УДК 519.8

А.Д. Фирсов[*], В.А. Громов[**]

[*]*Университет таможенного дела и финансов, г. Днепропетровск*

[**]*Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара*

ВЛИЯНИЕ СГЛАЖИВАНИЯ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ ХАОТИЧЕСКОГО ВРЕМЕННОГО РЯДА

Рассмотрено влияние сглаживания на хаотичность нелинейного временного ряда. В качестве модельной системы рассмотрен ряд Лоренца, а в качестве меры хаотичности – старший показатель Ляпунова, вычисленный с помощью метода аналога. Установлена немонотонность зависимости старшего показателя Ляпунова от величины сглаживания.

Розглянуто вплив згладжування на хаотичність нелінійного часового ряду. Як модельну систему розглянуто ряд Лоренца, а як міру хаотичності – старший показник Ляпунова, який було розраховано методом аналога. Установлено немонотонність залежності старшого показника Ляпунова від ступеня згладжування.

The present paper is concerned with a relationship between time series smoothness and its chaoticity. The Lorenz system was employed as a benchmark; the highest Lyapunov exponent (calculated with the employment of analogue method) provides an estimate for series chaoticity. It was ascertained that dependence of the HLE on smoothness parameter is non-monotonous.

Ключевые слова: хаотические временные ряды, старший показатель Ляпунова, сглаживание временного ряда.

Введение. В значительном числе случаев исследование нелинейных динамических систем сводится к анализу порождённых ими временных рядов. Это обусловлено отсутствием достаточных знаний о системе-генераторе. Фактически такая система рассматривается как «чёрный ящик», на выходе которого есть временной ряд с известной частотой дискретизации. При этом информация о ряде, получаемая в результате его обработки методами нелинейной динамики (энтропия, показатель Ляпунова, размерность аттрактора), является достаточной для практического применения таких рядов, однако она мало даёт для понимания физической природы системы.

Одной из основных задач анализа временных рядов является прогнозирование их динамики. В [2; 3] в рамках парадигмы прогнозирования на основе кластеризации (predictive clustering) были получены результаты, позволяющие говорить о возможности сжатия информации о исследуемом временном ряде (информация представляется в виде дискретных структур) и о генерации временного ряда со свойствами, близкими к исходному ряду по сохранённой информации: в первой работе для сохранения информации использовался мультиграф, в качестве механизма сбора информации – алгоритм муравьиных колоний; во второй применялись соответственно центры кластеров, полученных кластеризацией отрезков временного ряда, и алгоритм Уишарта.

Для эффективного применения указанных алгоритмов (равно как и других алгоритмов парадигмы прогнозирования на основе кластеризации) важное значение имеет частота дискретизации [1]: слишком высокая приводит к избыточности и трудностям в обработке, низкая – к изменению исходной зависимости.

В настоящей работе исследуется вопрос о сохранности фундаментальных характеристик ряда и его поведения при сжатии и деформации. Вопрос влияния на характеристики ряда частоты дискретизации изучен теоретически и численно [Там же]. Влияние сжатия требует дальнейшего изучения. Далее в рамках подходов, предложенных в [2; 3], исследуется влияние усреднения на характеристики ряда.

Методология исследования. С целью анализа влияния сжатия на характеристики хаотического ряда была предложена следующая схема вычислительного эксперимента. В качестве параметра ряда, характеризующего его хаотичность, выбран старший показатель Ляпунова как индикатор, позволяющий оценить энтропию динамической системы и горизонт прогнозирования. Расчёт старшего показателя Ляпунова осуществлялся с помощью метода аналога, который основан на измерении скорости расходимости близких траекторий, фактически при помощи алгоритмического расчета зависимости:

$$\lambda_1 \cong \frac{1}{t_n - t_0}\left(\ln\frac{\|u_1(t_1)\|}{\|u_1(t_0)\|} + \ln\frac{\|u_2(t_2)\|}{\|u_2(t_1)\|} + \ldots + \ln\frac{\|u_n(t_n)\|}{\|u_n(t_{n-1})\|} \right),$$

где t_n, t_0 – соответственно конечный и начальный моменты времени; $u_i(t)$ –разность между соседними траекториями системы [4]. Для сглаживания была выбрана стандартная процедура вычисления скользящего среднего (MA) с заданным окном, а в качестве модельной системы – система Лоренца

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma\cdot(y - x) \\ \dot{y} = r\cdot x - y - x\cdot z \\ \dot{z} = x\cdot y - b\cdot z \end{cases}$$

где σ=10, b=8/3, r=28.

Идея вычислительного эксперимента заключалась в последовательном сглаживании временного ряда, составленного из значений одной из координат системы Лоренца, и вычислении первого показателя Ляпунова на каждом шаге сглаживания. В качестве среды разработки был выбран Mathlab r2013a по причине наличия отлаженных библиотек для расчётов. В виду большой вычислительной сложности эксперимента процесс расчёта был распараллелен на четыре ядра. Стоит отметить, что расчёт полученных результатов занял несколько суток.

Временной интервал дискретизации был выбран 0,02 [3]. Длина ряда – в диапазоне от 3000 до 10000. Вычисление первого показателя Ляпунова выполнялось при разных длинах сравниваемых векторов, а также при различных мерах подобия этих векторов. Наиболее характерные результаты приведены ниже (рис. 1 – 5).

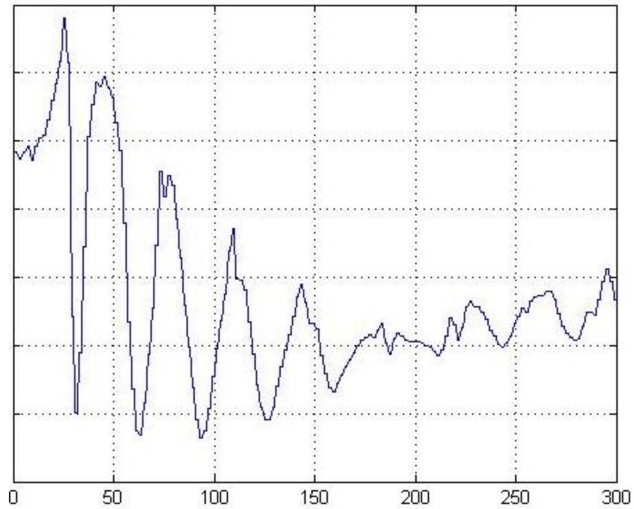

Рис.1. Зависимость нормированного значения показателя Ляпунова для сглаженного ряда Лоренца от ширины окна в методе скользящих средних *Примечание:* длина векторов (метод аналога) – 5; мера подобия – 0,1.

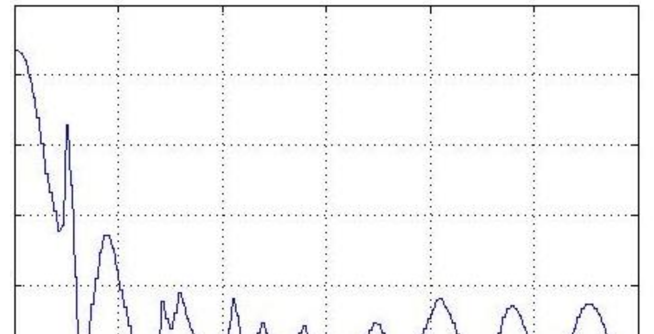

Рис.2. Зависимость нормированного значения показателя Ляпунова для сглаженного ряда Лоренца от ширины окна в методе скользящих средних *Примечание:* длина векторов (метод аналога) – 5; мера подобия – 0,3.

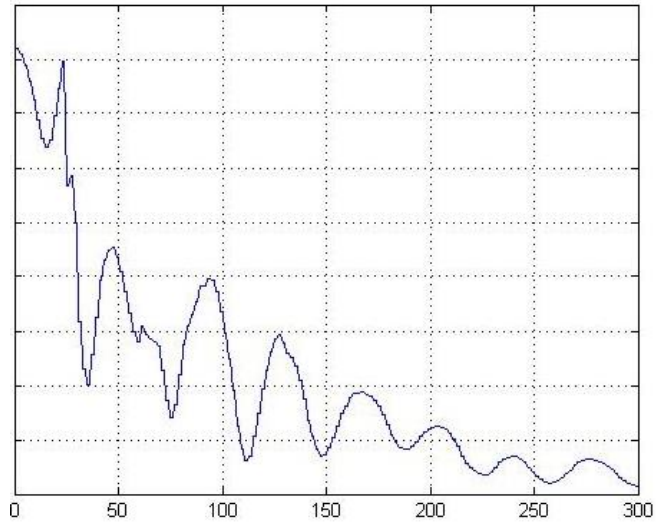

Рис.3. Зависимость нормированного значения показателя Ляпунова
для сглаженного ряда Лоренца от ширины окна в методе скользящих средних *Примечание:* длина векторов (метод аналога) – 5; мера подобия – 0,7.

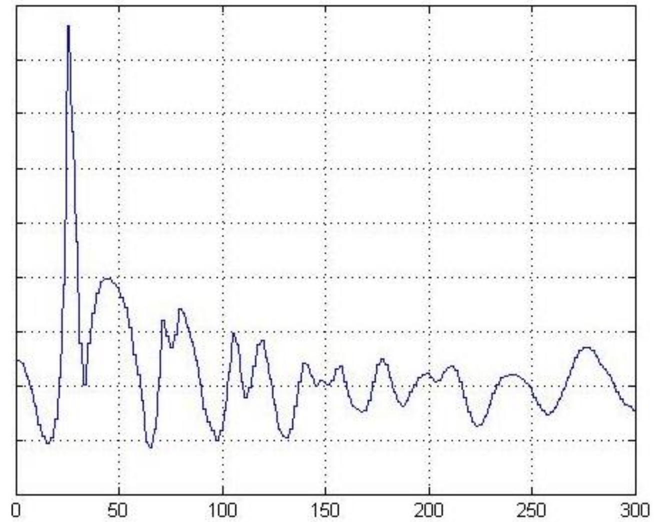

Рис.4. Зависимость нормированного значения показателя Ляпунова
для сглаженного ряда Лоренца от ширины окна в методе скользящих средних *Примечание:* длина векторов (метод аналога) – 10; мера подобия – 0,7.

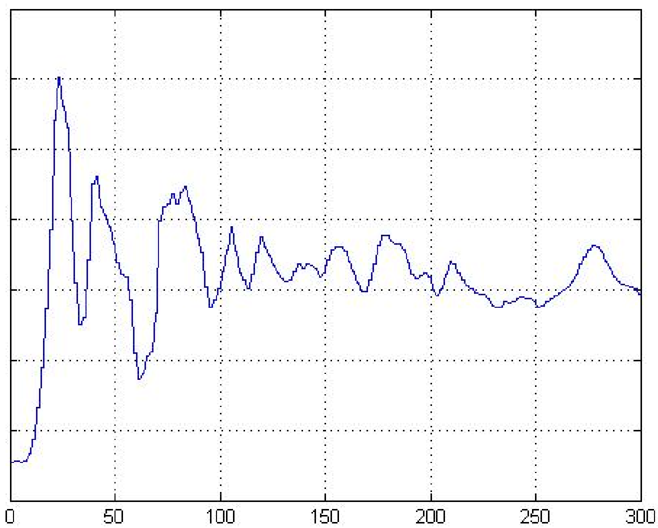

Рис.5. Зависимость нормированного значения показателя Ляпунова
для сглаженного ряда Лоренца от ширины окна в методе скользящих средних *Примечание:* длина векторов (метод аналога) – 20; мера подобия – 1,0.

Из общетеоретических соображений следует, что хаотичность системы после сглаживания должна уменьшаться. Таким образом, возникает вопрос о пороговом значении, после которого динамика системы перестаёт иметь хаотический характер. Однако вычислительный эксперимент при различных значениях ширины окна сглаживания и размерности векторов в методе аналога показал, что при увеличении ширины окна сглаживания происходят флуктуации значения коэффициента Ляпунова. Далее для выявления динамики изменения старшего показателя Ляпунова в зависимости от сглаживания был проведён вычислительный эксперимент, в рамках которого на каждой итерации выполнялось сглаживание сглаженного ряда с одинаковой шириной окна и вычисление показателя. Выбор такого подхода объясняется необходимостью проведения расчётов для разных деформаций исходного ряда и выявления значений, при которых динамика ряда существенно меняется. Результаты вычислений приведены ниже (рис. 6).

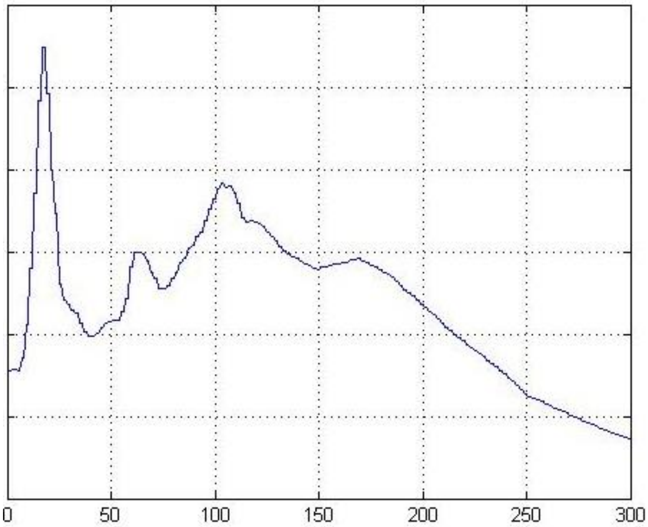

Рис.6. Зависимость нормированного значения показателя Ляпунова для сглаженного ряда Лоренца от ширины окна в методе скользящих средних *Примечание:* длина векторов (метод аналога) – 20; мера подобия – 2,0.

Как видно из рис. 6, область значений с шириной окна сглаживания от 170 до 300 может быть выделена как область равномерного убывания показателя Ляпунова. Соответственно в районе до 170 наблюдаются флуктуации, демонстрирующие возможность роста хаотичности ряда после сглаживания.

Выводы. Таким образом, по результатам расчётов можно сделать вывод о принципиальной возможности роста хаотичности ряда после сглаживания значений исходного нелинейного ряда, что означает возможность усложнения зависимости между значениями на основе новых закономерностей, порождённых методом, а не данными, это, в свою очередь, требует тщательного исследования границ применимости методов парадигмы прогнозирования на основе кластеризации.

Библиографические ссылки

1. **Малинецкий, Г.Г.** Современные проблемы нелинейной динамики [Текст]/ Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. –336 с.

2. **Gromov, V.A.** Predictive clustering on non-successive observations for multi-step ahead chaotic time series prediction [Text] / V.A. Gromov, E.A. Borisenko // Neural Computing & Applications DOI: 10.1007\s00521-015-1845-8. – 2015.

3. **Gromov, V.A.** Chaotic time series prediction with employment of ant colony optimization [Text] / V.A. Gromov, A.N. Shulga // Expert Systems with Applications. – 2012. – №39 –P. 8474–8478.

4. Determining Lyapunov exponents from a time series [Text] / A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney, J.A. Vastano // Physica D. – 1985. – №3 – P. 285–317.

Надійшла до редколегії 14.07.2015