УДК 519.6

Ж.В. Худа, Є.А. Тонконог
Дніпродзержинський державний технічний університет

МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ З МІШАНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ

Розроблено сплайн-колокаційну схему розв'язання крайової задачі для диференціального рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами, яка ґрунтується на застосуванні майже інтерполяційних L-сплайнів порядку три, що дозволяє підвищити точність наближеного розв'язку порівняно з розв'язками, знайденими за існуючими методами.

Разработана сплайн-коллокационная схема решения краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами, основанная на использовании почти интерполяционных L-сплайнов порядка три, что позволяет повысить точность приближенного решения по сравнению с решениями, найденными существующими методами.

Designed spline collocation scheme for solving the boundary value problem for second order differential equation with variable coefficients, which is based on the use of almost interpolation L-splines three of order, that improves the accuracy of the approximate solution compared with solutions found by existing methods.

Ключові слова: сплайн, колокаційна схема, крайова задача.

Вступ. Наразі залишається актуальним питання про підвищення точності наближеного розв'язку крайових задач і задач Коші. Дослідженню шляхів підвищення точності розв'язків крайових задач присвячено чимало робіт, серед них слід відзначити праці Ю.С. Зав'ялова, В.Л. Мірошниченко, С.Б.Стечкіна, Ю.М.Субботіна, А.О. Лигуна. Найбільш ефективним засобом у вирішенні питання про підвищення точності наближеного розв'язку крайових задач стало застосування сплайн-колокаційних схем, заснованих на різних узагальненнях сплайнів. Побудову узагальнених майже інтерполяційних L-сплайнів наведено в роботах Ж.В.Худої [1; 2]. Доцільно розглянути такі сплайи в ході розв'язання крайових задач з різними граничними умовами.

Постановка задачі. Дану роботу присвячено питанням відшукання наближеного розв'язку крайової задачі виду

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x); \qquad (1)$$

$$A_1 y(a) + B_1 y'(a) = \gamma_a, \qquad A_2 y(b) + B_2 y'(b) = \gamma_b, \qquad (2)$$

де $p(x), q(x), f(x)$ – двічі неперервно диференційовані функції; $A_1, B_1, \gamma_a,\ A_2, B_2, \gamma_b \in R$. Розв'язок потрібно знайти з більш високою точністю порівняно з розв'язками, знайденими за існуючими методами, які зазвичай дають точність порядку $O(h^2)$. Для цього розроблено сплайн-колокаційну схему, засновану на застосуванні L-сплайнів порядку три, що дозволяє підвищити точність наближеного розв'язку.

Метод розв'язування та аналіз одержаних результатів. Запропоновано шукати наближений розв'язок задачі (1) - (2) за допомогою колокаційної схеми, а як наближений розв'язок можна застосовувати сплайни виду

$$S_3(y,x) = \sum_{i=-1}^{N+1} C_i B_{3,i}(x - ih) \qquad (i = 0,1,\ldots,N), \qquad (3)$$

які, у свою чергу, на кожному відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ є розв'язками рівнянь виду

$$S_3^{(4)} + p_i S_3^{(3)} + q_i S_3'' = 0, \qquad (i = 0,1,\ldots,N), \qquad (4)$$

де $p_i = p(x_i), q_i = q(x_i), f_i = f(x_i)$ на кожному інтервалі $[x_{i-1}, x_i]$. Сплайни (3) є узагальненими L-сплайнами порядку три, введені за рівномірним розбиттям $\Delta_{N[a,b]}$ відрізка $[a,b]$ на частини $\Delta_{N[a,b]} = \{x_i \,|\, x_i = a + ih,\ h > 0, i = 0,1,\ldots,N\}$, а $B_{3,i}(x)$ – базисні функції з мінімальним носієм $[x_{i-2}, x_{i+2}]$, які також задовольняють рівняння (4) і нормовані умовою $B_{3,i}(x_{i+1}) + B_{3,i}(x_i) + B_{3,i}(x_{i-1}) = 1$. Узагальнені базисні функції $B_{3,i}(x)$ побудовані та наведені в роботах [1; 2].

Оскільки підібрати єдине рівняння виду (4), яке найкращим чином описує наближений розв'язок задачі (1) - (2) на кожному проміжку дуже складно, доводиться вдатися до рівняння, коефіцієнти якого змінюються від відрізка до відрізка. Отже, ми можемо підібрати вид сплайна $S_3(x)$ для кожного конкретного рівняння виду (1). Побудувавши один раз базисні функції, а потім змінюючи тільки вид $p(x)$, $q(x)$, можна очікувати, що отримаємо сплайн (3), параметри якого підібрані таким чином, що цей сплайн краще (у сенсі мінімізації ухилення від точного розв'язку) описує шуканий розв'язок моделі, ніж поліноміальні сплайни. Наближений розв'язок задачі (1) – (2) будуємо у вигляді сплайна (3), де параметри сплайна обрано на підставі умов

$$\begin{cases} A_1 S(a) + B_1 S'(a) = \gamma_a\,, \\ A_2 S(b) + B_2 S'(b) = \gamma_b, \qquad (i = \overline{0, N})\,, \\ S_i'' + p_i S_i' + q_i S_i = f_i\,, \end{cases} \tag{5}$$

де $p_i = p(x_i), q_i = q(x_i), f_i = f(x_i)$ $(i = \overline{-1, N+1})$ на кожному інтервалі $[x_{i-1}, x_i]$; $S_i = S(x_i)$.

Застосовуючи явний вигляд базисних функцій $B_{3,i}(x)$ $(i = \overline{-1, N+1})$ і значення цих функцій та їх похідних у вузлах колокації, отримаємо систему з тридіагональною матрицею відносно коефіцієнтів сплайна (3) - C_i $(i = \overline{-1, N+1})$:

$$\begin{cases} (C_{-1}\alpha_0 + C_1\alpha_1)\left(A_1 + \dfrac{B_1}{h}\right) + A_1\alpha_0 C_0 = \gamma_a, \\ C_{i-1}\left(\theta_{i-1} + p_i\beta_{i-1} + q_i\alpha_{i-1}\right) + C_i\left(q_i\alpha_i + p_i\beta_i + \theta_i\right) + \\ +C_{i+1}\left(\theta_{i+1} + p_i\beta_{i+1} + q_i\alpha_{i+1}\right) = f_i, \qquad (i = 1,\ N-1) \\ (C_{N-1}\alpha_{N-1} + C_{N+1}\alpha_N)\left(A_2 + \dfrac{B_2}{h}\right) + A_2\alpha_n C_N = \gamma_b, \end{cases} \tag{6}$$

де $\alpha_i = B_{3,i}(x_i)$, $\beta_i = B_{3,i}'(x_i)$, $\theta_i = B_{3,i}''(x_i)$, а $B_{3,i}(x)$ – базисні функції, що задовольняють рівняння (4).

Доведемо, що порядок точності такої схеми становить $O(h^4)$ в довільній точці розбиття для сплайнів виду (3).

Теорема. Нехай $q(x)$, $f(x) \in L^4_{\infty\,[a,\,b]}$, $p(x) \in L^5_{\infty\,[a,\,b]}$, $q(x) < 0$ для $x \in [a,b]$ і h таке, що для $x \in [x_{i-1}, x_i]$ виконуються умови

$$\frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h} - \frac{{p_i}^2}{6} + \frac{q_i}{12} + \frac{h}{24}\left(q_i' - p_i q_i - p_i' p_i\right) > 0,$$

$$q_i - h^2\left(\frac{(p_i')^2}{12} - \frac{p_i' q_i}{24} + \frac{{p_i}^4}{192} + \frac{q_i''}{24} - \frac{p_i'' p_i}{24} - \frac{p^2{}_i q_i}{96}\right) < 0\,, \tag{7}$$

якщо $y_*(x) \in L^6_{\infty\ [a,b]}$ – точний розв'язок задачі (1) – (2), а $S_3(x)$ – сплайн виду (3), який задовольняє умови (4), де $C_i\,(i = \overline{0,\ N+1})$ – розв'язки системи (6) , тоді, коли $h \to 0$, виконується нерівність

$$\| y_* - S_3 \|_{C_{[a,b]}} \le Dh^4 + O(h^5)\ , \tag{8}$$

де
$$D = \max_{1 \le i \le N} \left| \frac{1}{12}\left((A_1 + B_1)(y_i'' + p_i y_i') + (A_2 + B_2)(q_i + p_i')y_i\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{36}\left({y_i}^{(4)} + p_i {y_i}^{(3)} + q_i {y_i}''\right) \right|\ .$$

Доведення теореми. Для отримання оцінки точності сплайн-розв'язку (3), коефіцієнти якого знайдено із системи (6), застосуємо нерівність

$$\left|S_3(x) - y_*\ \right| \le \left|S_3(x) - S_3(x, y_*)\right| + \left|S_3(x, y_*) - y_*\right|\,, \tag{9}$$

де y_* – точний розв'язок задачі (1)-(2); $S_3(x, y_*)$ – узагальнений майже інтерполяційний сплайн. Сплайни $S_3(x, y_*)$ побудовано в роботі [2].
Такі сплайни мають вигляд

$$S_3(x,y_*)=\sum_{i=-1}^{N+1}\tilde{C}_i B_{3,i}(x-ih). \qquad (10)$$

Коефіцієнти $\tilde{C}_i$ розраховані таким чином, що значення сплайна у вузлі майже збігаються зі значеннями інтерпольованої функції y_*, яка, у свою чергу, є розв'язком задачі (1)-(2). На кожному інтервалі $[x_{i-1},x_i]$

$$\begin{aligned}\tilde{C}_i &= y_i(1-\frac{1}{12}p_i'h^2-\frac{1}{120}h^4(\frac{5}{6}p_i'''+q_i''-\frac{1}{3}(p_ip_i''+(p_i')^2)+\\&+\frac{3}{4}(p_i'q_i+p_iq_i'-p_i^2p_i')+\frac{1}{42}q_i^2-\frac{1}{504}q_ip_i^2-\frac{1}{252}p_i^4))-\\&-\Delta y_i(\frac{1}{24}p_ih+(\frac{1}{180}q_i'-\frac{1}{1440}p_i^3-\frac{11}{1440}p_ip_i'+\frac{1}{480}p_iq_i)h^3)-\\&-\Delta^2y_i(\frac{1}{6}+(-\frac{1}{72}p_i'-\frac{1}{45}q_i-\frac{1}{180}p_i^2)h^2,\end{aligned} \qquad (11)$$

де $y_i=y(ih)$, $p_i=p(ih)$, $\Delta y_i=y_{i+1}-y_{i-1}$, $\Delta^2y_i=y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}$.

У роботі [2] доведено, що на кожному з проміжків $[x_{i-1},x_i]$ $(i=\overline{0,N})$ рівномірно за i та x буде виконано співвідношення

$$\begin{aligned}|S_3(x,y_*)-y_*| &= \Big|\frac{1}{24}(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2\,(y''(x)+p(x)y'(x)+\\&+(q(x)+p'(x))y(x)+\frac{1}{36}h^4(y_i^{(4)}+p_iy_i^{(3)}+q_iy_i'')+O(h^5)\Big|.\end{aligned} \qquad (12)$$

Тобто відхилення майже інтерполяційного сплайна від точного розв'язку задачі (1)-(2) не перевищує $O(h^4)$ у довільній точці. Тобто для доведення теореми нам залишається оцінити різницю $|S_3(x)-S_3(x,y_*)|$.

Оскільки обидва сплайни побудовані на основі узагальнених базисних функцій $B_{3,i}(x)$, то питання оцінки відхилення $S_3(x)-S_3(x,y_*)$ може бути зведено до оцінки різниці $\delta_i=\tilde{C}_i-C_i$. Для доведення того що це відхилення має порядок $O(h^4)$, розглянемо допоміжний оператор

$$\begin{aligned}L_i(\tilde{C}_i) &= \tilde{C}_{i-1}(\theta_{i-1}+p_i\beta_{i-1}+q_i\alpha_{i-1})+\tilde{C}_i(q_i\alpha_i+p_i\beta_i+\theta_i)+\\&+\tilde{C}_{i+1}(\theta_{i+1}+p_i\beta_{i+1}+q_i\alpha_{i+1}),\end{aligned}$$

де $\alpha_i=B_{3,i}(x_i)$, $\beta_i=B_{3,i}'(x_i)$, $\theta_i=B_{3,i}''(x_i)$.

Підставимо значення різниці δ_i в оператор L_i.

$$\begin{aligned}L_i(\delta_i) &= L(C_i)-L(y_i)\Big(1-\frac{1}{12}p_i'h^2-\frac{1}{120}h^4(\frac{5}{6}p_i'''+q_i''-\frac{1}{3}(p_ip_i''+(p_i')^2)+\\&+\frac{3}{4}(p_i'q_i+p_iq_i'-p_i^2p_i')+\frac{1}{42}q_i^2-\frac{1}{504}q_ip_i^2-\frac{1}{252}p_i^4)\Big)+\\&+L_i(\Delta y_i)\Big(\frac{1}{24}p_ih+(\frac{1}{180}q_i'-\frac{1}{1440}p_i^3-\frac{11}{1440}p_ip_i'+\frac{1}{480}p_iq_i)h^3\Big)+\\&+L(\Delta^2y_i)(\frac{1}{6}+(-\frac{1}{72}p_i'-\frac{1}{45}q_i-\frac{1}{180}p_i^2)h^2,\end{aligned} \qquad (13)$$

де

$$\begin{aligned}L(y_i) &= y_{i-1}(\theta_{i-1}+p_i\beta_{i-1}+q_i\alpha_{i-1})+y_i(q_i\alpha_i+p_i\beta_i+\theta_i)+\\&+y_{i+1}(\theta_{i+1}+p_i\beta_{i+1}+q_i\alpha_{i+1}),\end{aligned}$$

$$L(\Delta y_i)=(y_i-y_{i-2})(\theta_{i-1}+p_i\beta_{i-1}+q_i\alpha_{i-1})+ \\ +(y_{i+1}-y_{i-1})(q_i\alpha_i+p_i\beta_i+\theta_i)+ \\ +(y_{i+2}-y_i)(\theta_{i+1}+p_i\beta_{i+1}+q_i\alpha_{i+1}), \quad (14)$$

$$L(\Delta^2 y_i)=(y_{i-2}-2y_{i-1}+y_i)(\theta_{i-1}+p_i\beta_{i-1}+q_i\alpha_{i-1})+ \\ +(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1})(q_i\alpha_i+p_i\beta_i+\theta_i)+ \\ +(y_{i+2}-2y_{i+1}-y_i)(\theta_{i+1}+p_i\beta_{i+1}+q_i\alpha_{i+1}).$$

Застосовуючи у формулах (14) розвинення $y_{i-2},y_{i+2},y_{i-1},y_{i+1}$, за формулою Тейлора в точці $x=ih$ отримаємо розвинення $L(y_i)$, $L(\Delta y_i)$, $L(\Delta^2 y_i)$ у точці x_i. Після підстановки цих розвинень у формулу (13), враховуючи, що $L(C_i)=f_i$ і $y_i''+p_iy_i'+q_iy_i=f_i$, отримаємо: рівномірно за i $(i=\overline{1,N})$ $L_i(\delta_i)=O(h^4)$, тобто

$$\delta_{i-1}(\theta_{i-1}+p_i\beta_{i-1}+q_i\alpha_{i-1})+\delta_i(q_i\alpha_i+p_i\beta_i+\theta_i)+ \\ +\delta_{i+1}(\theta_{i+1}+p_i\beta_{i+1}+q_i\alpha_{i+1})=d_i, \quad \partial e \quad d_i=O(h^4). \quad (15)$$

Таким чином, одержано систему (15) із тридіагональною матрицею. Застосуємо лему Адамара. Якщо система $AX=D$, де $A=\{a_{ij}\}_1^N$ – матриця з діагональним переважанням, $D=(d_1,d_2,...,d_N)$ має єдиний розв’язок, то правдива оцінка [1] :

$$\max_{1\le i\le N}|x_i|\le\max_{1\le i\le N}\frac{|d_i|}{G_i}, \quad \text{де} \quad G_i=|a_{ii}|-\sum_{j\ne i}|a_{ij}|>0 \quad (i,j=\overline{1,N}). \quad (16)$$

Доведемо, що матриця системи (15) є матрицею з діагональним переважанням. Для цього розглянемо різницю

$$G_i=|q_i\alpha_i+p_i\beta_i+\theta_i|-|\theta_{i+1}+p_i\beta_{i+1}+q_i\alpha_{i+1}|-|\theta_{i-1}+p_i\beta_{i-1}+q_i\alpha_{i-1}| \\ (i,j=\overline{1,N}). \quad (17)$$

Після підстановки явного вигляду значень базисних сплайнів та їх похідних (наведених у роботі [2]) $\alpha_i=B_{3,i}(x_i)$, $\beta_i=B'_{3,i}(x_i)$, $\theta_i=B''_{3,i}(x_i)$ у рівність (17) з урахуванням умов (7) отримаємо

$$G_i=-q_i+h^2\left(\frac{(p_i')^2}{12}-\frac{p_i'q_i}{24}+\frac{p_i{}^4}{192}+\frac{q_i''}{24}-\frac{p_i''p_i}{24}-\frac{p^2{}_iq_i}{96}\right)>0. \quad (18)$$

Нерівність (18) доводить, що умова (17) виконана і матриця системи (15) є матрицею з діагональним переважанням. Тоді за лемою Адамара для розв’язків системи (15) правдива оцінка (16), тобто

$$\max_{1\le i\le N}\left|\tilde{C}_i-C_i\right|\le O(h^4), \quad \text{звідки випливає} \quad \left\|\tilde{S}_3(x)-S_3(x,y_*)\right\|_C=O(h^4).$$

Беручи до уваги отриману рівність, а також рівність (12) і те, що

$$D=\max_{1\le i\le N}\left|\frac{1}{12}((A_1+B_1)(y_i''+p_iy_i')+(A_2+B_2)(q_i+p_i')y_i)+ \right. \\ \left. +\frac{1}{36}\left(y_i^{(4)}+p_iy_i^{(3)}+q_iy_i''\right)\right|,$$

з урахуванням нерівності (9), отримаємо нерівність (8). Таким чином, теорему доведено.

Висновки. Розроблено метод розв’язання крайової задачі, реалізований за допомогою побудованих раніше узагальнених L-сплайнів порядку три. Наведений метод ефективний та зручний у застосуванні. Він дає можливість отримати розв’язок в аналітичному вигляді на всій області визначення задачі з більш високою точністю порівняно зі звичайними колокаційними методами. Доведено, що відхилення отриманого розв’язку від точного не перевищує $O(h^4)$.

Бібліографічні посилання

1. **Худая, Ж.В.** Об одном свойстве L–сплайнов с переменными коэффициентами [Текст] / Ж.В. Худая // Питання прикладної математики та математичного моделювання. – Д., 2006. – С. 250–260.

2. **Худая, Ж.В.** Об асимптотике приближения функции L –сплайнами в зависимости от положения точки [Текст] / Ж.В. Худая // Там само. – Д., 2007. – С. 317–327.

Надійшла до редколегії 02.07.2015