція, то $\lim\limits_{t\to\infty}y_5(t)=-M$ . Маємо, що при $t\to\infty$ зліва – скінченне число, а це суперечить умові теореми. Отже, цей випадок неможливий.

2) Розглянемо випадок $y_3(t)>0$

Оскільки $y_4(t)>0$ то $y_3(t)$– додатня монотоннозростаюча функція. Тоді $y_3(t)\geq y_3(t_9)=C,(C>0)$ при $t\geq t_9\geq t_8$.

З умови $\lim\limits_{t\to\infty}\tau_3(t)=\infty$ випливає, що існує таке $t_{10}\geq t_9$, що при $t\geq t_{10}$ виконується $\tau_3(t)\geq t_9$ і $y_3(\tau_3(t))\geq C$

Тоді з другого рівняння системи (1) після інтегрування отримуємо:

$$y_2(t)-y_2(t_{10})\geq f_2(C)\int_{t_{10}}^{t}a_2(s)ds$$

Звідси, враховуючи умови теореми при $t\to\infty$ маємо, що $\lim\limits_{t\to\infty}y_2(t)=\infty$. Тобто $y_2(t)>0$.

Аналізуючи рівняння системи (1), застосовуючи міркування попереднього випадку і те, що $y_1(t)$ – монотонно зростає, отримаємо оцінку для $y_1(t)$:

$$y_1(t)\geq y_1\left(c^{-3}t\right)\geq$$

$$(-K_3)f_1\Big(f_2\big(f_3\left(f_4\left(y_5(t)\right)\right)\big)\Big)\int_{t_1}^{t/c^3}a_1(p)f_1\left(\int_{p}^{cp}a_2(x)f_2\left(\int_{x}^{cx}a_3(l)f_3\left(\int_{l}^{cl}a_4(s)ds\right)dl\right)dx\right)dp.$$

Оскільки
$g(t)\leq t;g(t)=\min\{t;\tau(t)\}$, то

$$f_5\left(y_1\left(\tau_1(t)\right)\right)\geq$$

$$(-K_4)f_5\left(f_2\Big(f_3\big(f_4\left(y_5(t)\right)\big)\Big)\int_{t_1}^{t}a_1(x)f_1\left(\int_{t_1}^{\tau_2(x)}a_2(u)f_2\left(\int_{t_1}^{\tau_2(u)}a_3(z)f_3\left(\int_{z}^{cz}a_4(l)ds\right)dz\right)du\right)dx\right).$$

Оскільки $y_1(t)>0$, $y_1(t)$– зростає, то $f_5\left(y_1\left(\tau_1(t)\right)\right)>K$, $\dfrac{f_5\left(y_1\left(\tau(t)\right)\right)}{K}\geq 1$.

Використовуючи міркування, аналогічні випадку b, отримаємо

$$y_5'(t) \ge a_5(t)(-K_4)C\left[y_5(t)\right]^{1-\varepsilon} \times$$
$$\times\left[f_5\left(\int_{t_1}^{g(t)/c} a_1(x) f_1\left(\int_{t_1}^{\tau_2(x)} a_2(u) f_2\left(\int_{t_1}^{\tau_3(u)} a_3(z) f_3\left(\int_z^{cz} a_4(l)dl\right)dz\right)du\right)dx\right)\right]^{1-\varepsilon}.$$

Поділимо обидві частини останньої нерівності на $(-K_4)C\left[y_5(t)\right]^{1-\varepsilon} > 0$ і проінтегруємо. Отримаємо:

$$-K_5\frac{\left[y_5(t)\right]^{\varepsilon}}{\varepsilon} + K_5\frac{\left[y_5(t_1)\right]^{\varepsilon}}{\varepsilon} \ge$$
$$\ge \int_{t_1}^{t} a_5(t)\left[f_5\left(\int_{t_1}^{g(t)} a_1(x) f_1\left(\int_{t_1}^{\tau_2(x)} a_2(u) f_2\left(\int_{t_1}^{\tau_3(u)} a_3(z) f_3\left(\int_z^{cz} a_4(l)dl\right)dz\right)du\right)dx\right)\right]^{1-\varepsilon} dt,$$

Оскільки $y_5(t)$ – монотонно зростаюча від'ємна функція, то $\lim\limits_{t\to\infty} y_5(t) = -M$. Маємо, що при $t \to \infty$ зліва – скінченне число, а це суперечить умові теореми. Отже, цей випадок неможливий.

Побудуємо приклад, який свідчить про оптимальність умови (5), навіть при $\tau(t) \equiv t$. Насправді, для системи

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = y_3(t) \\ y_3'(t) = y_4(t) \\ y_4'(t) = \dfrac{105}{256t^4} y_1(t) \end{cases}$$

умова (5) виконується при $\varepsilon = 0$, але не виконується при жодних $0 < \varepsilon < 1$. Система має розв'язок:

$$\left\{t^{\frac{5}{4}}, \frac{5}{4}t^{\frac{1}{4}}, \frac{5}{16}t^{-\frac{3}{4}}, -\frac{15}{64}t^{-\frac{7}{4}}\right\},$$

не всі компоненти якого прямують до нескінченності або до нуля.

**Висновки** Був розглянутий випадок, який є узагальненням лінійного випадку, коли нелінійність в рівняннях має вигляд степеневих функцій. Були отримані нові теоретичні результати, а саме аналітичними методами була досліджена асимптотична поведінка развʼязків системи.

### Бібліографічні посилання

1. **Варех, Н.В.** Дослідження асимптотичної поведінки розв'язків диференціально-функціональних систем. [Текст]/ Н.В. Варех, О.Я. Вольфсон, Г.Ф. Мусаєва, О.А. Падалка // Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем. - 2017. – С. 34-35.

*Надійшла до редколегії 19.09.2018.*