УДК 519.6 doi: 10.15421/321801

Л.Т. Бойко
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

АЛГОРИТМ ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ МЕЖОВИХ ЕЛЕМЕНТІВ НА ПРИКЛАДІ МІШАНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ПУАССОНА

На прикладі двовимірного рівняння Пуассона обговорюються можливості алгоритму застосування методу межових елементів до розв'язування крайових задач. Алгоритм детально розглянуто на прикладі мішаної крайової задачі. Виконана програмна реалізація алгоритму та на тестовому прикладі показані результати його роботи.

Ключові слова: метод межових елементів, рівняння Пуассона, задача Діріхле, задача Неймана, мішана крайова задача.

На примере двумерного уравнения Пуассона проанализированы возможности алгоритма применения метода граничных элементов к решению краевых задач. Алгоритм подробно рассмотрен на примере смешанной краевой задачи. Выполнена программная реализация алгоритма и на тестовом примере показана его работа.

Ключевые слова: метод граничных элементов, уравнение Пуассона, задача Дирихле, задача Неймана, смешанная краевая задача.

The possibilities of the algorithm for applying the boundary element method to solving boundary value problems are discussed on the example of the two-dimensional Poisson differential equation. The algorithm does not change significantly when the type of boundary conditions changes: the Dirichlet problem, the Neumann problem, or a mixed boundary value problem. The idea of the algorithm is taken from the work of John T. Katsikadelis [1]. The algorithm is described in detail in the next sequence of actions. 1) The boundary-value problem for a two-dimensional finite domain is formulated. The desired function in the domain, its values, and its normal derivative on the boundary contour are connected by means of the second Green formula. 2) We pass from the boundary value problem for the Poisson equation to the boundary value problem for the Laplace equation. This simplifies the process of constructing an integral equation. We obtain the integral equation on the boundary contour using the boundary conditions. 3) In the integral equation, we divide the boundary contour into a finite number of boundary elements. The desired function and its normal derivative are considered constant values on each boundary element. We compose a system of linear algebraic equations considering these values. 4) We modify the system of linear algebraic equations taking into account the boundary conditions. After that, we solve it using the Gauss method.

The computer program has been developed according to the developed algorithm. We used it in the learning process. The software implementation of the algorithm takes into account the capabilities of modern computer technology and modern needs of the educational process. The work of the program is shown in the test case. Further modification of the described algorithm is possible.

Keywords: boundary element method, Poisson equation, Dirichlet problem, Neumann problem, mixed boundary value.

Вступ. Метод межових елементів (ММЕ) є сучасним чисельним методом, який почав активно розвиватися і використовуватися з появою та розвитком обчислювальної техніки. Основна ідея методу полягає у представленні шуканого розв’язку диференціального рівняння в області G у вигляді інтегралу по контуру (або поверхні), що обмежує цю область. Таке представлення дозволяє точно задовольнити диференціальне рівняння в області G, а на межовому контурі (або поверхні) з крайових умов добути інтегральне рівняння. Таким способом ММЕ зменшує вимірність задачі на одиницю, цього не робить метод скінчених елементів (МСЕ). Отже, ММЕ потребує меншого об’єму обчислювальної роботи у порівнянні з МСЕ.

Оскільки представляти шукану функцію в області G через її значення на межовому контурі можна по-різному, то виникають різні алгоритми застосування ММЕ. Основні складності ММЕ зосередженні у розв’язуванні інтегрального рівняння. На початку свого розвитку ММЕ використовувався до розв’язування або задачі Діріхле, або задачі Неймана. Однак, за останні 15-20 років почали з’являтися роботи, в яких автори розробляли підходи до використання ММЕ при розв’язуванні мішаної крайової задачі.

В даній роботі аналізується один із алгоритмів, який дозволяє використовувати ММЕ до розв’язування як крайових задач Діріхле або Неймана, так і мішаної крайової задачі. Розглядається лише двовимірна задача. Ідея алгоритму взята з роботи [1], його програмна реалізація адаптована до можливостей сучасної обчислювальної техніки та сучасних потреб навчального процесу.

Подальше викладання алгоритму розіб’ємо на **чотири кроки**.

1.Формулювання задачі та формули Гріна. В скінченній двовимірній області G, обмеженій кусково-гладким контуром $L = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2 = \{\varnothing\}$, розглянемо мішану крайову задачу для рівняння Пуассона (рис. 1).

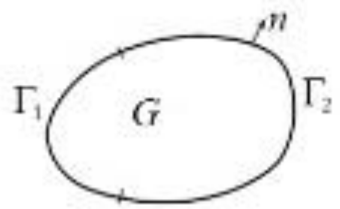

Рис. 1. Область *G*

$$\Delta u = f(x, y), \quad (x, y) \in G; \tag{1}$$

$$u\big|_{\Gamma_1} = \varphi_1(x, y); \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_2} = \varphi_2(x, y). \tag{3}$$

Тут позначено: $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – диференціальний оператор Лапласа; $f(x, y) \in C(G)$, $\varphi_1(x, y) \in C(\Gamma_1)$, $\varphi_2(x, y) \in C(\Gamma_2)$ – відомі функції; $u(x, y) \in C^{(2)}(G)$ – шукана функція в області G; n – зовнішня нормаль до межового контуру L.

Вважаємо, що коли $\Gamma_1 = L,\ \Gamma_2 = \{\varnothing\}$, то задача (1), (2), (3) стає задачею Діріхле (1), (2); коли $\Gamma_2 = L,\ \Gamma_1 = \{\varnothing\}$, то задача (1), (2), (3) стає задачею Неймана (1), (3). В останньому випадку припускаємо, що виконується умова розв'язності задачі Неймана [2]:

$$\iint_G f(x,y)\,dxdy = \int_L \varphi_2(l)\,dl\,.$$

Далі, пояснюючи алгоритм на прикладі мішаної крайової задачі, будемо пам'ятати, що його можна застосовувати також і до задачі Діріхле, і до задачі Неймана.

Алгоритм базується на використанні другої формули Гріна [1, 2]

$$\iint_G \left(u\cdot\Delta v - v\cdot\Delta u\right)dxdy = \int_L \left(u\cdot\frac{\partial v}{\partial n} - v\cdot\frac{\partial u}{\partial n}\right)dl\,. \tag{4}$$

У формулі (4) функції u та v мають бути визначеними та неперервними разом із похідними до другого порядку включно в області G і до першого порядку включно на контурі L. В усьому іншому вони довільні.

В якості функції v виберемо таку функцію:

$$v(P,P_0) = \frac{1}{2\pi}\ln r\,,\ \text{де}\ r = \left|P(x,y) - P_0(x_0,y_0)\right| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\,. \tag{5}$$

У формулі (5) $P_0(x_0, y_0)$ – фіксована, а $P(x,y)$ – довільна точка на двовимірній площині. Функція $v(P,P_0)$ задовольняє диференціальне рівняння Лапласа по координатах точки $P(x,y)$ при $P \neq P_0$.

Підставимо (5) в (4) і в залежності від розташування фіксованої точки P_0 відносно області G добудемо таку залежність [1, 2]:

$$\varepsilon\left(P_0\right)\cdot u\left(P_0\right) = \iint_G v(P,P_0)\cdot\Delta u\ dxdy + \int_L \left(u\cdot\frac{\partial v(P,P_0)}{\partial n_P} - v(P,P_0)\cdot\frac{\partial u}{\partial n_P}\right)dl\,, \tag{6}$$

де коефіцієнт $\varepsilon\left(P_0\right)$ визначається формулою

$$\varepsilon\left(P_0\right) = \begin{cases} 1, & якщо\quad P_0 \in G; \\ \dfrac{1}{2}, & якщо\ \ P_0 \in L; \\ 0, & якщо\ \ P_0 \notin \overline{G}. \end{cases} \tag{7}$$

У роботі [2] формулу (6) називають третьою формулою Гріна.

У правій частині формули (6) інтегрування і диференціювання відбувається по координатах точки $P(x,y)$. Координати точки $P_0(x_0,y_0)$ відіграють роль параметрів. Для простоти припускаємо, що, якщо точка $P_0(x_0,y_0)$ розташована на контурі L, то вона не є кутовою точкою контуру або точкою, де крайові умови змінюють тип.

Вважаємо, що у формулі (6) функція u – це шуканий розв'язок задачі (1), (2), (3). Однак, у правій частині рівності (6) присутній інтеграл по області G. Хоча підінтегральна функція цього інтеграла є відомою в області G з умов

(1), (5), його обчислення створює додаткові незручності при чисельній реалізації ММЕ. Щоб уникнути цих незручностей, перейдемо від задачі (1), (2), (3) до відповідної задачі для рівняння Лапласа.

2. Перехід від рівняння Пуассона до рівняння Лапласа. Розв'язок диференціального рівняння Пуассона шукатимемо у вигляді суми двох функцій

$$u(x,y) = u_0(x,y) + u_ч(x,y)\,. \tag{8}$$

Тут $u_0(x,y)$ – загальний розв'язок диференціального рівняння Лапласа, тобто $\Delta u_0(x,y) = 0$; $u_ч(x,y)$ – частинний розв'язок диференціального рівняння Пуассона, тобто $\Delta u_ч = f(x,y), \quad (x,y) \in G$. Якщо функція $u_ч(x,y)$ знайдена, то від крайової задачі (1), (2), (3) можна перейти до крайової задачі для пошуку $u_0(x,y)$.

$$\Delta u_0 = 0, \quad (x,y) \in G\,; \tag{9}$$

$$u_0\big|_{\Gamma_1} = \varphi_1(x,y) - u_ч\big|_{\Gamma_1} \equiv \overline{u}_0\,; \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial u_0}{\partial n}\right|_{\Gamma_2} = \varphi_2(x,y) - \left.\frac{\partial u_ч}{\partial n}\right|_{\Gamma_2} \equiv \overline{u}_{0n}\,. \tag{11}$$

Для пошуку розв'язку крайової задачі (9), (10), (11) звертаємось до формули (6). Тепер ця формула набуде вигляду:

$$\varepsilon\left(P_0\right) \cdot u_0\left(P_0\right) = \int_L \left(u_0 \cdot \frac{\partial v(P_0,P)}{\partial n_P} - v(P_0,P) \cdot \frac{\partial u_0}{\partial n_P} \right) dl\,. \tag{12}$$

Тут коефіцієнт $\varepsilon\left(P_0\right)$ залишається визначеним за формулою (7).

Далі для простоти запису у функції $u_0(x,y)$ формул (9) – (12) індекс нуль не будемо писати, пам'ятаючи при цьому, що мова йде про розв'язок диференціального рівняння Лапласа. Крім цього, на контурі L позначатимемо через $\overline{u}, \overline{u}_n$ відомі значення функцій u та $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ відповідно, а через u, u_n – невідомі значення тих же функцій.

Якщо $P_0 \in G$, то у формулі (7) $\varepsilon\left(P_0\right) = 1$, і (12) перетворюється в інтегральну формулу для шуканого розв'язку крайової задачі (9), (10), (11) у будь-якій точці $P_0 \in G$.

$$u\left(P_0\right) = \int_{\Gamma_1} \left(\overline{u} \cdot \frac{\partial v(P_0,P)}{\partial n_P} - v(P_0,P) \cdot u_n \right) dl + \int_{\Gamma_2} \left(u \cdot \frac{\partial v(P_0,P)}{\partial n_P} - v(P_0,P) \cdot \overline{u}_n \right) dl\,. \tag{13}$$

Однак, у правій частині рівності (13) під знаком інтеграла із двох функцій u та $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ відомою на межовому контурі є лише якась одна. Тому користуватися формулою (13) для обчислення розв'язку $u(P_0)$ поки неможливо.

Для визначення невідомих контурних функцій складемо інтегральні рівняння. Для цього у формулі (12) вибираємо $P_0 \in L$, вважаючи контур L гладким в околі точки P_0 (це значить, що $\varepsilon\left(P_0\right)=\frac{1}{2}$), та напишемо формулу (12) у такому вигляді:

$$\frac{1}{2}u\left(P_0\right)=\int_L\left(u(P)\cdot\frac{\partial v(P_0,P)}{\partial n_P}-v(P_0,P)\cdot\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}\right)dl\,. \tag{14}$$

На залежність (14) можна дивитись як на межове інтегральне рівняння з невідомими функціями (або u, або $\frac{\partial u}{\partial n}$) на контурі L. Функція $v(P_0,P)$ та її нормальна похідна є відомими.

Якщо розв'язується задача Діріхле (тобто на всьому контурі L задана лише умова (2)), то інтегральне рівняння (14) стає таким:

$$\frac{1}{2}\overline{u}\left(P_0\right)=\int_L\left(\overline{u}(P)\cdot\frac{\partial v(P_0,P)}{\partial n_P}-v(P_0,P)\cdot u_n(P)\right)dl\,,\quad P,P_0\in L\,. \tag{15}$$

В інтегральному рівнянні (15) шуканою є функція $u_n(P)$. Рівняння (15) – це лінійне інтегральне рівняння першого роду.

Якщо розв'язується задача Неймана (тобто на всьому контурі L задана лише умова (3)), то інтегральне рівняння (14) набуде вигляду:

$$\frac{1}{2}u\left(P_0\right)=\int_L\left(u(P)\cdot\frac{\partial v(P_0,P)}{\partial n_P}-v(P_0,P)\cdot\overline{u}_n(P)\right)dl\,,\quad P,P_0\in L\,. \tag{16}$$

Шуканою в інтегральному рівнянні (16) є функція u. Це лінійне інтегральне рівняння другого роду.

У випадку мішаної крайової задачі інтегральне рівняння (14) буде мати різний вигляд в залежності від розташування точки P_0 на контурі L.

$$\frac{1}{2}\overline{u}\left(P_0\right)=\int_{\Gamma_1}\left(\overline{u}(P)\cdot\frac{\partial v(P_0,P)}{\partial n_P}-v(P_0,P)\cdot u_n(P)\right)dl+$$
$$+\int_{\Gamma_2}\left(u(P)\cdot\frac{\partial v(P_0,P)}{\partial n_P}-v(P_0,P)\cdot\overline{u}_n(P)\right)dl,\quad \textit{якщо } P_0\in\Gamma_1; \tag{17}$$

$$\frac{1}{2}u\left(P_0\right)=\int_{\Gamma_1}\left(\overline{u}(P)\cdot\frac{\partial v(P_0,P)}{\partial n}-v(P_0,P)\cdot u_n(P)\right)dl+$$
$$+\int_{\Gamma_2}\left(u(P)\cdot\frac{\partial v(P_0,P)}{\partial n}-v(P_0,P)\cdot\overline{u}_n(P)\right)dl,\quad \textit{якщо } P_0\in\Gamma_2\,. \tag{18}$$

Далі на варіанті мішаної крайової задачі розглянемо наближений метод розв'язування системи інтегральних рівнянь (17), (18).

3. ММЕ зі сталими межовими елементами. Межовий контур L розбиваємо на N сегментів. Точки розбиття L на сегменти будемо називати крайовими точками (рис. 2). Ділити L на сегменти будемо так, щоб усі кутові точки контуру L та точки, де крайові умови змінюють тип, попали у множину крайових точок. На кожному сегменті виконаємо два види апроксимації. Одна стосується геометричної форми контуру, інша – значення шуканої функції та її нормальної похідної на контурі.

У випадку сталих елементів межовий сегмент апроксимуємо відрізком, який будемо називати межовим елементом (МЕ) і який з'єднує крайові точки. В середині цього відрізка розташовуємо вузол і межову функцію приймаємо сталою вздовж МЕ і рівною значенню цієї функції у вузловій точці.

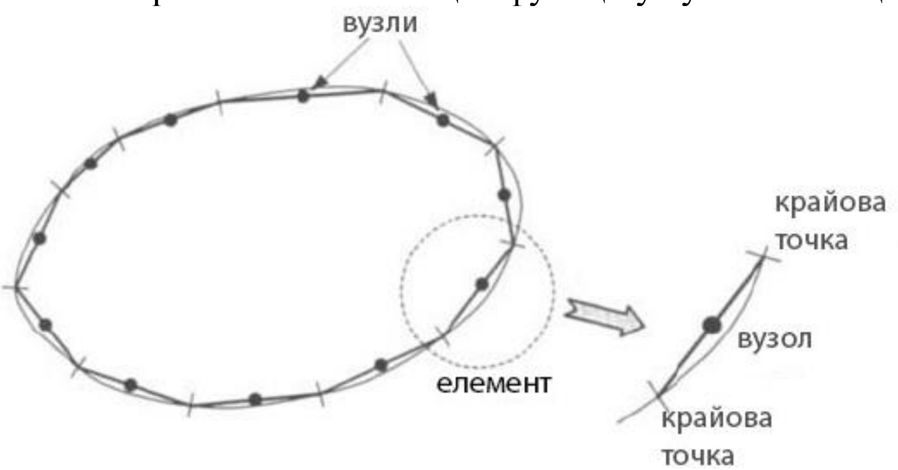

Рис. 2. Дискретизація межового контуру, сталий МЕ

Сталі елементи зображують межові функції та їх нормальні похідні значеннями, розривними від елемента до елемента [1].

Перенумеруємо N сталих МЕ у додатному напрямку. Беремо залежність (14), яка відповідає диференціальному рівнянню Лапласа і в якій точка P_0 дорівнює точці p_i, тобто вузлу на i-му елементі (рис. 3).

Напишемо (14) у дискретизованому вигляді

$$\frac{1}{2}u^i = \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} u(q) \cdot \frac{\partial v(p_i,q)}{\partial n_q} dq - \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} v(p_i,q) \cdot \frac{\partial u(q)}{\partial n_q} dq \,, \tag{19}$$

де Γ_j – елемент (прямолінійний відрізок), на якому розташований j –й вузол і вздовж якого виконується інтегрування по змінній q; p_i – вузлова точка i-го елемента. Оскільки констант-елемент є гладким в околі вузлових точок, то $\varepsilon(P_0) = \varepsilon(p_i) = \dfrac{1}{2}$.

За припущенням u та $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ є сталими на кожному МЕ, тоді у рівності (19) їх можна винести за знак інтеграла. На j –му межовому елементі позначимо u^j та u_n^j значення u та $\dfrac{\partial u}{\partial n}$, відповідно, тоді рівняння (19) можна написати так:

$$-\frac{1}{2}u^i+\sum_{j=1}^{N}\left(\int_{\Gamma_j}\frac{\partial v(p_i,q)}{\partial n_q}dq\right)u^j=\sum_{j=1}^{N}\left(\int_{\Gamma_j}v(p_i,q)dq\right)u_n^j. \quad (20)$$

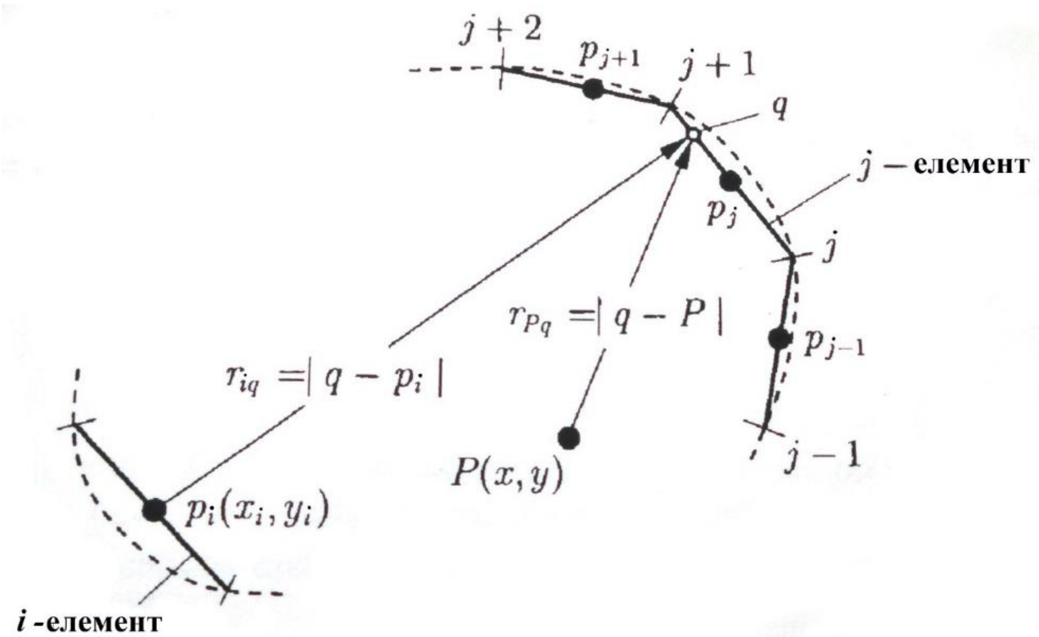

Рис. 3. Схема складання наближених рівнянь, сталий МЕ

Як видно з рис. 3, інтеграли, присутні в рівнянні (20), пов’язують між собою вузол p_i з вузлами p_j $(j=1,2,\ldots,N)$. Якщо позначити

$$\int_{\Gamma_j}\frac{\partial v(p_i,q)}{\partial n_q}dq=\tilde{H}_{ij};\qquad \int_{\Gamma_j}v(p_i,q)dq=G_{ij}, \quad (21)$$

то (20) можна написати у більш простому вигляді

$$-\frac{1}{2}u^i+\sum_{j=1}^{N}\tilde{H}_{ij}\cdot u^j=\sum_{j=1}^{N}G_{ij}\cdot u_n^j. \quad (22)$$

Далі позначимо $H_{ij}=\tilde{H}_{ij}-\frac{1}{2}\delta_{ij}$, де $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j;\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$ – символ Кронекера. Це дозволяє написати рівняння (22) ще простіше

$$\sum_{j=1}^{N}H_{ij}\cdot u^j=\sum_{j=1}^{N}G_{ij}\cdot u_n^j. \quad (23)$$

Рівняння (23) складаємо для кожного вузла p_i $(i=1,2,\ldots,N)$ та отримаємо систему N алгебраїчних рівнянь, які можна написати у матричному вигляді

$$[H]\{u\}=[G]\{u_n\}, \quad (24)$$

де $[H]$ та $[G]$ – це $N\times N$ матриці; $\{u\}$, $\{u_n\}$ – вектори вимірності N кожен.

Тепер в залежність (24) слід ввести відомі дані з крайових умов (10), (11).

4. Урахування крайових умов та розв'язування СЛАР. Нехай на Γ_1 розташовано N_1 сталих елементи, а на Γ_2 – N_2 сталих елементи, причому $N_1 + N_2 = N$. Це означає, що вектор $\{u_n\}$ містить N_1 невідомих значень u_n, а у векторі $\{u\}$ знаходяться N_2 невідомих значень u. Треба відокремити в системі (24) відомі значення від невідомих. Для цього будемо ці значення по різному помічати і рівняння (24) напишемо у вигляді

$$\left[H_1 \middle| H_2\right]\begin{Bmatrix}\{\bar{u}\}_1\\ \{u\}_2\end{Bmatrix} = \left[G_1 \middle| G_2\right]\begin{Bmatrix}\{u_n\}_1\\ \{\bar{u}_n\}_2\end{Bmatrix}. \quad (25)$$

Тут $\{\bar{u}\}_1$, $\{\bar{u}_n\}_2$ – відомі значення на Γ_1 та Γ_2 відповідно, а $\{u\}_2$, $\{u_n\}_1$ – невідомі значення. Матриці $[H]$ та $[G]$ розділені на дві частини. У матриці $[H_1]$ та $[G_1]$ включено лише N_1 перших стовпчиків матриць $[H]$ та $[G]$ відповідно, а у матриці $[H_2]$ та $[G_2]$ – всі інші стовпчики від $N_1 + 1$ до $N_1 + N_2$. Рядків у всіх матриць $[H_1]$, $[G_1]$, $[H_2]$, $[G_2]$ однакова кількість, а саме N.

Перенесемо в (25) невідомі значення на лівий бік рівності, а відомі – на правий бік.

$$\left[-G_1 \middle| H_2\right]\begin{Bmatrix}\{u_n\}_1\\ \{u\}_2\end{Bmatrix} = \left[-H_1 \middle| G_2\right]\begin{Bmatrix}\{\bar{u}\}_1\\ \{\bar{u}_n\}_2\end{Bmatrix}.$$

Для кращого сприйняття останню систему можна написати у більш звичному вигляді

$$[A]\cdot\{X\} = \{B\}, \quad (26)$$

де

$$[A] = \left[-G_1 \middle| H_2\right], \quad \{X\} = \begin{Bmatrix}\{u_n\}_1\\ \{u\}_2\end{Bmatrix}, \quad \{B\} = \left[-H_1 \middle| G_2\right]\begin{Bmatrix}\{\bar{u}\}_1\\ \{\bar{u}_n\}_2\end{Bmatrix}.$$

У СЛАР (26) $[A]$ – квадратна матриця вимірності $N \times N$; $\{X\}$, $\{B\}$ – вектори вимірності N кожний.

Розв'язавши СЛАР (26) методом Гаусса, будемо знати $\{u\}$ та $\{u_n\}$ у всіх вузлах межових елементів контуру L. Після цього можна обчислити функцію $u(P)$ у будь-якій внутрішній точці P області G (рис. 3). Для цього виберемо формулу (13) (коефіцієнт $\varepsilon(P_0) = 1$) та використаємо виконану дискретизацію контуру L. Добудемо таку розрахункову формулу

$$u(P) = \sum_{j=1}^{N} \tilde{H}_{ij} \cdot u^j - \sum_{j=1}^{N} G_{ij} \cdot u_n^j. \quad (27)$$

У правій частині рівності (27) коефіцієнти $\tilde{H}_{ij}$ та G_{ij} обчислюємо заново за формулами (21), замінивши координати межової точки p_i на координати внутрішньої точки P.

Програмна реалізація алгоритму. За описаним алгоритмом була модифікована фортран-програма LABECON [1]. Нова програма написана сучасною мовою C# в середовищі візуальної розробки програм MS Visual Studio 2013. Цю роботу виконали студенти групи ПА-17м-1 факультету прикладної математики ДНУ ім. О. Гончара Прудко О.П. та Вольфсон О.Я. Новий варіант програми є зручним при використанні у навчальному процесі.

Для тестування програми розглянемо приклад області G у вигляді прямокутного рівнобедреного трикутника. Нехай катети цього трикутника складають контур Γ_1, а гіпотенуза є контуром Γ_2 (рис. 4). Точками, що позначені номером в колі, розбиваємо межовий контур області на сегменти, які одночасно є межовими елементами. В центрі кожного МЕ розташована точка без номера, це вузол цього МЕ. Внутрішня точка, в якій програма обчислює значення шуканої функції, лише одна, і її номер написано в маленькому квадраті, розташованому в центрі області G.

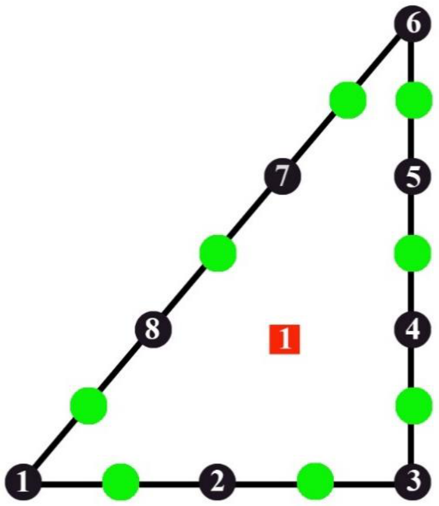

Рис. 4. Область G для прикладу

Вхідними даними для програми є текстовий файл, в який заносимо результати дискретизації межового контуру області G (рис. 5).

```
Тест
8
1
0,0 0,25 0,5 0,5 0,5 0,5 0,333 0,1666
0,0 0,0 0,0 0,1666 0,333 0,5 0,333 0,1666
0 0 0 0 0 1 1 1
0,3333
0,1666
```

Рис. 5. Скріншот текстового файлу з вхідними даними прикладу

У другому та третьому рядках текстового файлу вказана загальна кількість межових вузлів – вісім, внутрішня точка одна. Далі записані два рядки з *x*- та *y*- координатами крайових точок, розташованих на межовому контурі. У наступному рядку вказано тип крайової умови на кожному МЕ: 0 – умова Діріхле; 1 –.умова Неймана. Останні два рядки – це *x*- та *y*- координати однієї внутрішньої точки.

Формулюємо мішану крайову задачу для рівняння Пуассона

$$\Delta u = f(x, y) \equiv 4, \quad (x, y) \in G; \tag{28}$$

$$u\big|_{\Gamma_1} = \varphi_1(x, y) \equiv x^2 + y^2; \tag{29}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_2} = \varphi_2(x, y) \equiv (y - x)\sqrt{2}. \tag{30}$$

Щоб перейти від рівняння Пуассона до рівняння Лапласа, вибираємо частинний розв'язок диференціального рівняння Пуассона (28)

$$u_ч(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy. \tag{31}$$

Дійсно, $\Delta u_ч(x, y) = 4, \quad (x, y) \in G$. Від функції (31) не вимагаємо ніяких умов на межовому контурі. Використавши представлення (8), переходимо до крайової задачі для рівняння Лапласа:

$$\Delta u_0 = 0, \quad (x, y) \in G; \tag{32}$$

$$u_0\big|_{\Gamma_1} = \varphi_1(x, y) - u_ч\big|_{\Gamma_1} \equiv -2xy; \tag{33}$$

$$\left.\frac{\partial u_0}{\partial n}\right|_{\Gamma_2} = \varphi_2(x, y) - \left.\frac{\partial u_ч}{\partial n}\right|_{\Gamma_2} \equiv 0, \tag{34}$$

де вигляд області G та межових контурів Γ_1, Γ_2 показано на рис.4.

Частинний розв'язок (31) та праві частини умов Діріхле (33) і Неймана (34) передаємо в програму LABECON (рис. 6).

```
private double Dirihle(double x, double y)
{
    return -2.0 * x * y;
}

private double Neiman(double x, double y)
{
    return 0.0;
}

private double ChastnoeReshenie(double x, double y)
{
    return x * x + y * y + 2 * x * y;
}
```

Рис. 6. Передача функцій тестового прикладу в програму LABECON

Результати тестування показані на рис 7.

Розв'язок у внутрішніх точках

№Точки	X	Y	Uодн	U
1	0,3333	0,1666	-0,11258967...	0,137310335...

Рис. 7. Скріншот результатів розв'язування рівняння Лапласа і Пуассона у внутрішній точці

Розв'язок, добутий програмою LABECON у точці (0.3333; 0.1666), відрізняється від точного у третьому розряді після коми.

Якщо межовий контур розбити на чотирнадцять МЕ, то в тій же самій внутрішній точці результати, добуті програмою LABECON, будуть відрізнятися від точного у п'ятому розряді після коми.

Висновок. Програмно реалізований алгоритм був протестованим на багатьох прикладах. Тестування підтвердило його зручність при доведенні розв'язку крайової задачі для рівняння Пуассона до числових значень. Похибку наближених результатів можна оцінювати апостеріорним методом.

Планується виконати модифікацію описаного алгоритму стосовно обчислення коефіцієнтів (21). В роботі [1] ці коефіцієнти обчислюються наближено за квадратурними формулами Гаусса. Однак, інтеграли (21) можливо обчислити аналітично, тобто точно. Очікується, що така модифікація алгоритму дозволить пришвидшити роботу програми та підвищити точність результатів.

Бібліографічні посилання

1. **Katsikadelis**, **J.T**. Boundary Elements: Theory and Applications. ELSEVIER, 2002.
2. **Боголюбов, А.Н.** Функция Грина оператора Лапласа [Текст] / А.Н. Боголюбов, Н.Т. Левашова, И.Е. Могилевский, Ю.В. Мухартова, Н.Е. Шапкина. Учебн. пособие – М.: МГУ, 2012. – 130 с.

Надійшла до редколегії 14.06.2018.